

## Objetivos

En esta lección aprenderás a:

- Identificar problemas en los que intervienen magnitudes directamente proporcionales.
- Calcular la función que relaciona a esas magnitudes a partir de diferentes datos y representarla gráficamente.
- Representar estas funciones de diferentes maneras.
- Comparar funciones de este tipo.
- Aproximar números y calcular el error absoluto y relativo.
- Resolver problemas reales en los que intervienen estas funciones.

1.Función de proporcionalidad directa	pág. 170
Definición	
Representación gráfica	
2.Función afín .....	pág. 172
Definición	
Representación gráfica	
3.Ecuación de la recta .....	pág. 174
Forma punto-pendiente	
Recta que pasa por dos puntos	
Forma general	
4.Posición relativa de dos rectas .....	pág. 178
Análisis en forma explícita	
Análisis en forma general	
5.Aplicaciones .....	pág. 180
Problemas simples	
Problemas combinados	

Ejercicios para practicar

Resumen

Autoevaluación

# Funciones lineales

## 1. Función de proporcionalidad directa

### Definición

Se llama **función de proporcionalidad directa** o, simplemente, **función lineal** a cualquier función que relacione dos magnitudes directamente proporcionales (x,y). Su ecuación tiene la forma

$$y = mx \quad \text{ó} \quad f(x) = mx$$

El factor m es la constante de proporcionalidad y recibe el nombre de **pendiente** de la función porque, como veremos en la siguiente sección, indica la inclinación de la recta que la representa gráficamente.

*Recuerda: dos magnitudes son directamente proporcionales si su cociente es constante.*

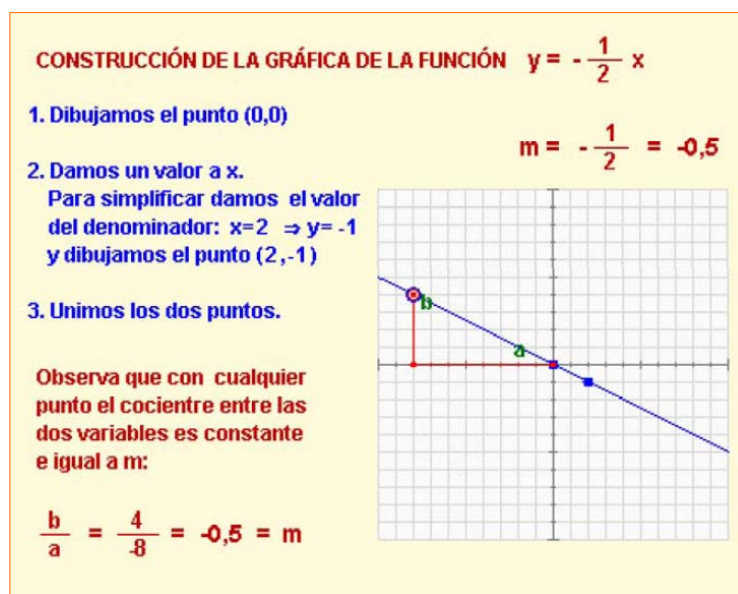


### Representación gráfica

Como has visto, las funciones lineales se representan gráficamente como líneas rectas. Además, como  $y=mx$ , si  $x=0$  entonces  $y=0$ ; por lo tanto la gráfica de todas las funciones lineales pasa por el punto (0,0).

Para dibujar la gráfica basta con obtener las coordenadas de otro punto, dando un valor arbitrario a la x e unir ese punto con el origen de coordenadas (0,0).

Si  $x=1$ , entonces  $y=m$ , por tanto m representa la variación de la y por cada unidad de x, es decir, la inclinación o **pendiente de la recta**. Si m es positiva, representa la cantidad que sube la y por cada unidad de x y si m es negativa la cantidad que baja.



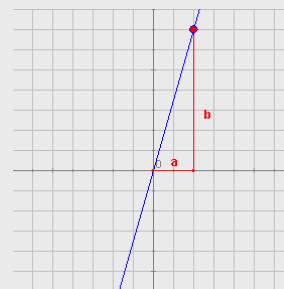
**EJERCICIOS resueltos**

1. Determina si las relaciones entre las parejas de magnitudes siguientes son lineales o no, escribiendo para ello la ecuación que las relaciona.
  - a. Relación entre el precio inicial y el precio rebajado con un 10%.
  - b. Relación entre el peso y el volumen de un material en condiciones constantes de presión y temperatura.
  - c. Un banco ofrece un depósito anual al 5% con una comisión fija de 20€. Relación entre la cantidad invertida y los intereses recibidos.
  - d. Relación entre el área de un cuadrado y la longitud de su lado.

Solución:

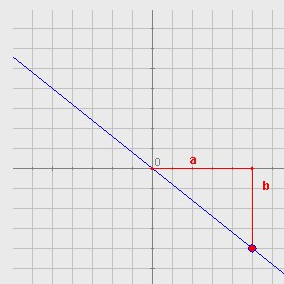
- a) Si el descuento es 10% pago el 90%:  $P_{\text{Rebajado}} = 0.9 \cdot P_{\text{Inicial}}$  (SÍ es lineal)
- b) La relación entre peso (P) y volumen (V) es la densidad (d), que es constante si no cambian las condiciones de presión y temperatura:  $P = d \cdot V$  (SÍ es lineal)
- c) Si C es la cantidad invertida e I son los intereses  $I = 0.05 \cdot C - 20$  (NO es lineal, pero casi lo es. En realidad es una función afín que veremos en el siguiente capítulo)
- d)  $A = \text{long}^2$  (NO es lineal)

2. Determina las ecuaciones de las funciones lineales cuyas gráficas son:



a.

Buscamos un punto de coordenadas enteras (no es estrictamente necesario pero es más cómodo si es posible).  $a = 2$ ,  $b = 7$ . La pendiente es  $m = 7/2$  y la ecuación es  $y = \frac{7}{2}x$



b.

