

3 CONICAS

3.1 Circunferencia

3.2 Parábola

3.3 Elipse

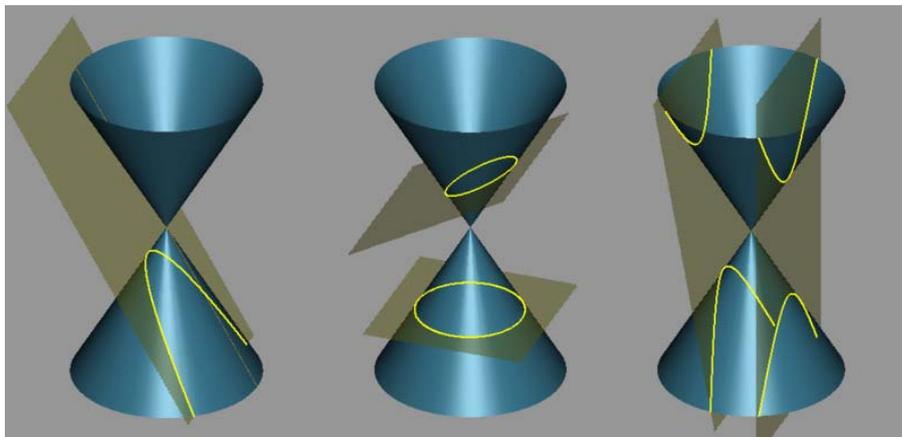
3.4 Hiperbola

Objetivos.

Se persigue que el estudiante:

- Identifique, grafique y determine los elementos de una cónica conociendo su ecuación general.
- Dado elementos de una cónica encuentre su ecuación.
- Resuelva problemas de aplicación empleando teoría de cónicas

Las cónicas o también llamadas secciones cónicas se presentan cuando un cono se interseca con planos.



No estamos interesados en los lugares geométricos de \mathbb{R}^3 , estudiaremos las curvas de intersección de estas superficies pero en \mathbb{R}^2 . Se obtendrán las ecuaciones de definiciones directamente en el plano cartesiano.

Descubriremos que la ecuación de una cónica, tiene la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + Exy + F = 0$$

Con $A \neq 0$ ó $B \neq 0$ ó ambos, y $E = 0$.

3.1. Circunferencia

3.1.1. Definición.

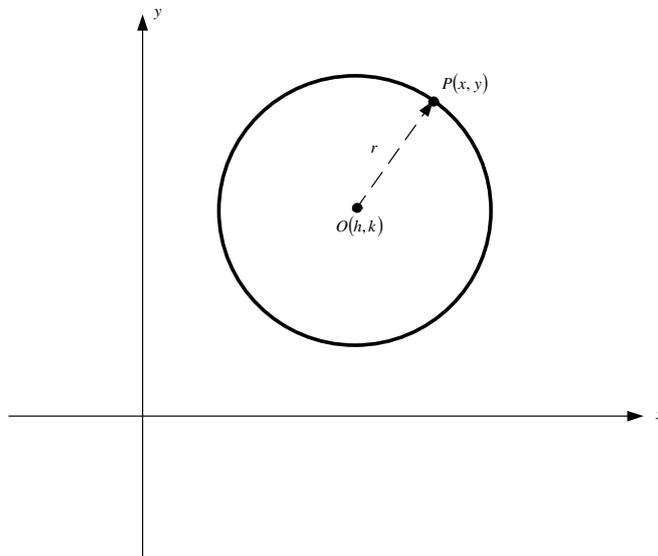
Sea O un punto del plano y sea “ r ” un número real positivo. Se define la circunferencia como el conjunto de puntos $P(x, y)$ tal que la distancia de P a O es igual a “ r ”. Es decir:

$$\text{Circunferencia} = \{P(x, y) / d(P, O) = r\}$$

Al punto “ O ” se le denomina **centro de la circunferencia** y a “ r ” se le denomina **radio de la circunferencia**.

3.1.2. Ecuación canónica de la circunferencia

Supongamos que O tiene coordenadas (h, k)



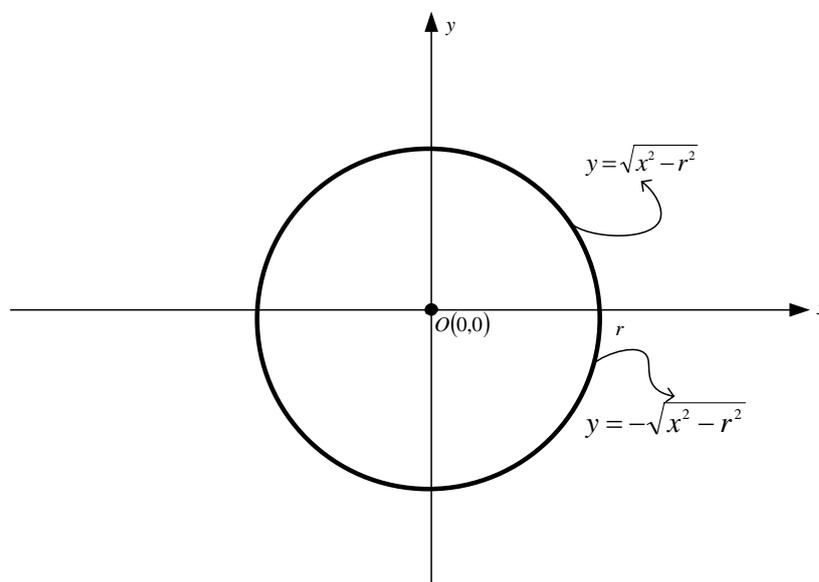
La distancia entre los puntos $P(x, y)$ de la circunferencia y el punto $C(h, k)$, la cual denotamos como “ r ”, está dada por $r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$, entonces, tenemos:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad \text{Ecuación canónica de una circunferencia. Para } r^2 > 0.$$

Un tipo especial de circunferencia es aquella que tiene por ecuación:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Es decir, una circunferencia con centro $O(0, 0)$, el origen:



Despejando y , obtenemos las ecuaciones de las semicircunferencias superior e inferior.

Ejemplo

Hallar la ecuación canónica de la circunferencia que tiene centro el punto $O(4,2)$ y radio 3

SOLUCIÓN:

Reemplazando en $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ tenemos:

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$$

La ecuación canónica pedida.

Ahora, en la ecuación canónica del ejemplo anterior $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 3^2$, al elevar al cuadrado y reducir términos semejantes se obtiene:

$$x^2 - 4x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 16 + 4 = 9$$

Se puede decir, entonces que la ecuación de una circunferencia tendrá la forma:

$$x^2 + y^2 + C'x + D'y + F' = 0$$

O también:

$$Ax^2 + Ay^2 + Cx + Dy + F = 0$$

Esta última ecuación es llamada ECUACIÓN GENERAL DE UNA CIRCUNFERENCIA.

Por tanto si nuestra intención fuese dibujar la circunferencia o descubrirle sus elementos (centro y radio) a partir de la ecuación general, deberíamos llevar la ecuación a su forma canónica completando trinomios cuadrados perfectos.

Ejemplo

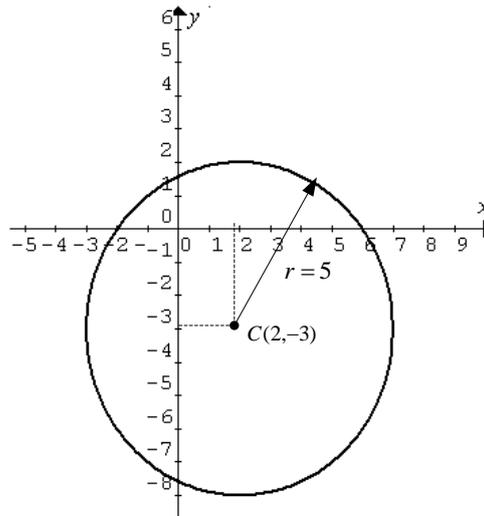
Graficar la circunferencia que tiene por ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

Solución

La ecuación general dada, la transformamos a la ecuación canónica completando cuadrados

$$\begin{aligned}(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) &= 12 + 4 + 9 \\ (x-2)^2 + (y+3)^2 &= 25\end{aligned}$$

Tenemos una circunferencia de radio $r = 5$ y centro $C(2, -3)$



No toda ecuación de la forma $Ax^2 + Ay^2 + Cx + Dy + F = 0$ representará una circunferencia.

