Problemas – Tema 5

Problemas resueltos - 23 - área encerrada por una función con el eje horizontal OX

1. Sea la función $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ **.**

a) Calcular una primitiva de $f(x)$ **y comprobar la solución obtenida.**

b) Calcular el área encerrada por la función, el eje $y=0$ **y las rectas** $x=0$ **y** $x=4$ **.**

a) Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$, cumplirá la relación:

$$F(x)=\int f(x)dx \quad \rightarrow \quad F(x)=\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$$

Aplicamos partes → $\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx$

$$u(x)=x \quad \rightarrow \quad u'(x)=1$$
$$v'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad \rightarrow \quad v(x)=2\sqrt{1+x}$$

$$F(x)=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx=2x\sqrt{1+x}-\int 2\sqrt{1+x}\,dx$$
$$F(x)=2x\sqrt{1+x}-2\cdot\int \sqrt{1+x}\,dx=2x\sqrt{1+x}-2\int (1+x)^{1/2}dx=2x\sqrt{1+x}-2\cdot\frac{2}{3}\int \frac{3}{2}(1+x)^{1/2}dx$$
$$F(x)=2x\sqrt{1+x}-\frac{4}{3}(1+x)^{3/2}$$

Si sumamos una constante de integración, tendríamos las infinitas primitivas que forman la integral indefinida.

$$I=F(x)+C=2x\sqrt{1+x}-\frac{4}{3}(1+x)^{3/2}+C$$

Si quisiéramos comprobar el resultado obtenido, derivamos $F(x)$ y verificamos que recuperamos la expresión de $f(x)$ del enunciado.

$$F(x)=2x\sqrt{1+x}-\frac{4}{3}(1+x)^{3/2}$$

$$F'(x)=2[1\cdot\sqrt{1+x}+x\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{1+x}}]-\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}(1+x)^{1/2}$$

$$F'(x)=2\sqrt{1+x}+\frac{x}{\sqrt{1+x}}-2(1+x)^{1/2}=\frac{x}{\sqrt{1+x}}=f(x)$$

b) Para obtener el área encerrada por $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ con el eje horizontal en el intervalo $[0,4]$, debemos comprobar si la función es positiva, negativa o bien corta al eje horizontal en ese intervalo.

Para obtener los puntos de corte, igualamos la función a cero.

$\frac{x}{\sqrt{1+x}}=0 \rightarrow x=0$ → coincide con el extremo inferior del intervalo $[0,4]$

Por lo tanto, podemos determinar si la función es positiva o negativa en el resto de puntos del intervalo, obteniendo la imagen de la función en $x=4$ por ejemplo → $f(4)=\frac{4}{\sqrt{1+4}}>0$ → la función se mantiene por encima del eje horizontal.

Concluimos que el área coincide con la integral definida siguiente:

$$Área=\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$$

Usamos la primitiva obtenida en el apartado anterior → $F(x)=2x\sqrt{1+x}-\frac{4}{3}(1+x)^{3/2}$ → Por la regla de Barrow sabemos que $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$. Por lo tanto:

$$Área=\left[2x\sqrt{1+x}-\frac{4}{3}(1+x)^{3/2}\right]_0^4=4{,}31\,u^2$$

2. Calcula $\int x\,sen(\frac{\pi x}{2})dx$ **y obtén el área del recinto limitado por** $f(x)=x\,sen(\frac{\pi x}{2})$ **el eje OX, las rectas verticales** $x=0$ **y** $x=1$ **.**

Resolvemos la siguiente integral indefinida.

$$I=\int x\,sen(\frac{\pi x}{2})dx$$

Aplicamos partes → $\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx$

$$u(x)=x \quad \rightarrow \quad u'(x)=1$$

$$v'(x)=sen(\frac{\pi x}{2}) \quad \rightarrow \quad v(x)=\frac{-2}{\pi}\cos(\frac{\pi x}{2})$$

$$I=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)=\frac{-2x}{\pi}\cos(\frac{\pi x}{2})+\int\frac{2}{\pi}\cos(\frac{\pi x}{2})dx=\frac{-2x}{\pi}\cos(\frac{\pi x}{2})+\frac{2}{\pi}\int\cos(\frac{\pi x}{2})$$

$$I=\frac{-2x}{\pi}\cos(\frac{\pi x}{2})+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{\pi}\int\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi x}{2})=\frac{-2}{\pi}\cdot x\cdot\cos(\frac{\pi x}{2})+\frac{4}{\pi^2}sen(\frac{\pi x}{2})+C$$