En este caso  $a = 5$  y  $b = -4$  (le asignamos un valor negativo porque la recta es decreciente). La pendiente es, pues,  $m = -4/5$  y la ecuación  $y = -\frac{4}{5}x$

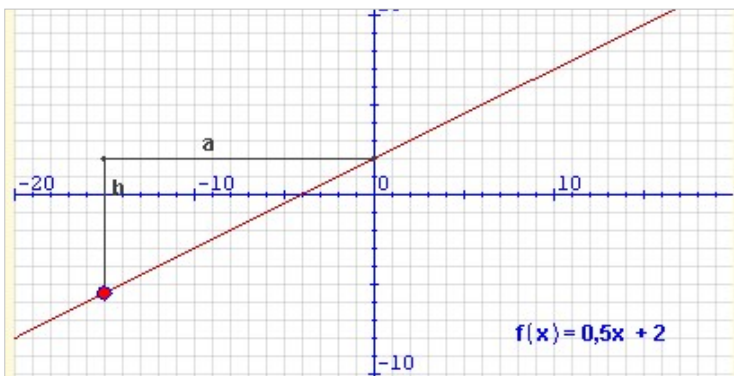
# Funciones lineales

## 2. Función afín

### Definición

Si a dos magnitudes directamente proporcionales se les aplica alguna condición inicial, la función que las liga ya no es totalmente lineal (*las magnitudes ya no son proporcionales*). Se dice que es una **función afín** y su forma es:

$$y = mx + n \quad \text{ó} \quad f(x) = mx + n$$



**m es la pendiente, pero f(x) y x no son proporcionales (salvo si n=0):**

$$\frac{b}{a} = \frac{-7,5}{-15} = 0,5 \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{-5,5}{-15} = 0,3666 \quad \text{No es constante.}$$

**observa que n coincide con el punto de corte con el eje Y.**

La **pendiente**, m, sigue siendo la constante de proporcionalidad y el término n se denomina **ordenada en el origen** porque es el valor que toma y (ordenada) cuando x vale 0 (abscisa en el origen).

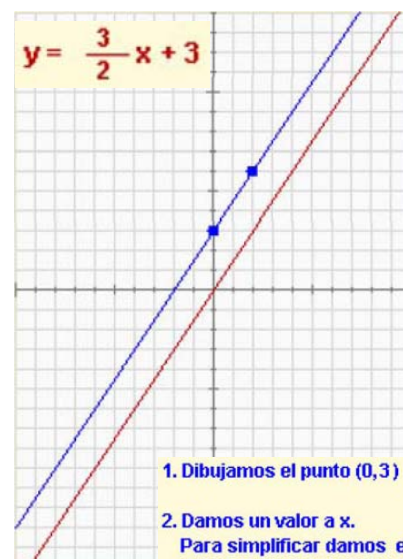
*Recuerda: Ahora el cociente entre f(x) y x no es constante.*

### Representación gráfica

Las funciones afines se representan también mediante líneas rectas, pues el término independiente que las diferencia de las funciones de proporcionalidad solo produce una traslación hacia arriba o hacia abajo de la gráfica de éstas.

Para dibujar la gráfica necesitamos obtener dos puntos.

- Uno nos lo proporciona la propia ecuación, pues, como hemos visto, la **ordenada en el origen**, n, nos indica que la recta pasa por el punto **(0,n)**.
- El otro punto se obtiene dando un valor cualquiera a x y obteniendo el correspondiente valor de y. Uniendo los dos puntos tenemos la gráfica de la función.



1. Dibujamos el punto (0,3)

2. Damos un valor a x.  
Para simplificar damos el valor del denominador:  $x=2 \Rightarrow y=6$  y dibujamos el punto (2,6)

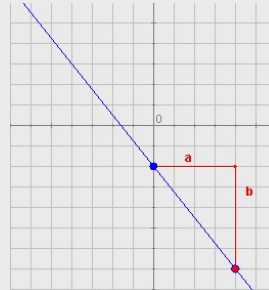
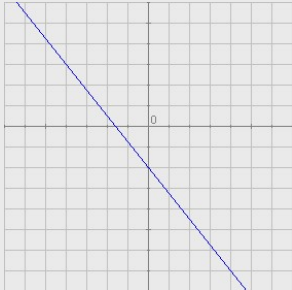
3. Unimos los dos puntos.

Compara con la gráfica de

$$y = \frac{3}{2}x$$

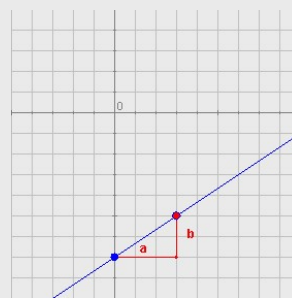
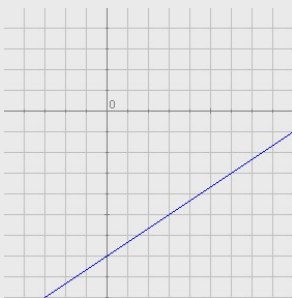
**EJERCICIOS resueltos**

3. Determina las ecuaciones de las funciones afines cuyas gráficas son:



a.

Corta al eje Y en el punto  $(0,-2)$ , luego  $n=-2$ . Ahora buscamos otro punto de coordenadas enteras si es posible  $(4,-7)$  y calculamos sus distancias horizontal y vertical al punto  $(0,-2)$ :  $a = 4$ ,  $b = -5$  (Recuerda: negativo por ser una recta decreciente). La pendiente es  $m=-5/4$  y la ecuación es  $y = -\frac{5}{4}x - 2$

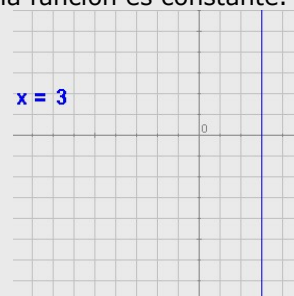
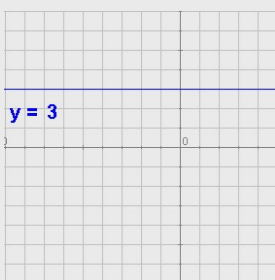


b.

En este caso  $n=-7$ ,  $a=3$  y  $b=2$ . La pendiente es, pues,  $m = 2/3$  y la ecuación  $y = \frac{2}{3}x - 7$

4. Casos particulares:

a. Si la pendiente es cero, la ecuación es  $y = n$  y la función es constante.



b. Si la recta es vertical la ecuación es  $x = k$  y **no es una función**. Decimos que en este caso **la pendiente es infinita**.