Si en el proceso de llevarla a la forma canónica se obtiene $r^2 = 0$, es decir resulta $(x - h)^2 + (y - k)^2 = 0$, el lugar geométrico es el punto $O(h, k)$.
¿Por qué?

Si $r^2 < 0$, la ecuación no representa lugar geométrico. ¿Por qué?

Ejemplo

Hallar la ecuación canónica de la circunferencia que contiene a los puntos $(1, 2)$, $(3, 0)$ y $(3 + \sqrt{3}, 3)$

Solución:

Si los puntos pertenecen a la circunferencia deben satisfacer su ecuación. En este caso empleamos la ecuación general $x^2 + y^2 + Cx + Dy + F = 0$.

Reemplazando las coordenadas de los puntos dados:

$$\begin{cases} 1^2 + 2^2 + C'(1) + D'(2) + F' = 0 \\ 3^2 + 0^2 + C'(3) + D'(0) + F' = 0 \\ (3 + \sqrt{3})^2 + 3^2 + C'(3 + \sqrt{3}) + D'(3) + F' = 0 \end{cases}$$

Resolviendo simultáneamente el sistema:

$$\begin{cases} C' + 2D' + F' = -5 \\ 3C' + F' = -9 \\ (3 + \sqrt{3})C' + 3D' + F' = -(3 + \sqrt{3})^2 - 9 \end{cases}$$

En la segunda ecuación se obtiene $F' = -9 - 3C'$

Reemplazando en la primera:

$$\begin{aligned} C' + 2D' + F' &= -5 \\ C' + 2D' - 9 - 3C' &= -5 \\ -2C' + 2D' &= 4 \end{aligned}$$

$$D' = 2 + C'$$

Reemplazando D' y F' en la tercera ecuación:

$$\begin{aligned} (3 + \sqrt{3})C' + 3D' + F' &= -(3 + \sqrt{3})^2 - 9 \\ (3 + \sqrt{3})C' + 3(2 + C') + (-9 - 3C') &= -(3 + \sqrt{3})^2 - 9 \\ 3C' + \sqrt{3}C' + 6 + 3C' - 9 - 3C' &= -9 - 6\sqrt{3} - 3 - 9 \\ \sqrt{3}C' + 3C' &= -18 - 6\sqrt{3} \\ (\sqrt{3} + 3)C' &= -6(3 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$C' = -6$$

Entonces:

$$\begin{array}{l} D' = 2 + C' \\ = 2 - 6 \\ D' = -4 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{l} F' = -9 - 3C' \\ = -9 - 3(-6) \\ F' = 9 \end{array}$$

Por tanto, la ecuación general de la circunferencia sería:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$

Agrupando y completando cuadrados, se obtiene la ecuación canónica:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 &= 0 \\ (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) &= -9 + 9 + 4 \\ (x - 3)^2 + (y - 2)^2 &= 4 \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos 3.1

1. Grafique el lugar geométrico definido por cada una de las siguientes ecuaciones:

- a. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ b. $2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 9 = 0$
 b. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$ c. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 17 = 0$

2. Determine la ecuación de la circunferencia que contiene a los puntos $A(0,6)$, $B(1,5)$ y cuyo centro se encuentra sobre la recta definida por la ecuación $x + y = -1$.

Resp. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$

3. Determine la ecuación general de una circunferencia tangente a la recta definida por la ecuación $2x - 3y + 5 = 0$, y está centrada en el punto $(-1, -2)$
 Resp. $13x^2 + 13y^2 + 26x + 52y - 16 = 0$
4. La intersección de las rectas $L_1 : 2x - y + 3 = 0$ y $L_2 : 4x + y - 2 = 0$ es el centro de una circunferencia que es tangente a la recta $L_3 : x - y + 1 = 0$. Determine la ecuación de la circunferencia.
 Resp. $(x + \frac{1}{6})^2 + (y - \frac{8}{3})^2 = \frac{121}{72}$
5. Determine la longitud de la cuerda de la circunferencia que tiene como ecuación $x^2 + y^2 - 6x - 14y - 111 = 0$ conociendo que el punto medio de dicha cuerda tiene coordenadas $(\frac{17}{2}, \frac{7}{2})$.
 Resp. $\sqrt{506}$
6. Hallar la ecuación canónica de la circunferencia que contiene los puntos $(0,0)$, $(1,-1)$ y $(9,-1)$.
 Resp. $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 41$
7. Determine la ecuación de la circunferencia que es tangente a las rectas de ecuaciones $y = x$ y $x + y = 1$ y que contiene al punto $(2, 2)$.
 Resp. $(x - \frac{5}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{2}$

3.2. Parábola

3.2.1. Definición

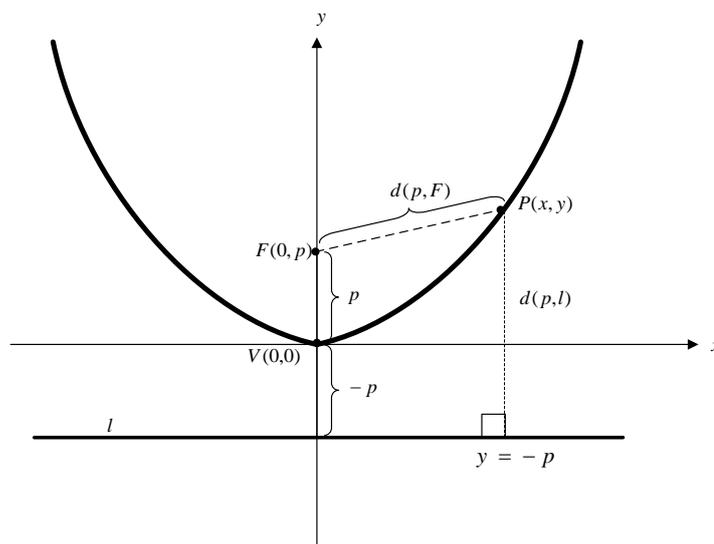
Sea l una recta y sea F un punto. La parábola se define como el conjunto de puntos $P(x, y)$ tal que su distancia al punto F es igual a su distancia a la recta l . Es decir:

$$\text{Parábola} = \{P(x, y) / d(P, F) = d(p, l)\}$$

Al punto F se le denomina **foco de la parábola** y a la recta l se le denomina **directriz de la parábola**.

3.2.2 Ecuación canónica

Supongamos que F tiene coordenadas $(0, p)$ y la recta l tiene ecuación $y = -p$ con $p > 0$. Observe la gráfica:



Observe que $d(P, F) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2}$ y que $d(P, l) = |y+p|$.

Igualando distancias y resolviendo:

$$d(P, F) = d(P, l)$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = y+p$$

$$\left(\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2}\right)^2 = (y+p)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$x^2 = 4py$$

Al punto V se le denomina **vértice de la parábola**, en este caso tiene coordenadas $(0,0)$. A la recta perpendicular a la directriz, que contiene al vértice y al foco, se le denomina **Eje Focal**. Observe que para la parábola anterior el eje focal es el eje y .