Debemos conocer si la función es positiva, negativa o corta al eje horizontal en el intervalo $[0,1]$. Para ello, igualamos la función a cero.

$$x\cdot sen(\frac{\pi x}{2})=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \quad , \quad sen(\frac{\pi x}{2})=0$$

La función seno se anula si su argumento es múltiplo del número pi.

$$\frac{\pi\cdot x}{2}=k\cdot\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z} \quad \rightarrow \quad x=k\cdot 2 \quad \rightarrow \quad x=...-2,0,2,...$$

Por lo tanto, la función corta al intervalo $[0,1]$ solo en el punto $x=0$. Para conocer si la función es positiva o negativa en el resto de puntos del intervalo, obtenemos la imagen de la función para $x=1$.

$f(1)=1\cdot sen(\frac{\pi}{2})=1>0$ → La función es positiva en $[0,1]$

En consecuencia, el área coincide con la siguiente integral definida.

$$Área=\int_0^1 x\, sen\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$$

Utilizamos el resultado de la integral indefinida calculada anteriormente, y la regla de Barrow: $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$, donde $F(x)$ es una primitiva de la función.

Recuerda que los límites de integración $x=0$, $x=1$ son ángulos dados en radianes.

$$Área=\left[\frac{-2}{\pi}\cdot x\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\frac{4}{\pi^2}sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1=\frac{4}{\pi^2}u^2$$

3. Calcula:

a) La integral definida $\int_0^4 (x^2-3x)\,dx$ **.**

b) El área encerrada por la función $f(x)=x^2-3x$ **, el eje** OX **y las rectas verticales** $x=0$ **,** $x=4$ **.**

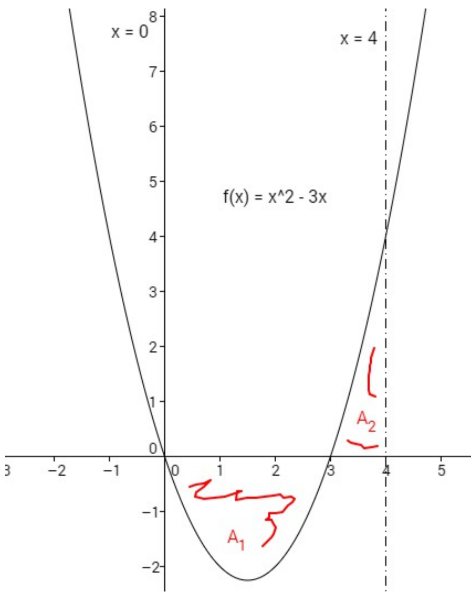
a) $\int_0^4 (x^2-3x)\,dx=[F(x)]_0^4=F(4)-F(0)$

$$\int_0^4 (x^2-3x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}\right]_0^4=\frac{64}{3}-3\cdot\frac{16}{2}-(0)=\frac{64}{3}-24=\frac{-8}{3}$$

La integral definida es negativa. No confundir con el valor de un área, que siempre resulta positiva.

b) La función $f(x)=x^2-3x$ corta al eje OX en el intervalo $[0,4]$. Por lo tanto, el área encerrada no es igual a la integral definida en el apartado anterior.

Debemos esbozar su gráfica para comprender el área total.