# Funciones lineales

## 3. Ecuación de la recta

### Forma punto-pendiente

La ecuación  $y = mx + n$  que hemos visto se denomina **forma explícita** de la ecuación de la recta, y nos permite hallar dicha ecuación cuando conocemos la pendiente y la ordenada en el origen.

Cuando sólo conocemos la pendiente,  $m$ , y las coordenadas de otro de los puntos de la recta,  $(x_0, y_0)$ , su ecuación es

$$y - y_0 = m (x - x_0)$$

Esta ecuación recibe el nombre de **forma punto-pendiente** de la ecuación de la recta. En la secuencia siguiente se explica cómo se obtiene.

### EJERCICIOS resueltos

5. Halla la ecuación de la recta que pasa por P (-8,-5) y de pendiente  $m = 2/7$

La ecuación en forma punto-pendiente:

$$y + 5 = \frac{2}{7} (x + 8)$$

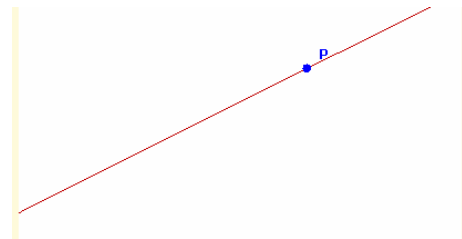
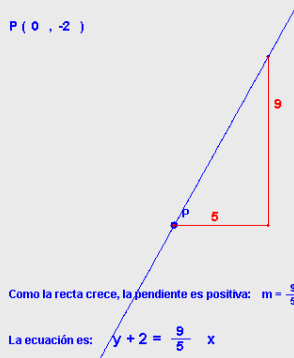
En forma explícita:

$$y + 5 = \frac{2}{7} x + \frac{16}{7}$$

$$y = \frac{2}{7} x - \frac{19}{7}$$

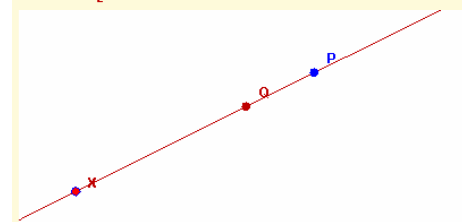
6. Determina la ecuación de esta recta:

P (0, -2)



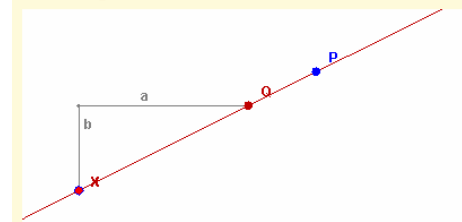
De la recta de la imagen se conocen su pendiente y las coordenadas de uno de los puntos por los que pasa. Queremos determinar su ecuación:

$$m = \frac{1}{2} \quad P = (6,5)$$



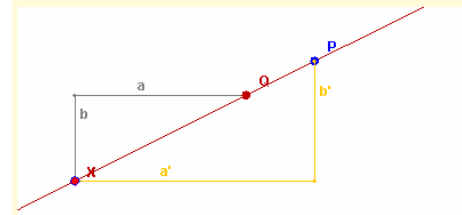
Consideremos un punto arbitrario de la recta, X y supongamos que conocemos la ordenada en el origen Q:

$$m = \frac{1}{2} \quad P = (6,5) \quad X = (x,y) \quad Q = (0,n)$$



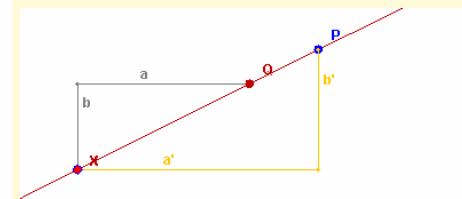
En los apartados anteriores hemos visto que aunque movamos X, el cociente entre b y a es constante e igual a la pendiente:

$$m = \frac{1}{2} \quad P = (6,5) \quad X = (x,y) \quad Q = (0,n) \quad \frac{b}{a} = m = \frac{1}{2}$$

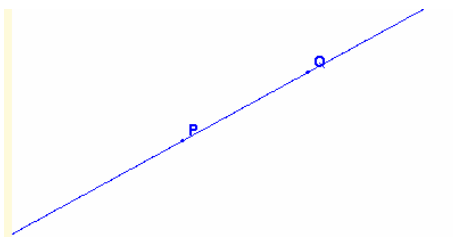


Observa los triángulos de la figura: tienen los lados paralelos, luego son semejantes, por tanto:

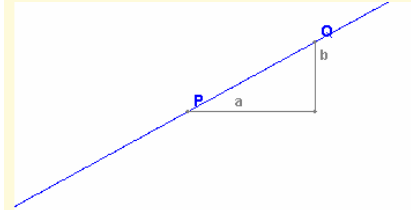
$$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a} = m = \frac{1}{2}$$



$P = (6,5) \quad X = (x,y)$   
 $b'$  es la distancia vertical entre P y X:  $b' = y - 5$   
 $a'$  es la distancia horizontal entre P y X:  $a' = x - 6$   
 luego  $\frac{b'}{a'} = \frac{y-5}{x-6} = \frac{1}{2} \Rightarrow y - 5 = \frac{1}{2} \cdot (x - 6)$

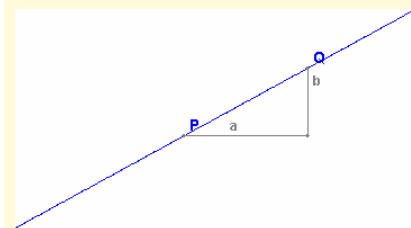


El punto P de la figura tiene coordenadas conocidas  $(x_0, y_0)$  y el punto Q  $(x_1, y_1)$ . Queremos hallar la ecuación de la recta que pasa por ellos:



Procedemos como en casos anteriores:

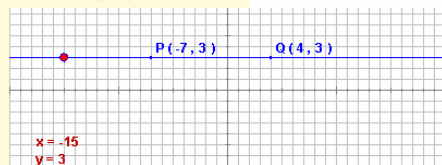
$$a = x_1 - x_0 \quad b = y_1 - y_0 \quad m = \frac{b}{a} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$



$$m = \frac{b}{a} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad P = (x_0, y_0), \text{ forma punto-pendiente:}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Leftrightarrow y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$



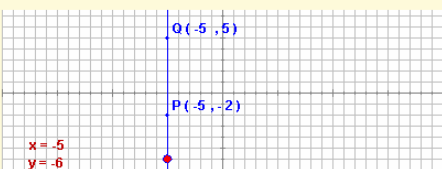
**CASOS ESPECIALES:** Ordenadas iguales.  
Con la fórmula anterior la ecuación de la recta que pasa por P y Q es:

$$\frac{y - 3}{3 - 3} = \frac{x + 7}{4 + 7} \Leftrightarrow \frac{y - 3}{0} = \frac{x + 7}{11}$$

¡No es válida porque hay una división por cero!

Moviendo el control comprueba que todos los puntos de la recta tienen la misma ordenada, por tanto, la ecuación de la recta en este caso es:

$$y = 3$$



**CASOS ESPECIALES:** Abscisas iguales.  
Con la fórmula anterior la ecuación de la recta que pasa por P y Q es:

$$\frac{y + 2}{5 + 2} = \frac{x + 5}{-5 + 5} \Leftrightarrow \frac{y + 2}{7} = \frac{x + 5}{0}$$

¡No es válida porque hay una división por cero!

Moviendo el control comprueba que todos los puntos de la recta tienen la misma abscisa, por tanto, la ecuación de la recta en este caso es:

$$x = -5$$

### Recta que pasa por dos puntos

Sean  $P(x_0, y_0)$  y  $Q(x_1, y_1)$  dos puntos del plano. La ecuación de la recta que pasa por estos puntos es

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Esta ecuación recibe el nombre de **forma continua** de la ecuación de la recta. En la secuencia adjunta se explica cómo se obtiene.

### EJERCICIOS resueltos

7. Halla la ecuación de la recta que pasa por P (5,-9) y Q(6,8). Pasa a forma explícita y determina la pendiente y la ordenada en el origen.

La ecuación buscada es:  $\frac{y - (-9)}{8 - (-9)} = \frac{x - 5}{6 - 5}$

$$\frac{y + 9}{17} = x - 5$$

La forma explícita se obtiene despejando y:

$$y = 17(x - 5) - 9 =$$

$$= 17x - 85 - 9 = 17x - 94$$

$$y = 17x - 94$$

La pendiente es 17  
la ordenada en el origen -94

8. Halla la ecuación de la recta que pasa por P (7,4) y Q(-3,-1). Pasa a forma explícita y determina la pendiente y la ordenada en el origen.

La ecuación buscada es:  $\frac{y - 4}{-1 - 4} = \frac{x - 7}{-3 - 7}$

$$\frac{y - 4}{-5} = \frac{x - 7}{-10}$$

La forma explícita se obtiene despejando y:

$$y = -5 \frac{x - 7}{-10} + 4 = \frac{1}{2}(x - 7) + 4 =$$

$$= \frac{x - 7}{2} + 4 = \frac{x - 7 + 8}{2} = \frac{x + 1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

La pendiente es  $\frac{1}{2}$   
la ordenada en el origen  $\frac{1}{2}$



# Funciones lineales

## Forma general o implícita

La manera más habitual de representar rectas es la **forma general o implícita**:

$$Ax + By + C = 0$$

donde A, B y C son números cualesquiera (al menos A ó B deben ser diferentes de cero). Si B=0 se trata de una recta vertical de ecuación  $x=-C/A$ . Si B no es cero la pendiente es  $-A/B$ .

En las escenas se muestran representaciones de rectas en forma general y el paso de otras formas a general.

**PASO DE CUALQUIER FORMA A FORMA GENERAL:**

a) Función lineal en forma explícita:  
 $y = mx \Leftrightarrow mx - y = 0$  (A = m, B = -1, C = 0)  $m = -\frac{A}{B}$

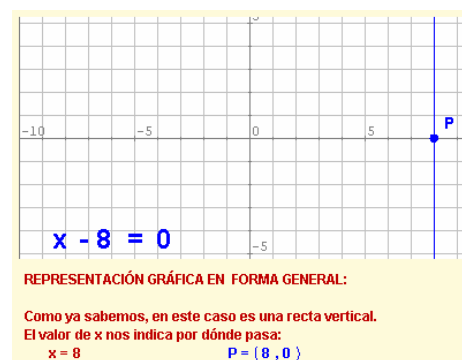
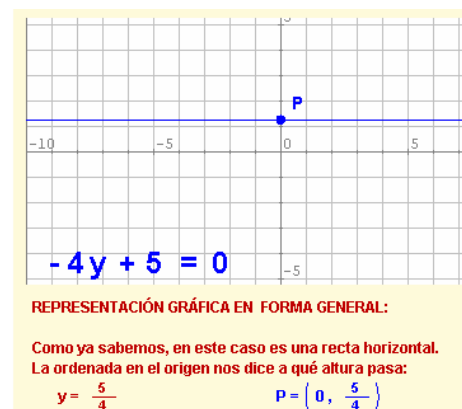
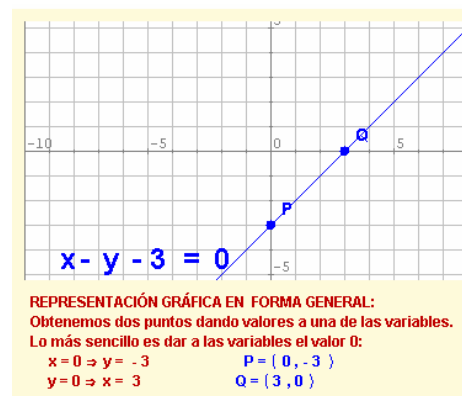
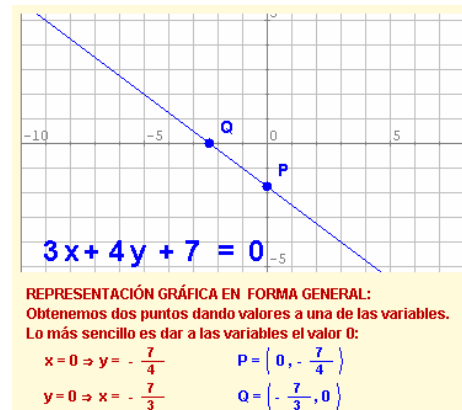
b) Función afín en forma explícita:  
 $y = mx + n \Leftrightarrow mx - y + n = 0$  (A = m, B = -1, C = n)  $m = -\frac{A}{B}$