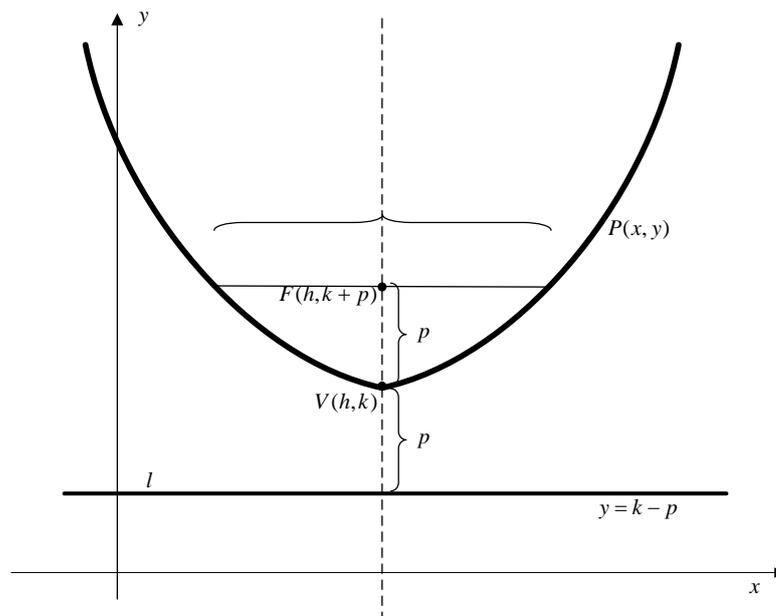
Observe además que la parábola es cóncava hacia arriba.

Al segmento de recta perpendicular al eje focal que pasa por el foco y que tiene como extremos los dos puntos de la parábola, se denomina **lado recto** y tiene una medida de $4p$. ¡Demuéstrele!

Suponga ahora que el vértice no es el origen, que tenemos $V(h,k)$, entonces su ecuación sería:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

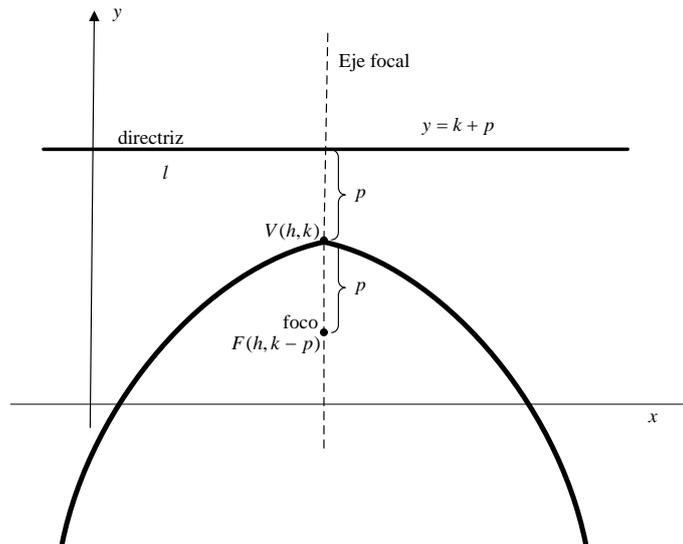
Y su gráfico sería:



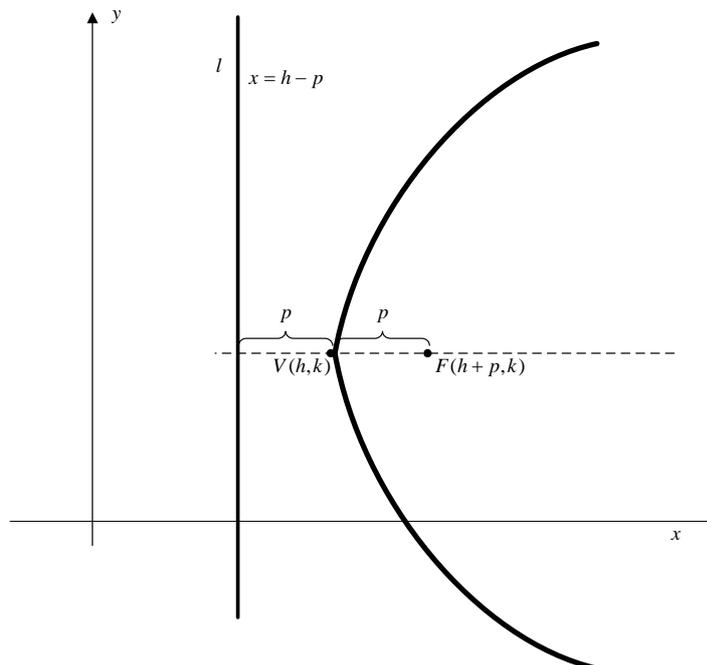
Para otros casos, tenemos:

$$(x-h)^2 = -4p(y-k)$$

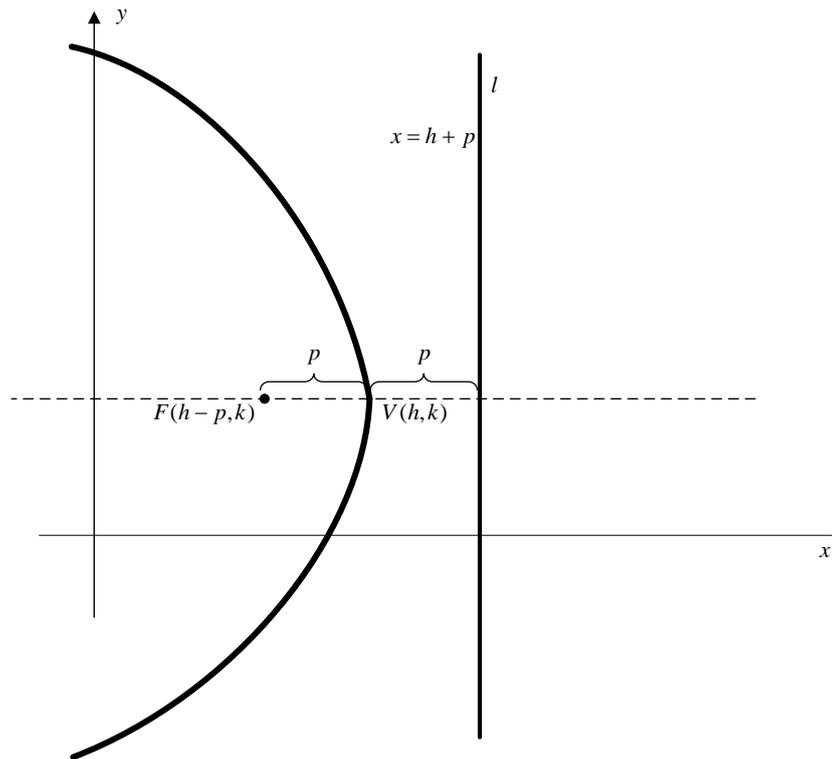
Una parábola con **eje focal vertical**, pero **cóncava hacia abajo**.



Si la parábola tiene ecuación $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, Su **eje focal** será **horizontal** y además será **cóncava hacia la derecha**:



Si la parábola tiene ecuación $(y - k)^2 = -4p(x - h)$, Su **eje focal** será **horizontal**, pero ahora será **cóncava hacia la izquierda**:



La ecuación general de esta cónica será de la forma $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$ con $A=0$ o $B=0$ pero no ambos. Es decir tendremos ecuaciones de la forma $Ax^2 + Cx + Dy + F = 0$ o de la forma $By^2 + Cx + Dy + F = 0$, según sea la dirección del eje focal. foco

O más simplemente $x^2 + C'x + D'y + F' = 0$

$y^2 + C'x + D'y + F' = 0$

Ejemplo 1

Graficar la parábola que tiene por ecuación $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$. Indique coordenadas del vértice, coordenadas del foco, ecuación de la recta directriz.