El punto de corte con el eje de abscisas se produce en $(3,0)$. Por lo tanto, siguiendo la notación de la gráfica:

$$A=A_1+A_2 \;\rightarrow\; A_1=-\int_0^3 (x^2-3x)\,dx \;\;,\;\; A_2=\int_3^4 (x^2-3x)\,dx$$

$$A_1=-\int_0^3 (x^2-3x)\,dx=-[\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}]_0^3=-[\frac{27}{3}-\frac{27}{2}-(0)]=-[\frac{27}{3}-\frac{27}{2}]=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$$

$$A_2=\int_3^4 (x^2-3x)\,dx=[\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}]_3^4=[\frac{64}{3}-\frac{48}{2}-(\frac{27}{3}-\frac{27}{2})]=\frac{64}{3}-24+\frac{27}{6}=\frac{11}{6}$$

Por lo tanto → $A=A_1+A_2=\frac{9}{2}+\frac{11}{6}=\frac{19}{3}\ u^2$

4. Calcula:

a) La integral definida $\int_0^{2\pi} sen(x)dx$ **.**

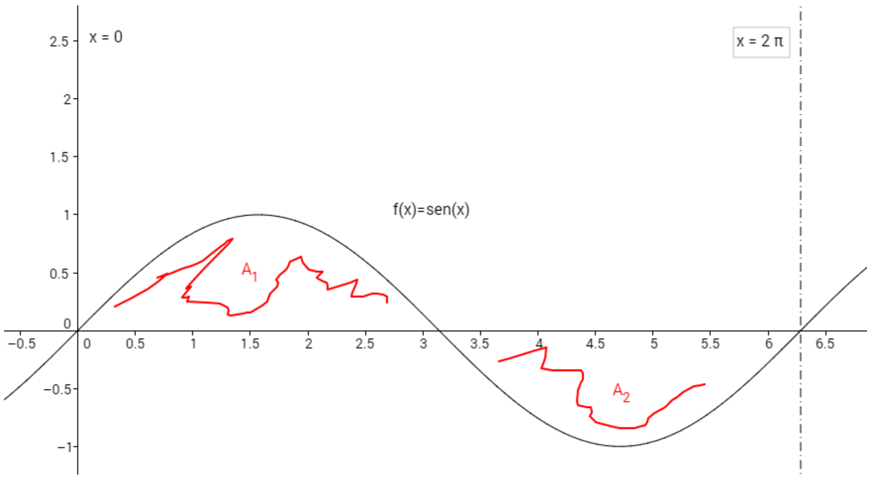
b) El área encerrada por la función $f(x)=sen(x)$ **, el eje** OX **y las rectas verticales** $x=0$ **,** $x=2\pi$ **.**

a) $\int_0^{2\pi} sen(x)dx=[F(x)]_0^{2\pi}=F(2\pi)-F(0)$

$$\int_0^{2\pi} sen(x)dx=[-\cos(x)]_0^{2\pi}=-\cos(2\pi)+\cos(0)=-1+1=0$$

b) La función $f(x)=sen(x)$ corta al eje OX en el intervalo $[0,2\pi]$. Por lo tanto, el área encerrada no es igual a la integral definida en el apartado anterior.

Debemos esbozar su gráfica para comprender el área total.



El punto de corte con el eje de abscisas se produce en $(\pi,0)$. Por lo tanto, siguiendo la notación de la gráfica:

$A=A_1+A_2$ → Las áreas A_1 y A_2 son iguales → $A_1=A_2$ → $A=2\cdot A_1$

$$A_1=\int_0^{\pi} sen(x)dx=[-\cos(x)]_0^{\pi}=-\cos(\pi)+\cos(0)=1+1=2 \quad \rightarrow \quad A=4 \quad u^2$$

5. Calcula el área encerrada por la función $f(x)=\cos(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}$.

En el intervalo $[0,\frac{\pi}{2}]$ la función $f(x)=\cos(x)$ es $f(x)\geq 0$. Por lo tanto el área que nos solicitan coincide con la siguiente integral definida:

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx=[sen(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}=sen(\frac{\pi}{2})-sen(0)=1 \quad u^2$$

6. Calcula el área encerrada por la función $f(x)=-x^2-3$ **, el eje** OX **y las rectas verticales** $x=0$ **y** $x=4$ **.**

En el intervalo $[0,4]$ la función $f(x)=-x^2-3$ es $f(x)\leq 0$. Por lo tanto el área que nos solicitan coincide con el valor absoluto de la siguiente integral definida:

$$A=\left|\int_0^4 (-x^2-3)\,dx\right|=\left|\left[\frac{-x^3}{3}-3\text{x}\right]_0^4\right|=\left|\frac{-64}{3}-12-0\right|=\frac{100}{3}\ u^2$$