c) Función constante (paralela al eje X):  
 $y = n \Leftrightarrow y - n = 0$  (A = 0, B = 1, C = -n)  $m = -\frac{A}{B} = 0$

d) Recta vertical:  
 $x = n \Leftrightarrow x - n = 0$  (A = 1, B = 0, C = -n) **No se puede hallar m.**

e) Forma punto pendiente:  
 $y - y_0 = m(x - x_0) \Leftrightarrow mx - y + y_0 - mx_0 = 0$   $m = -\frac{A}{B}$   
 (A = m, B = -1, C = y\_0 - mx\_0)

f) Forma continua:  
 $\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \Leftrightarrow (y_1 - y_0)(x - x_0) = (x_1 - x_0)(y - y_0) \Leftrightarrow$   
 $(y_1 - y_0)x - (x_1 - x_0)y + y_0(x_1 - x_0) - x_0(y_1 - y_0) = 0$   
 (A = y\_1 - y\_0, B = -(x\_1 - x\_0), C = y\_0(x\_1 - x\_0) - x\_0(y\_1 - y\_0))  $m = -\frac{A}{B}$





**EJERCICIOS resueltos**

9. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,-7) y cuya pendiente es  $-2/3$ . Después pasa a forma general.

Solución: En forma punto pendiente la ecuación es  $y + 7 = -\frac{2}{3}(x - 1)$ .

Quitando denominadores y paréntesis queda  $3y + 21 = -2x + 2$ . Pasando todo al primer miembro queda  $2x + 3y + 19 = 0$ . También sería válido el resultado con todos los signos cambiados:  $-2x - 3y - 19 = 0$

10. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto (-4,-2) y de pendiente 0. Después pasa a forma general.

Solución: La ecuación en la forma punto pendiente ya es la ecuación general:  $y + 2 = 0$

11. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(2,-2) y Q(-8,3). Luego pasa a forma general.

Solución: En forma continua la ecuación es  $\frac{y + 2}{3 + 2} = \frac{x - 2}{-8 - 2}$ .

Quitando denominadores queda:  $-10y - 20 = 5x - 10$ .

Pasando todo al primer miembro:  $-5x - 10y - 10 = 0$ . Así bastaría, pero como todos los términos son múltiplos de 5 podemos simplificar:  $-x - 2y - 2 = 0$ . También es válido cambiar todos los términos de signo:  $x + 2y + 2 = 0$ .

12. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(5,-2) y Q(3,-2). Luego pasa a forma general.

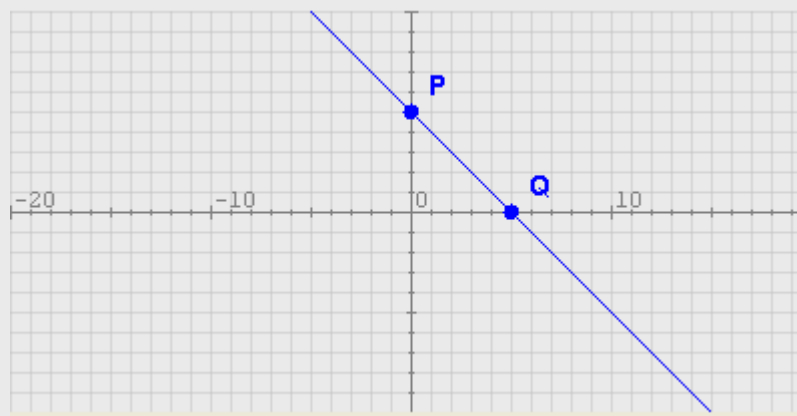
Solución: Como los puntos P y Q tienen igual ordenada, se trata de la recta horizontal  $y = -2$ , o en forma general:  $y + 2 = 0$ .

13. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(6,5) y Q(6,-2). Luego pasa a forma general.

Solución: Como los puntos P y Q tienen igual abscisa, se trata de la recta vertical  $x = 6$ . En forma general queda  $x - 6 = 0$ .

14. Representa gráficamente la recta cuya ecuación general es  $x + y - 5 = 0$ .

Solución: Despejamos la y para obtener la forma explícita:  $y = -x + 5$ . Por tanto, la pendiente es  $-1$  y la ordenada en el origen es 5. Es decir, la recta pasa por el punto (0,5). Calculamos otro punto dando, por ejemplo, el valor 5 a x. Entonces  $y = -5 + 5 = 0$ . La recta pasa también por el punto (5,0). Dibujamos los puntos y unimos con la regla:



# Funciones lineales

## 4. Posición relativa de dos rectas

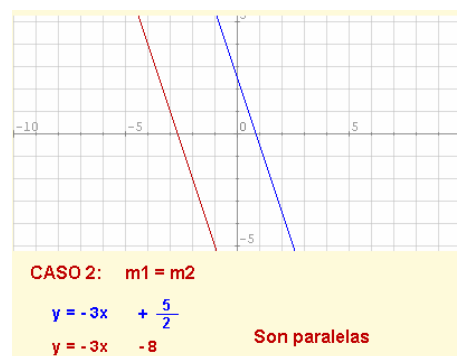
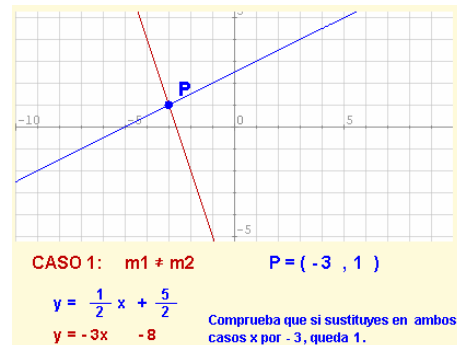
### Análisis en forma explícita

Dadas dos rectas

$$y = m_1x + n_1 \quad y = m_2x + n_2$$

Si  $m_1 \neq m_2$  las rectas se cortan en un punto cuyas coordenadas se obtienen resolviendo el sistema. Se dice que las rectas son **secantes**.