SOLUCIÓN:

Despejando la variable cuadrática para completarle cuadrados y agrupando, tenemos:

$$4x^2 - 20x = -24y - 97$$

$$\frac{4}{4} \left(x^2 - 5x + \frac{25}{4} \right) = \frac{24}{4}y - \frac{97}{4} + \frac{25}{4}$$

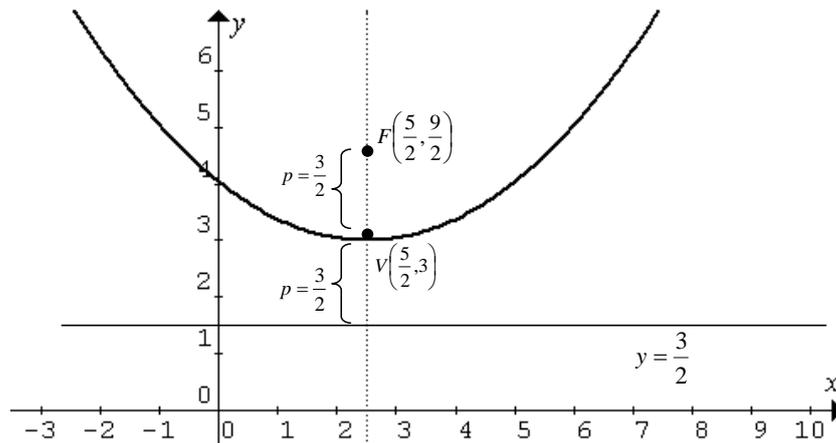
$$\left(x - \frac{5}{2} \right)^2 = 6y - 18$$

$$\left(x - \frac{5}{2} \right)^2 = 6(y - 3)$$

Se deduce entonces que:

1. La parábola tiene vértice $V\left(\frac{5}{3}, 3\right)$.
2. El eje focal es paralelo al eje y
3. La parábola es cóncava hacia arriba
4. $p = \frac{3}{2}$ debido a que $6 = 4p$.

Realizando su gráfica tenemos:

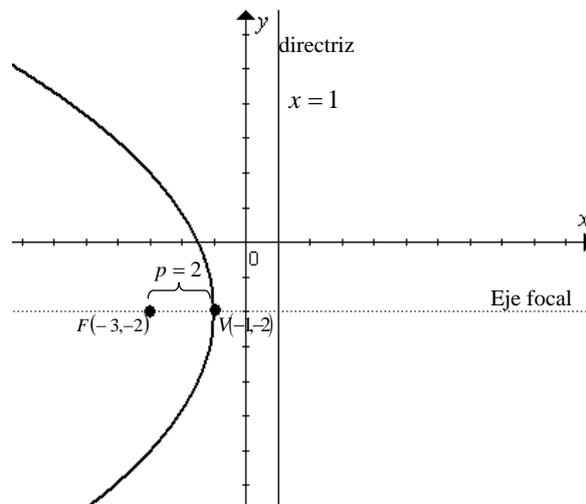


Ejemplo 2

Hallar la ecuación general de la parábola que tiene foco el punto de coordenadas $(-3, -2)$ y directriz la recta con ecuación $x = 1$.

SOLUCIÓN

En primer lugar representamos el foco y la directriz en el plano cartesiano.



Concluimos que:

1. El vértice debe tener coordenadas $(-1, -2)$

2. El eje focal es paralelo al eje x
3. La parábola es cóncava hacia la izquierda.
4. $p = 2$, distancia del vértice al foco o distancia del vértice a la directriz.
5. La ecuación de trabajo es $(y - k)^2 = -4p(x - h)$

Bien, reemplazando los valores en la ecuación de trabajo, tenemos:

$$(y + 2)^2 = -4(2)(x + 1)$$

$$y^2 + 4y + 4 = -8x - 8$$

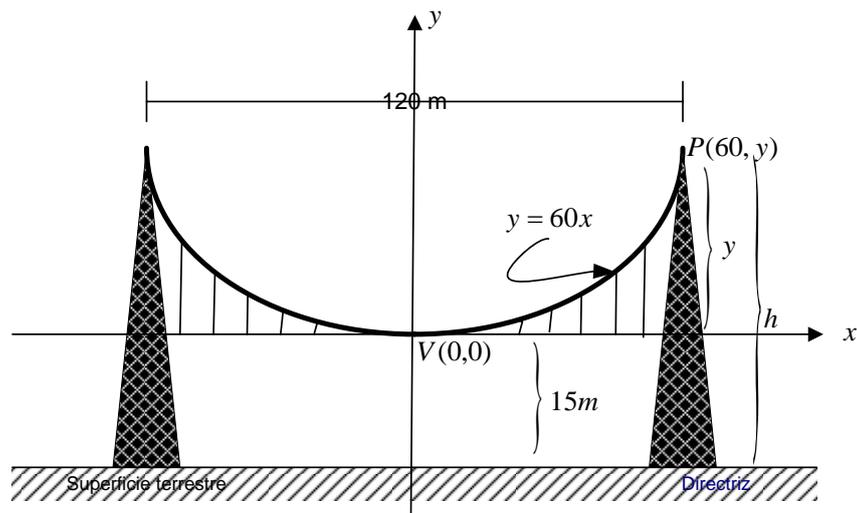
$$8x + y^2 + 4y + 12 = 0$$

Ejemplo 3

Un puente colgante de 120m de longitud tiene trayectoria parabólica sostenida por torres de igual altura si la directriz se encuentra en la superficie terrestre y el punto más bajo de cada cable está a 15m de altura de dicha superficie, hallar la altura de las torres.

SOLUCIÓN:

Primero hacemos una representación gráfica de la información proporcionada, trabajando en el plano cartesiano, es mejor poner el vértice en el origen:



La ecuación de la trayectoria sería:

$$x^2 = 4(15)y$$

$$x^2 = 60y$$

Utilizando la ecuación de la trayectoria determinamos "y":

$$60^2 = 60y$$

$$y = 60$$

Por lo tanto la altura de las torres sería:

$$h = y + p$$

$$h = 60 + 15$$

$$h = 75m$$

Ejemplo 4

Hallar la ecuación de la parábola que tiene eje focal vertical y contiene los puntos $(-1,5)$, $(3,1)$ y $(7,5)$.

SOLUCIÓN:

Ya que tiene eje focal vertical empleamos la ecuación $x^2 + Cx + Dy + F = 0$ ¿Porqué?).

Cómo los puntos pertenecen a la parábola, las coordenadas deben satisfacer su ecuación.

Reemplazando y simplificando:

$$\begin{cases} (-1)^2 + C(-1) + D(5) + F = 0 \\ (3)^2 + C(3) + D(1) + F = 0 \\ (7)^2 + C(7) + D(5) + F = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -C + 5D + F = -1 \\ 3C + D + F = -9 \\ 7C + 5D + F = -49 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema simultáneo se obtiene:

$$C = -6, D = -4 \text{ y } F = 13$$

Por tanto la ecuación buscada sería:

$$x^2 - 6x - 4y + 13 = 0$$

Ejercicios Propuestos 3.2

1. Grafique el lugar geométrico definido por cada una de las siguientes ecuaciones: (Indique todos sus elementos).

a. $x^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

b. $2y^2 - 2x - 2y + 9 = 0$

c. $y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$

d. $-x^2 - 4x - 6y + 17 = 0$

2. Determine la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta definida por $y = 1$, contiene al punto $(0,3)$ y la menor distancia entre la parábola y la directriz es igual a 2.

Resp. $x^2 = 8(y - 3)$

3. Determine la ecuación canónica de la parábola donde la recta directriz tiene la ecuación $y + 2 = 0$ y los extremos del lado recto son los puntos $A(0,2)$ y $B(8,2)$.

