Strategie zum äquivalenten Umformen linearer Gleichungen

Beispiel 1: Löse die lineare Gleichung $2x - 23 = 4x - 3$ durch äquivalentes Umformen. Durchlaufe die Schritte 1 bis 4.

Gib die Lösungsmenge an. Führe die Probe für die Gleichung durch.

Schritt 1: Vereinfache die linke Seite der Gleichung. Vereinfache die rechte Seite der Gleichung.

Zum Beispiel:

- Klammern auflösen durch Ausmultiplizieren;
- Brüche durch Multiplizieren mit Nennern beseitigen;

Dieser Schritt fällt hier weg.

Schritt 2:

Addiere auf beiden Seiten der Gleichung einen Term.

Dieser Term soll bewirken, dass nach diesem Schritt die Lösungsvariable x (oder eine andere Lösungsvariable) nur noch auf einer Seite der Gleichung vorkommt.

Vereinfache die linke Seite der Gleichung.

Vereinfache die rechte Seite der Gleichung.

Überzeuge dich, ob der Term geeignet war.

$$2x - 23 = 4x - 3 \qquad | + \boxed{Term}$$

$$2x - 23 + \boxed{} = 4x - 3 + \boxed{} \qquad 4x - 4x = 0$$

$$2x - 23 + \boxed{-4x} = 4x - 3 + \boxed{-4x}$$

Vereinfachen:

$$2x - 4x - 23 = 4x - 4x - 3$$

$$-2x - 23 = -3$$

Der Term im Kästchen war geeignet, denn die Lösungsvariable x kommt nur noch auf der linken Seite der Gleichung vor.

Schritt 3:

Addiere auf beiden Seiten der Gleichung eine Zahl.

Diese Zahl soll bewirken, dass nach diesem Schritt alle Zahlen ohne Lösungsvariable x nur noch auf der anderen Seite der Gleichung vorkommen.

Vereinfache die linke Seite der Gleichung.

Vereinfache die rechte Seite der Gleichung.

Überzeuge dich, ob der Term geeignet war.

$$-2x - 23 = -3 \qquad | + \boxed{Zahl}$$

$$-2x - 23 + \square = -3 + \square \qquad -23 + 23 = 0$$

$$-2x - 23 + \boxed{23} = -3 + \boxed{23}$$

Vereinfachen:

$$-2x = 20$$

Die Zahl im Kästchen war geeignet, denn auf der linken Seite der Gleichung kommt keine Zahl ohne Lösungsvariable x mehr vor.

Schritt 4:

Dividiere auf beiden Seiten der Gleichung durch die Zahl, die vor der Lösungsvariable x steht.

Vereinfache die linke Seite der Gleichung.

Vereinfache die rechte Seite der Gleichung.

Überzeuge dich, ob der Term geeignet war.

Gib die Lösung der Gleichung (nur Zahl!) an.

$$-2x = 20 \qquad | \div \boxed{Zahl}$$

$$-2 \cdot x \div \square = 20 \div \square \qquad -2 \div (-2) = 1$$

$$-2 \cdot x \div \boxed{(-2)} = 20 \div \boxed{(-2)}$$

Vereinfachen:

$$x = -10$$

Die Zahl im Kästchen war geeignet, denn auf der linken Seite der Gleichung steht die Lösungsvariable x alleine.

Lösung der Gleichung ist die Zahl -10.

Weiter mit Lösungsmenge und Probe…

Lösungsmenge: $L = \{-10\}$

Probe für $2x - 23 = 4x - 3$:

Setze $x = -10$.

$$2 \cdot (-10) - 23 = 4 \cdot (-10) - 3$$
$$-20 - 23 = -40 - 3$$
$$-43 = -43$$

Wahre Aussage.

Beispiel 2: Löse die lineare Gleichung $\frac{5}{6}x - 1 = -\frac{2}{3}x + 0.5$ durch äquivalentes Umformen. Durchlaufe die Schritte 1 bis 4.

Gib die Lösungsmenge an. Führe die Probe für die Gleichung durch.

Schritt 1: Vereinfache die linke Seite der Gleichung. Vereinfache die rechte Seite der Gleichung.

Zum Beispiel:

- Klammern auflösen durch Ausmultiplizieren;
- **Brüche durch Multiplizieren mit Nennern beseitigen**;

$$\frac{5}{6}x - 1 = -\frac{2}{3}x + 0.5$$ Nur Brüche.

$$\frac{5}{6}x - 1 = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$$ $| \cdot 3 \cdot 2$

Brüche beseitigen.

$$\frac{5}{6}x \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 2 = -\frac{2}{3}x \cdot 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2$$

Vereinfachen:

$$5x - 6 = -4x + 3$$ Brüche sind weg.

Jetzt die Schritte 2 bis 4 durchlaufen.

Hier nur die Kurzfassung:

$$\begin{aligned} 5x - 6 &= -4x + 3 && | + 4x \\ 9x - 6 &= 3 && | + 6 \\ 9x &= 9 && | \div 9 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Lösung der Gleichung ist die Zahl 1.

Weiter mit Lösungsmenge und Probe…

Lösungsmenge: $L = \{1\}$

Probe für $\frac{5}{6}x - 1 = -\frac{2}{3}x + 0.5$**:**

Setze $x = 1$.

$$\frac{5}{6} \cdot 1 - 1 = -\frac{2}{3} \cdot 1 + 0.5$$

$$\frac{5}{6} - 1 = -\frac{2}{3} + 0.5$$

$$\frac{5}{6} - \frac{6}{6} = -\frac{4}{6} + \frac{3}{6}$$

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$$

Wahre Aussage.

Beispiel 3: Löse die lineare Gleichung $5\left(t+\frac{1}{10}\right)=8t$ durch äquivalentes Umformen. Durchlaufe die Schritte 1 bis 4.

Gib die Lösungsmenge an. Führe die Probe für die Gleichung durch.

Schritt 1: Vereinfache die linke Seite der Gleichung. Vereinfache die rechte Seite der Gleichung.

Zum Beispiel:

- **Klammern auflösen durch Ausmultiplizieren**;
- **Brüche durch Multiplizieren mit Nennern beseitigen;**

Die Lösungsvariable ist t.

$$5\cdot\left(t+\frac{1}{10}\right)=8\cdot t \qquad |\,T$$

Vereinfachen durch Ausmultiplizieren:

$$5\cdot t+\frac{1}{2}=8\cdot t \qquad |\cdot 2$$

$$10t+1=16t \qquad \text{Brüche sind weg.}$$

Jetzt die Schritte 2 bis 4 durchlaufen.

Hier nur die Kurzfassung:

$$\begin{aligned} 10t + 1 &= 16t && | + (-16t) \\ -6t + 1 &= 0 && | - 1 \\ -6t &= -1 && | \div (-6) \\ t &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Lösung der Gleichung ist die Zahl $\frac{1}{6}$.

Weiter mit Lösungsmenge und Probe…

Lösungsmenge: $L = \left\{\frac{1}{6}\right\}$

Probe für $\mathbf{5\left(t + \frac{1}{10}\right) = 8t}$ **:**

Setze $t = \frac{1}{6}$.

$$5\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{10}\right) = 8 \cdot \frac{1}{6}$$
$$5 \cdot \frac{4}{15} = \frac{8}{6}$$
$$\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

Wahre Aussage.