Si  $m_1 = m_2$  las rectas son **paralelas**. Si, además,  $n_1 = n_2$  las rectas son **coincidentes**.



### Análisis en forma general

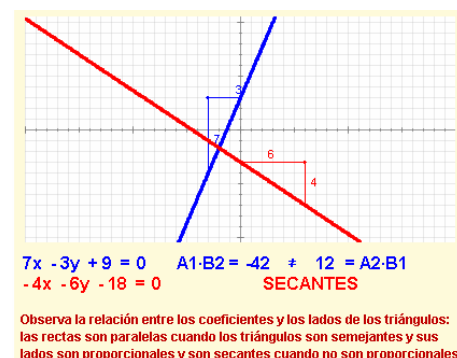
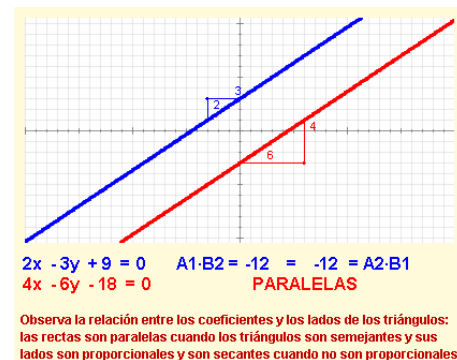
Dadas dos rectas

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Si  $A_1B_2 \neq A_2B_1$  son **secantes**. Al igual que antes las coordenadas del punto de corte se obtienen resolviendo el sistema.

Si  $A_1B_2 = A_2B_1$  las rectas son **paralelas**.



**EJERCICIOS resueltos**

15. Determina la posición relativa de las rectas  $y = -4x + 1$ ,  $y = 4x$ . En caso de que sean secantes, determina las coordenadas del punto de corte.

Solución: la pendiente de la primera recta es  $m_1 = -4$  y la de la segunda es  $m_2 = 4$ . Como las pendientes son distintas las rectas son **secantes**. Hallamos ahora el punto de corte resolviendo el sistema:

$$-4x + 1 = 4x; \quad 1 = 8x; \quad x=1/8; \quad y = 4 \cdot (1/8) = 4/8 = 1/2; \quad P = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$$

16. Determina la posición relativa de las rectas  $y = -2x + 3$ ,  $y = -2x - 2$ . En caso de que sean secantes, determina las coordenadas del punto de corte.

Solución: La pendiente de ambas rectas es  $-2$  y la ordenada en el origen es diferente, por tanto son dos rectas **paralelas**.

17. Determina la posición relativa de las rectas  $x - 3y - 1 = 0$ ,  $4x + y + 1 = 0$ . En caso de que sean secantes, determina las coordenadas del punto de corte.

Solución: Como están en forma general debemos comprobar si los coeficientes respectivos de  $x$  e  $y$  son proporcionales:  $A_1=1$ ,  $B_1=-3$ ,  $A_2=4$ ,  $B_2=1$ , entonces  $A_1 \cdot B_2 = 1$  y  $A_2 \cdot B_1 = -12$ . Son diferentes, por lo tanto las rectas son **secantes**. Vamos a hallar las coordenadas del punto de corte. Hay varias maneras de hacerlo, una de ellas es despejar  $y$  en ambas ecuaciones (pasar a forma explícita) y repetir lo hecho en el ejercicio 15 más arriba:

$$y = \frac{1-x}{-3}; \quad y = -1 - 4x; \quad \frac{1-x}{-3} = -1 - 4x; \quad 1-x = 3 + 12x; \quad -2 = 13x; \quad x = -\frac{2}{13}$$

Ahora sustituimos el valor obtenido para  $x$  en cualquiera de las dos ecuaciones:

$$y = -1 - 4 \cdot \left(-\frac{2}{13}\right) = -1 + \frac{8}{13} = -\frac{5}{13}$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto de corte son  $P = \left(-\frac{2}{13}, -\frac{5}{13}\right)$

Vamos a comprobar que el resultado es correcto sustituyendo los dos valores en ambas ecuaciones y viendo que en ambos casos las igualdades se verifican:

$$-\frac{2}{13} - 3 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) - 1 = -\frac{2}{13} + \frac{15}{13} - 1 = \frac{13}{13} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$4 \cdot \left(-\frac{2}{13}\right) + \left(-\frac{5}{13}\right) + 1 = -\frac{8}{13} - \frac{5}{13} + 1 = -\frac{13}{13} + 1 = -1 + 1 = 0$$

18. Determina la posición relativa de las rectas  $2x - 5y - 1 = 0$ ,  $-4x + 10y + 1 = 0$ . En caso de que sean secantes, determina las coordenadas del punto de corte.

Solución: Como están en forma general debemos comprobar si los coeficientes respectivos de  $x$  e  $y$  son proporcionales:  $A_1=2$ ,  $B_1=-5$ ,  $A_2=-4$ ,  $B_2=10$ , entonces  $A_1 \cdot B_2 = 20$  y  $A_2 \cdot B_1 = 20$ . Son iguales, por lo tanto las rectas son **paralelas**.

# Funciones lineales

## 5. Aplicaciones


### Problemas simples

Las funciones lineales describen fenómenos en los que intervienen magnitudes directamente proporcionales. La representación gráfica será una recta cuya pendiente nos informa de la rapidez de la variación de una magnitud con respecto a la otra y la ordenada en el origen nos informa sobre las condiciones iniciales.

En las imágenes de la derecha tienes un par de ejemplos de cómo obtener la ecuación (de una función lineal o afín) a partir de dos puntos conocidos o a partir de un punto y la pendiente y, a partir de ellas, hacer predicciones y cálculos de situaciones desconocidas.