Resp. $(x - 4)^2 = 8y$

4. Encuentre la ecuación canónica de la parábola que tiene eje focal vertical y contiene los puntos: $(0,0)$, $(1,-1)$, $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$

Resp. $(x - \frac{7}{8})^2 = \frac{3}{4}(y + \frac{49}{48})$

5. Resuelva el problema anterior suponiendo ahora que el eje focal es horizontal.

Resp. $(y + \frac{5}{8})^2 = -\frac{1}{4}(x - \frac{25}{16})$

6. Encuentre la ecuación canónica de la parábola que tiene eje focal horizontal contiene los puntos: $(-1,-1)$, $(0,1)$, $(1,0)$

Resp. $(y - \frac{1}{6})^2 = -\frac{2}{3}(x - \frac{25}{4})$

7. Resuelva el problema anterior suponiendo ahora que el eje focal es vertical.

Resp. $(x - \frac{1}{6})^2 = -\frac{2}{3}(y - \frac{25}{24})$

3.3. Elipse

3.3.1 Definición.

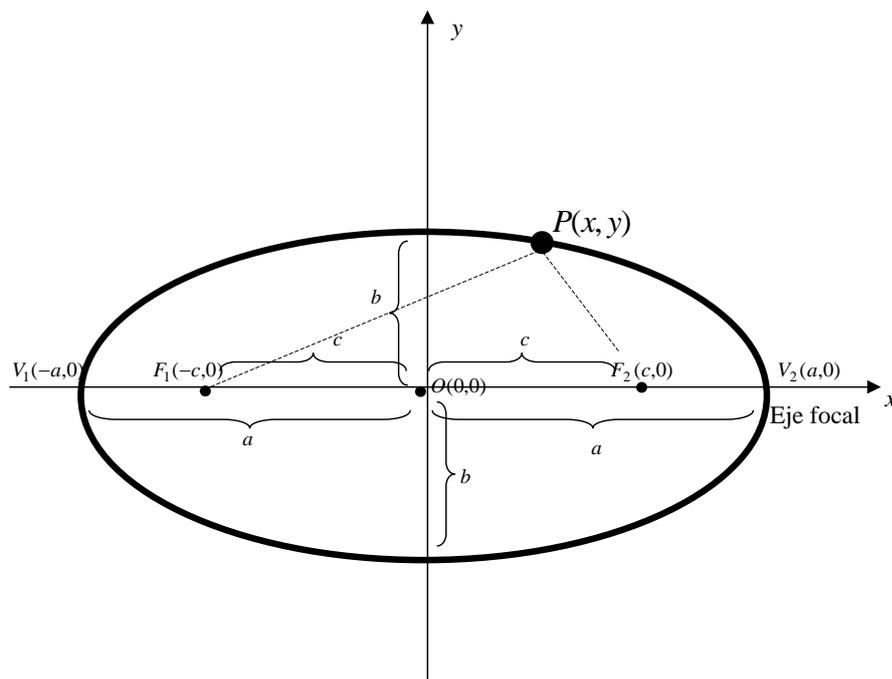
Sean F_1 y F_2 dos puntos del plano y sea a una constante positiva. La Elipse se define como el conjunto de puntos $P(x, y)$ tales que la suma de su distancia a F_1 con su distancia a F_2 es igual a $2a$. Es decir:

$$\text{Elipse} = \{P(x, y) / d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$

A F_1 y F_2 se les denomina **focos de la elipse** y “ a ” representa la medida del **semieje mayor** de la elipse.

3.3.2 Ecuación Canónica

Sean $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, observe el gráfico:



De la definición tenemos:

$$d(P, F_2) + d(P, F_1) = 2a$$

$$\sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} = 2a$$

Despejando un radical, elevando al cuadrado y reduciendo términos semejantes:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 &= \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 \\ (x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \\ x^2 - 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2 \\ 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 4a^2 + 4cx \end{aligned}$$

Dividiendo para 4, elevando al cuadrado y reduciendo términos semejantes:

$$\begin{aligned} \left(a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 &= (a^2 + cx)^2 \\ a^2[(x+c)^2 + y^2] &= a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \\ a^2[x^2 + 2cx + c^2 + y^2] &= a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \\ a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \\ a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \end{aligned}$$

Dividiendo para $a^2(a^2 - c^2)$

$$\begin{aligned} \frac{x^2(a^2 - c^2)}{a^2(a^2 - c^2)} + \frac{a^2y^2}{a^2(a^2 - c^2)} &= \frac{a^2(a^2 - c^2)}{a^2(a^2 - c^2)} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} &= 1 \end{aligned}$$

Finalmente, llamando $b^2 = a^2 - c^2$ tenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación canónica de la elipse con centro $O(0,0)$ y eje focal horizontal

“ b ” representa la longitud del **semieje menor**, Observe la gráfica anterior.

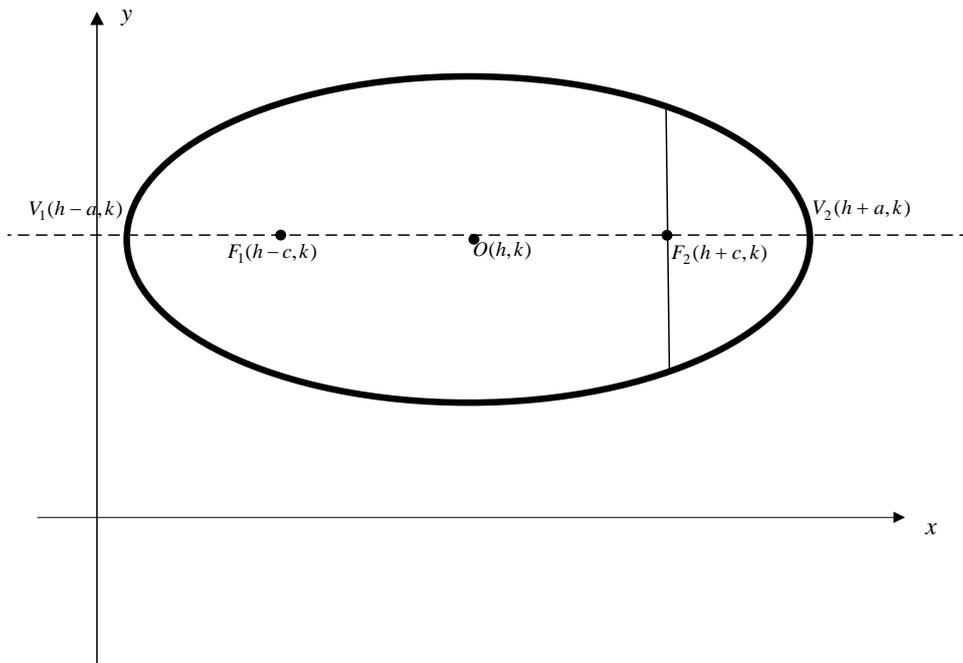
Aquí el **lado recto** tiene dimensión $\frac{2b^2}{a}$. ¡Demuéstrelo!

Para los casos generales tenemos:

Suponga que el vértice es el punto $V(h,k)$, y que el **eje focal sea horizontal** entonces su ecuación sería:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Y su gráfica sería:

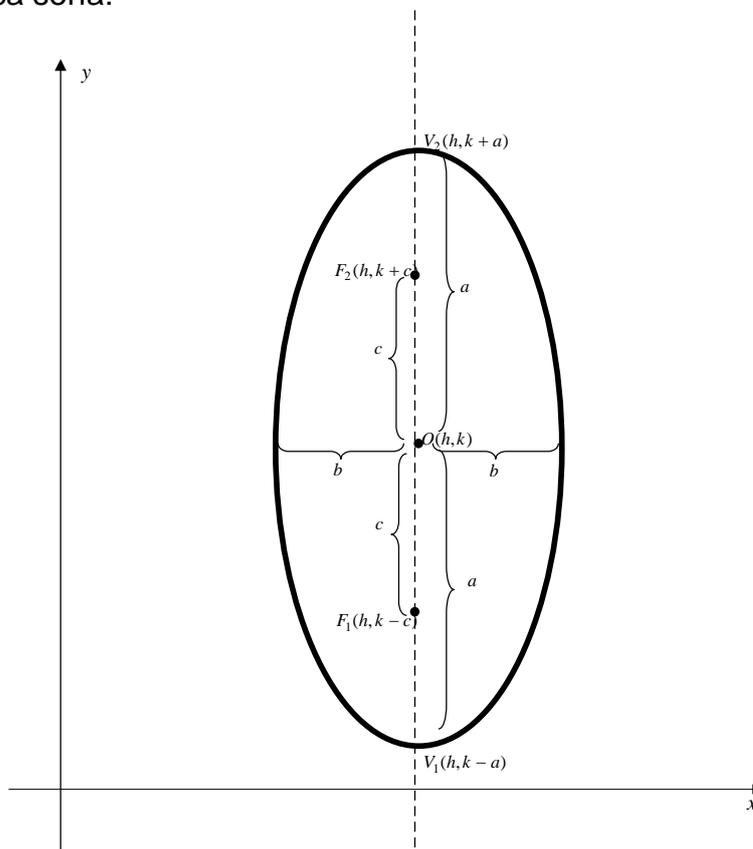


Observación: La dirección del eje focal está indicada por el término que tiene el mayor denominador, es este caso ese sería el valor de “ a^2 ”. Observe también que $a > b$.