*En la descripción de fenómenos reales es frecuente que las magnitudes que se relacionan vengan dadas por números de tamaños muy diferentes, por lo que al representarlas gráficamente habrá que escoger unas escalas adecuadas en los ejes correspondientes.*

En los países anglosajones suelen usar la escala Fahrenheit para medir temperaturas. En esta escala el punto de congelación del agua se alcanza a 32°F, y el de ebullición a 212°F.



Nosotros usamos la escala Celsius en la que esos puntos se alcanzan a 0°C y 100°C respectivamente.

Halla la ecuación que relaciona °C con °F y dibújala.  
¿A cuántos °C equivalen 80°F? ¿A cuántos °F equivalen 36°C?

Pasa por los puntos P = (32,0) Q = (212,100)

La ecuación en forma continua es:  $\frac{y - 0}{100 - 0} = \frac{x - 32}{212 - 32}$

En forma explícita  $y = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$

$x = 80^\circ\text{F} \Rightarrow y = 62,2^\circ\text{C}$

$y = 36^\circ\text{C} \Rightarrow x = \frac{9}{5}(y + \frac{160}{9}) = 96,8^\circ\text{F}$

### Problemas combinados

Donde realmente resulta interesante la aplicación de funciones lineales es en el estudio de varias funciones de manera simultánea de forma que podamos compararlas con facilidad.

Debajo tienes un ejemplo ilustrativo:

#### ¿Qué compañía me interesa más?

- La compañía A me ofrece una cuota fija de 15€ al mes más 0,05€/min.
- La compañía B me ofrece pagar sólo por el consumo a 0,25€/min.
- La compañía C me ofrece una cuota de 0,15€/min con un mínimo de 15€.



Si llamamos x a los minutos de consumo e y al importe total, la función que describe el gasto con cada compañía es:

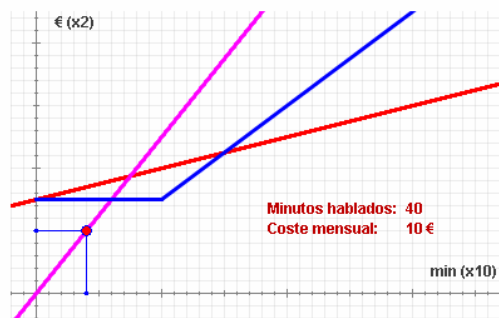
- A:  $y = 0,05x + 15$
- B:  $y = 0,25x$
- C:  $y = \begin{cases} 15 & \text{si } x \leq 100 \\ 0,15x & \text{si } x > 100 \end{cases}$  (porque si hablamos menos de 100 minutos nos cobran 15€)

Sus gráficas según el color son:


Si hablo menos de 60 min al mes la más barata es la compañía B.

Si hablo entre 60 y 150 minutos al mes, es mejor la C.

Si hablo más de 150 minutos al mes la mejor es la A.



Han llegado las rebajas.



En un comercio aplican un 18% de descuento a todos sus productos.

Halla la ecuación que relaciona el precio rebajado con el original y dibújala.

¿Cuánto cuesta una camisa que antes costaba 72€? He pagado 65,60€ por unos pantalones ¿cuánto costaban antes?

Si el descuento es del 18%, cada producto cuesta el 82% de su precio original. Por tanto la ecuación es  $y = 0,82 \cdot x$  función lineal de pendiente 0,82.

Pasa por los puntos P = (0,0) Q = (100,82)

$x = 72\text{€} \Rightarrow y = 0,82 \cdot 72 = 59,04\text{€}$

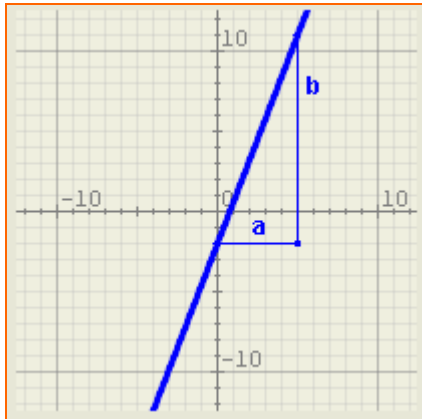
$y = 65,60\text{€} \Rightarrow x = 65,60 / 0,82 = 80\text{€}$

# Funciones lineales



## Para practicar

- Representa gráficamente las rectas de ecuaciones  $y=2x/5$  y  $5x+y+5=0$ .
- Halla la ecuación de la recta de la imagen:



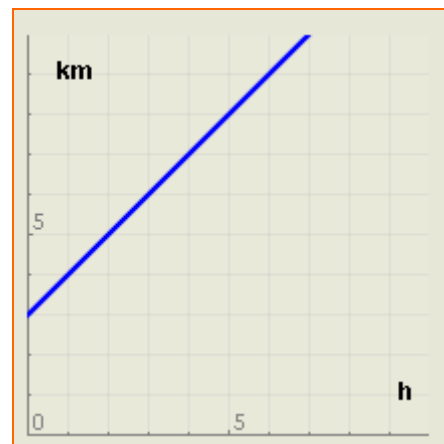
- Calcula la forma general de la ecuación de la recta que pasa por el punto P (3,-2) y cuya pendiente es  $m=-2$ .
- Calcula la forma general de la ecuación de la recta que pasa por los puntos P (3,-2) y Q (-2,-1).
- Determina la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de ecuación  $3x+2y-2=0$ .
- Determina la posición relativa de las rectas  $y=3x-2$  e  $y=-2x-2$ . Si se cortan halla también las coordenadas del punto de corte.
- Averigua si los puntos A(-2,-4), B(0,-2) y C(3,1) están alineados.
- Halla la ecuación de la recta paralela a  $y=3x-4$  que pasa por el punto (-3,-10)
- Dos agricultores de zonas diferentes cultivan maíz con los rendimientos y costes que se indican debajo. Averigua cuántas ha debe tener cada uno para empezar a tener beneficios y quién tiene más beneficio en función del número de ha cultivadas.

<b>Agricultor 1:</b>	
Rendimiento:	7,28 Tm/ha.
Costes por riego, abono, etc:	219 €/ha.
Costes fijos (seguro, impuestos, etc):	5525 €
<b>Agricultor 2:</b>	
Rendimiento:	3,03 Tm/ha.
Costes por riego, abono, etc:	52 €/ha.
Costes fijos (seguro, impuestos, etc):	2000 €
Precio del maíz:	201 €/Tm

- La arena contenida en un reloj de arena ocupa un volumen de  $563 \text{ cm}^3$  y el fabricante indica que la velocidad de caída de la arena es de  $7 \text{ cm}^3/\text{s}$ . Averigua cuánto tarda en haber la misma cantidad de arena en las dos partes del reloj.



- Halla la ecuación de la función que describe la siguiente frase: "Un móvil está a 3 km de mí y se acerca a  $2 \text{ km/h}$ ".
- Halla la ecuación de la función que describe la siguiente frase: "Un móvil está a mi lado durante 1 hora y luego se aleja a  $2 \text{ km/h}$ ".
- La gráfica siguiente representa la distancia a la que se encuentra una persona con respecto a mí en relación con el tiempo transcurrido. Expresa con una frase su significado.



# Funciones lineales

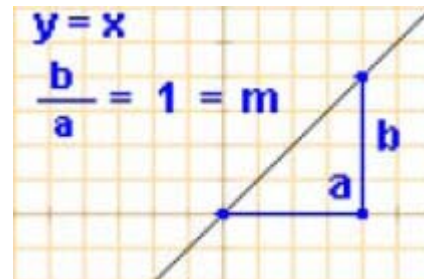


## Recuerda lo más importante

### Funciones lineales

Son las funciones que relacionan magnitudes directamente proporcionales y su ecuación es de la forma  $y = mx$

Su representación gráfica es siempre una línea recta que pasa por el origen. La pendiente,  $m$ , es la constante de proporcionalidad.

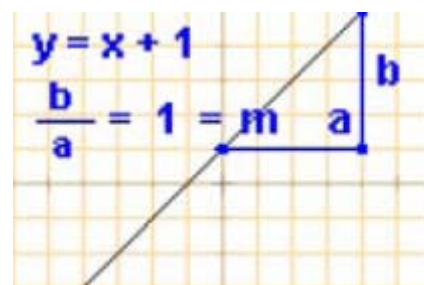


### Funciones afines

Relacionan magnitudes directamente proporcionales sometidas a alguna condición inicial. Tienen la forma

$$y = mx + n$$

Su gráfica es una recta de pendiente  $m$  que pasa por el punto  $(0, n)$  ( $n$  es la **ordenada en el origen**).



### Ecuación de la recta

- **Forma explícita:**  $y = mx + n$
- **Forma punto-pendiente:** si se conoce la pendiente,  $m$ , y las coordenadas de un punto  $(x_0, y_0)$  la ecuación es:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

- **Recta por dos puntos:** si se conocen las coordenadas de dos puntos  $P(x_0, y_0)$ ,  $Q(x_1, y_1)$  la ecuación es:

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

- **Forma general:** Simplificando cualquiera de las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$Ax + By + C = 0$$

la pendiente es  $m = -A/B$  si  $B \neq 0$

### Casos particulares



### Posición relativa de dos rectas

$$r_1: y = m_1x + n_1; \quad r_2: y = m_2x + n_2$$

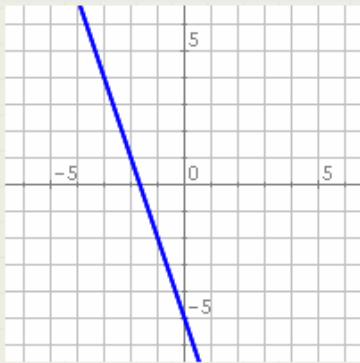
si  $m_1 = m_2$  son **paralelas** en caso contrario son **secantes**.

$$r_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$r_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

si  $A_1B_2 = A_2B_1$  son **paralelas** en caso contrario son **secantes**.

Si son secantes las coordenadas del punto de corte se hallan resolviendo el sistema.



## Autoevaluación

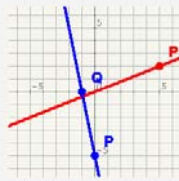


1. Escribe la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de la imagen.
2. Calcula la ordenada en el origen de la recta que pasa por el punto  $(-4, -1)$  y cuya pendiente es  $-3$ .
3. Calcula la ordenada en el origen de la recta de ecuación  $-3x - 3y + 2 = 0$
4. Calcula la pendiente de la misma recta de antes.
5. Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $P(-5, -4)$  y  $Q(-4, -2)$ .
6. Determina la posición relativa de las rectas de ecuaciones  $y = -3x - 5$  e  $y = 2x - 2$ .
7. Determina la posición relativa de las rectas de ecuaciones  $4x - 3y + 5 = 0$  e  $-8x + 6y + 1 = 0$ .
8. Halla las coordenadas del punto de corte de las rectas de ecuaciones  $y = -x + 5$  e  $y = 2x - 7$ .
9. Averigua si los puntos  $A(-3, -1)$ ,  $B(0, -1)$  y  $C(6, -4)$  están alineados.
10. Halla la ecuación de la recta paralela a  $y = -x + 5$  que pasa por el punto  $(4, -2)$ .



## Funciones lineales

## Soluciones de los ejercicios para practicar



- 1.
2.  $y = \frac{13}{5}x - 2$
3.  $2x + y - 4 = 0$
4.  $x + 5y + 7 = 0$
5.  $m = -3/2, n = 1$
6. Son secantes y se cortan en el punto  $(0, -2)$
7. Sí están alineados. (Halla la ecuación de la recta que pasa por A y por B y comprueba que también pasa por C).
8.  $y = 3x - 1$
9. El primero obtiene beneficios a partir de 4,43 ha. El segundo a partir de 3,58 ha. El primero gana más que el segundo a partir de 5,13 ha.
10. 40,2 segundos.
11.  $y = 2x + 3$
12.  $y = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
13. Está a tres km de mi y se aleja a 1 km/h.

### Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1.  $m = -3, n = -5$
2.  $n = -13$
3.  $n = 2/3 \approx 0,66$
4.  $m = -1$
5.  $m = 2$
6. Son secantes porque sus pendientes son diferentes.
7. Son paralelas porque  $A_1 \cdot B_2 = A_2 \cdot B_1$
8.  $x = 4, y = 1$
9. No están alineados.
10.  $y = -x + 2$