Por lo tanto, si el **eje focal fuese vertical**, su ecuación sería:

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

Y su gráfica sería:



Ejemplo 1

Graficar la Elipse que tiene por ecuación $25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y - 156 = 0$.
Indique todos sus elementos.

Solución

La ecuación general dada, la transformamos a la ecuación canónica completando cuadrados

$$25(x^2 + 4x + 4) + 16(y^2 - 6y + 9) = 156 + 100 + 144$$

$$25(x+2)^2 + 16(y-3)^2 = 400$$

Ahora dividimos para 400

$$\frac{25(x+2)^2}{400} + \frac{16(y-3)^2}{400} = \frac{400}{400}$$

$$\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$$

La última ecuación nos indica que la elipse tiene:

1. Centro $O(-2,3)$
2. Eje **focal vertical**, debido a que el mayor denominador está sobre el término que contiene a " y " Entonces $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$
3. $b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$
4. Lo anterior nos permite calcular el valor de c .

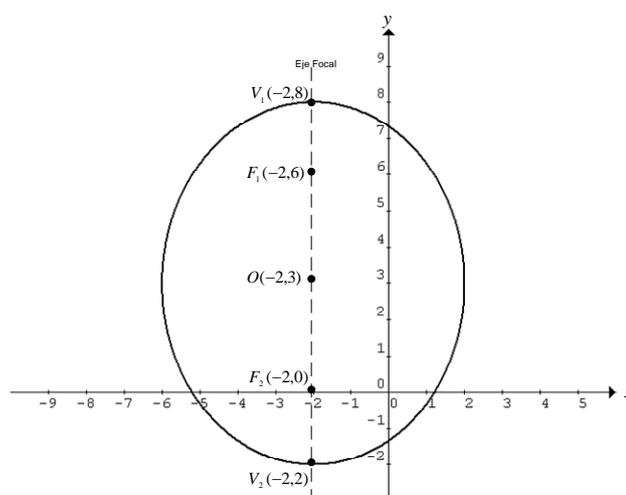
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{25 - 16}$$

$$c = \sqrt{9}$$

$$c = 3$$

Por lo tanto la gráfica sería:

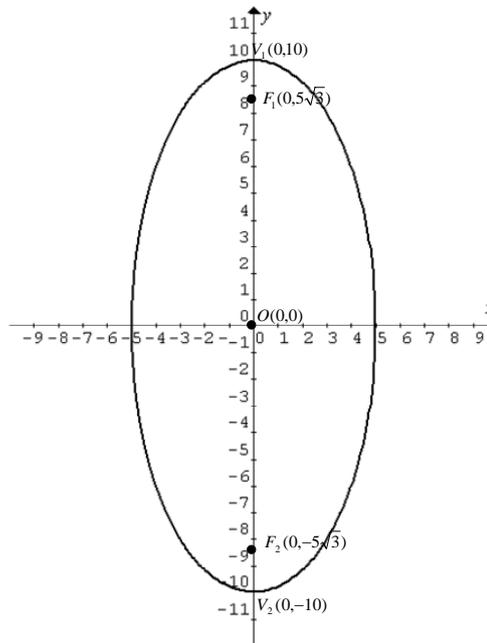


Ejemplo 2

Hallar la ecuación general de la Elipse cuyo eje mayor mide 20 unidades y los focos son los puntos de coordenadas $(0, 5\sqrt{3})$ y $(0, -5\sqrt{3})$.

SOLUCIÓN:

Primero representamos en el plano cartesiano los puntos dados.



Observamos que la elipse tiene como eje focal, el eje y, que $c = 5\sqrt{3}$. Como nos dicen que el eje mayor mide 20 unidades, entonces $a = 10$. Esto, nos permite calcular b :

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = (10)^2 - (5\sqrt{3})^2$$

$$b^2 = 100 - 75$$

$$b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$$

Finalmente la ecuación de la elipse sería:

$$\frac{y^2}{100} + \frac{x^2}{25} = 1$$

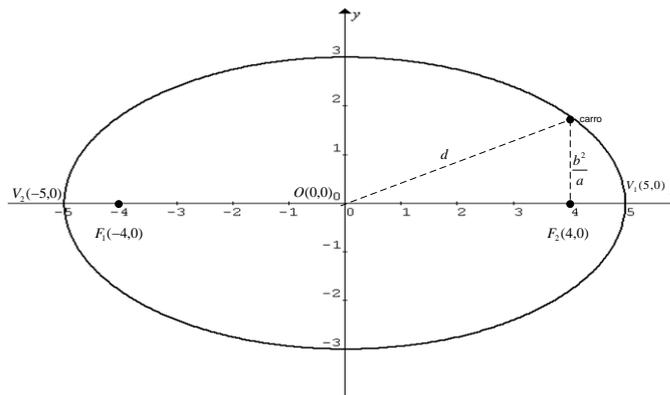
$$4x^2 + y^2 = 100$$

Ejemplo 3

Una pista de carros tiene forma de elipse, el eje mayor mide 10 km. Y el eje menor 6 km. Determine la distancia a que se encuentra un carro del centro de la pista en el momento en que pasa a la altura de uno de los focos.

Solución

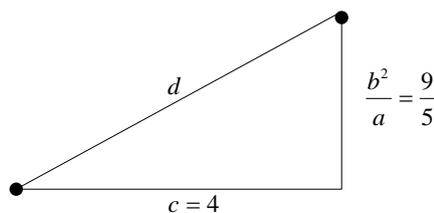
Representando en el plano cartesiano la información proporcionada, tenemos:



La ecuación de la elipse sería: $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

Como $a=5$ y $b=3$ entonces $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$
 $c = 4$

La dimensión de la altura de uno de los focos a la elipse es la mitad de la dimensión del lado recto



Empleando el teorema de Pitágoras, resulta: $d = \sqrt{4^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2}$
 $d = \frac{\sqrt{481}}{5}$

Ejercicios Propuestos 3.3

- Grafique el lugar geométrico definido por cada una de las siguientes ecuaciones: (Indique todos sus elementos).
 - $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$
 - $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y - 11 = 0$
- Si los focos de una elipse son los puntos $F_1 = (-4,3)$, $F_2 = (2,3)$ y el perímetro del triángulo cuyos vértices son los focos y un punto de la elipse, es igual a 16, determine la ecuación de la elipse.
 Resp. $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$
- El arco de un puente es semiéptico, con eje mayor horizontal. La base tiene 30 m. y su parte más alta con respecto a la tierra es 10 m. Determine la altura del arco a 6 m. del centro de la base.
 Resp. $h = 2\sqrt{21} \text{ m}$
- Determine los valores de k para que la ecuación $x^2 + 2y^2 + 2x + 12y = k$ describa una elipse.
 Resp. $k > -19$

5. La Tierra gira alrededor del Sol siguiendo una órbita elíptica con excentricidad igual a 0.0172 y eje mayor de 299×10^6 Km. Si el sol está ubicado en uno de los focos de la elipse, determine la mayor y la menor distancia entre la Tierra y el Sol. (NOTA: excentricidad $e = \frac{c}{a}$)

Resp. $d_{MAYOR} = 152.0714$ Km. $d_{MENOR} = 146.9286$ Km.

3.4. Hipérbola

3.4.1 Definición.

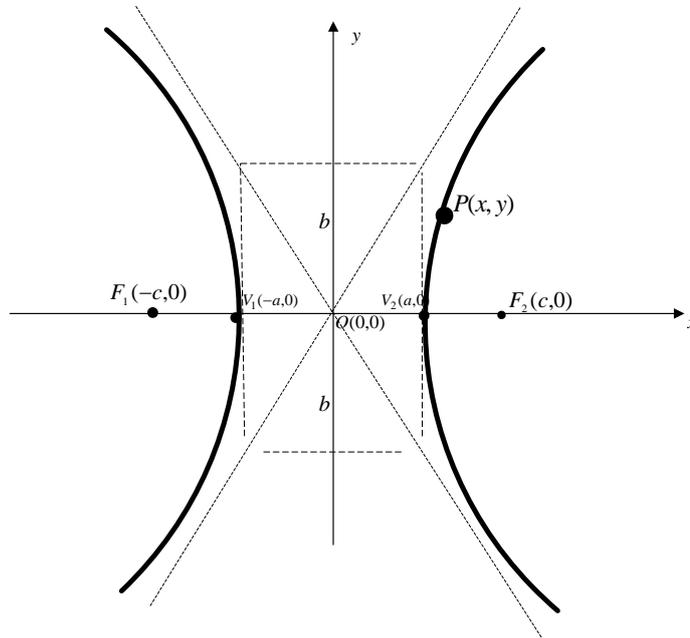
Sean F_1 y F_2 dos puntos del plano y sea a una constante positiva. La Hipérbola se define como el conjunto de puntos $P(x, y)$ del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de su distancia a F_1 con su distancia a F_2 es igual a $2a$. Es decir:

$$\text{Elipse} = \{P(x, y) / |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$$

A F_1 y F_2 se les denomina **focos de la hipérbola**.

3.4.2 Ecuación Canónica

Sean $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, observe el gráfico:



De la definición tenemos:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = 2a$$

Despejando un radical, elevando al cuadrado y reduciendo términos semejantes:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 &= \left(2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \\ (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\ x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\ 4cx - 4a^2 &= 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Dividiendo para 4, elevando al cuadrado y reduciendo términos semejantes:

$$\begin{aligned} (cx - a^2)^2 &= \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \\ c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2[(x-c)^2 + y^2] \\ c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2] \\ c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \\ c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4 \\ (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \end{aligned}$$

Dividiendo para $a^2(c^2 - a^2)$

$$\begin{aligned} \frac{x^2(c^2 - a^2)}{a^2(c^2 - a^2)} - \frac{a^2y^2}{(c^2 - a^2)} &= \frac{a^2(c^2 - a^2)}{a^2(c^2 - a^2)} \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} &= 1 \end{aligned}$$

Finalmente, llamando $b^2 = c^2 - a^2$ tenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Ecuación canónica de la hipérbola con centro } O(0,0) \\ \text{y eje focal horizontal}$$

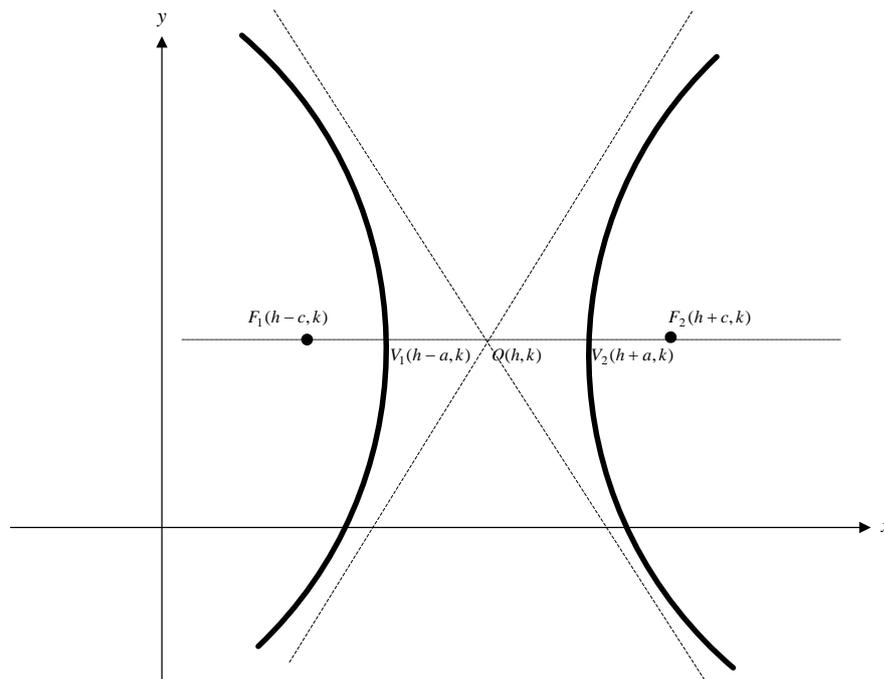
Aquí “ b ” representa la longitud del segmento (Observe la gráfica anterior) llamado **semieje conjugado**.

Para los casos generales tenemos:

Suponga que el vértice es el punto $V(h,k)$, y que el eje focal sea horizontal entonces su ecuación sería:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Y su gráfica sería:



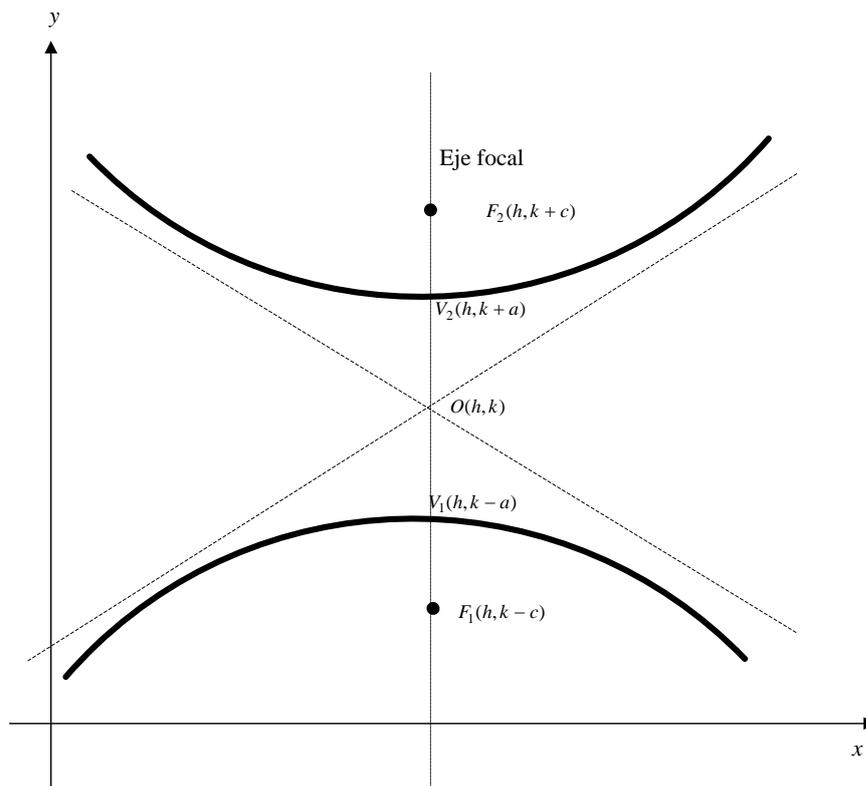
Asintota

OBSERVACIÓN: La dirección del eje focal esta indicada por el término positivo y además sobre este término estará “ a^2 ”.

Por lo tanto, si el eje **focal fuese vertical**, su ecuación sería:

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

Y su gráfica sería:



Ejemplo 1

Graficar la hipérbola que tiene por ecuación $x^2 - 3y^2 + 2x + 6y - 1 = 0$. Indique coordenadas de los vértices, coordenadas de los focos y ecuaciones de las asíntotas.

SOLUCIÓN:

Agrupando y completando cuadrados para darle la forma canónica a la ecuación:

$$\begin{aligned}(x^2 + 2x + 1) - 3(y^2 - 2y + 1) &= 1 + 1 - 3 \\(x+1)^2 - 3(y-1)^2 &= -1 \\3(y-1)^2 - (x+1)^2 &= 1 \\ \frac{(y-1)^2}{\frac{1}{3}} - \frac{(x+1)^2}{1} &= 1\end{aligned}$$

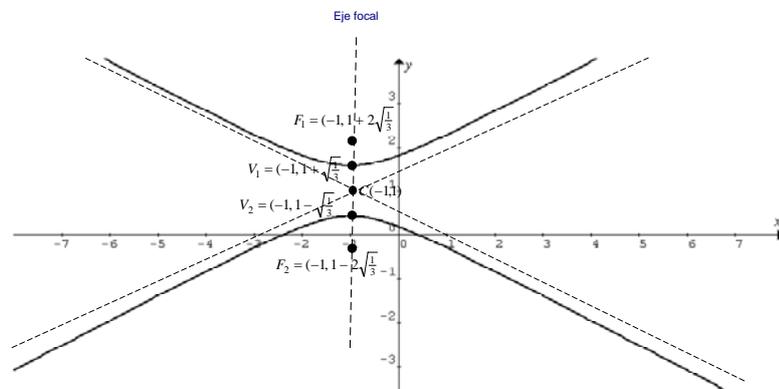
Se concluye que:

1. La hipérbola tiene eje focal vertical, debido a que el término positivo es el que contiene a "y".
2. $a^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{1}{3}}$
3. $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$

El valor de c se lo calcula empleando la fórmula $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, es decir:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \sqrt{\frac{4}{3}} = 2\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Por lo tanto su gráfica sería:



Las ecuaciones de las asíntotas se determinan igualando a cero la ecuación canónica:

$$\begin{aligned}3(y-1)^2 - (x+1)^2 &= 0 \\3(y-1)^2 &= (x+1)^2 \\ \sqrt{3}(y-1) &= \sqrt{(x+1)^2} \\ \sqrt{3}\sqrt{(y-1)^2} &= \pm(x+1) \\ y-1 &= \frac{\pm(x+1)}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

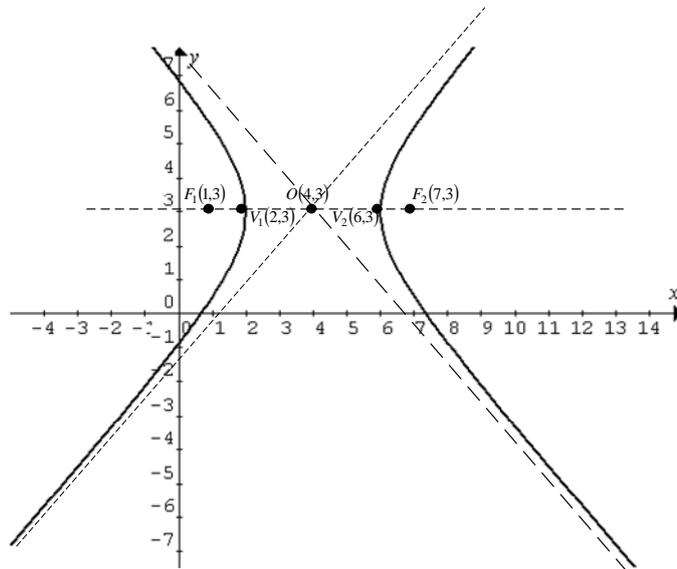
$$y = 1 \pm \frac{(x+1)}{\sqrt{3}}$$

Ejemplo 2

Hallar la ecuación general de la cónica que tiene por focos los puntos $(1,3)$ y $(7,3)$; y por vértices los puntos $(2,3)$ y $(6,3)$

SOLUCIÓN:

Representando los focos y vértices en el plano cartesiano, sacamos las conclusiones necesarias para plantear la ecuación buscada



Del gráfico se observa que:

1. El eje focal debe ser horizontal.
2. El centro tiene coordenadas $O(4,3)$.
3. $a = 2$ y $c = 3$

El valor de b se calcula empleando la fórmula $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, es decir:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

Ahora hallando la ecuación de la hipérbola, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} &= 1 \\ 5(x^2 - 8x + 16) - 4(y^2 - 6y + 9) &= 20 \\ 5x^2 - 40x + 80 - 4y^2 + 24y - 36 - 20 &= 0 \\ 5x^2 - 4y^2 - 40x + 24y + 24 &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos 3.4

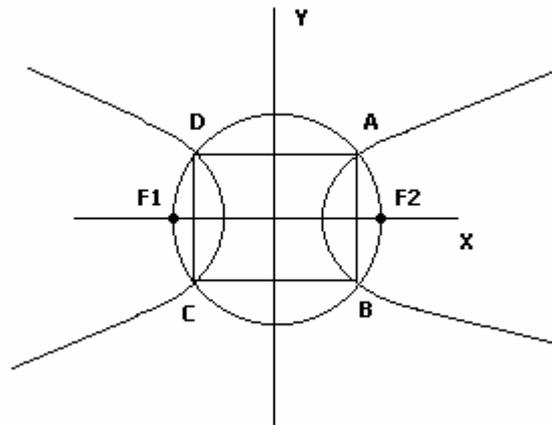
1. Grafique el lugar geométrico definido por cada una de las siguientes ecuaciones: (Indique todos sus elementos).

- a. $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 9 = 0$
- b. $9x^2 - 4y^2 + 18x - 16y - 9 = 0$

2. Determine la ecuación de las asíntotas de la hipérbola definida por $4x^2 - 3y^2 + 8x + 16 = 0$.

Resp. $x + 1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} y$

3. Determine la ecuación de la recta que contiene al centro de la hipérbola cuya ecuación es $4x^2 - y^2 + 32x - 8y + 49 = 0$ y es perpendicular a la recta definida por la ecuación $2x - 9y + 3 = 0$.
Resp. $9x + 2y + 44 = 0$
4. Determine la distancia entre los vértices de la cónica con ecuación $-9x^2 + 18x + 4y^2 + 24y = 9$
Resp. 6
5. Si una hipérbola, una circunferencia de radio 5 y el rectángulo ABCD de lado $AB = 6$, están ubicados en el plano cartesiano como se muestra en la figura, determine la distancia entre los vértices de la hipérbola.



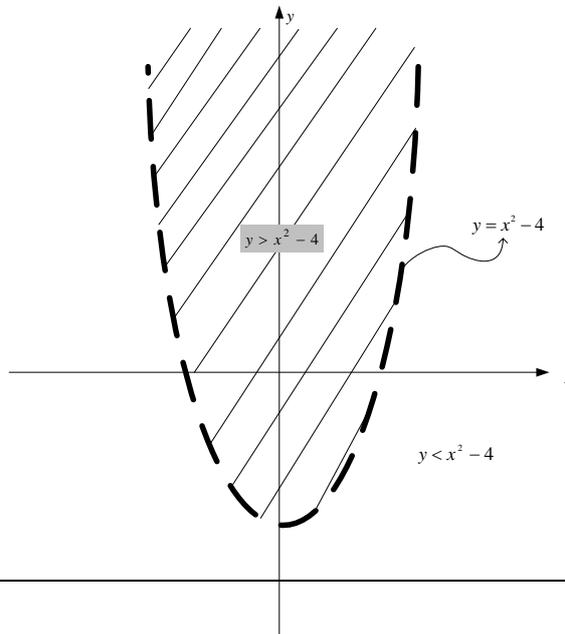
Resp. $d = 2\sqrt{10}$

Otras regiones del plano, importantes a considerar, serían aquellas que están definidas por **inecuaciones**.

Ejemplo 1

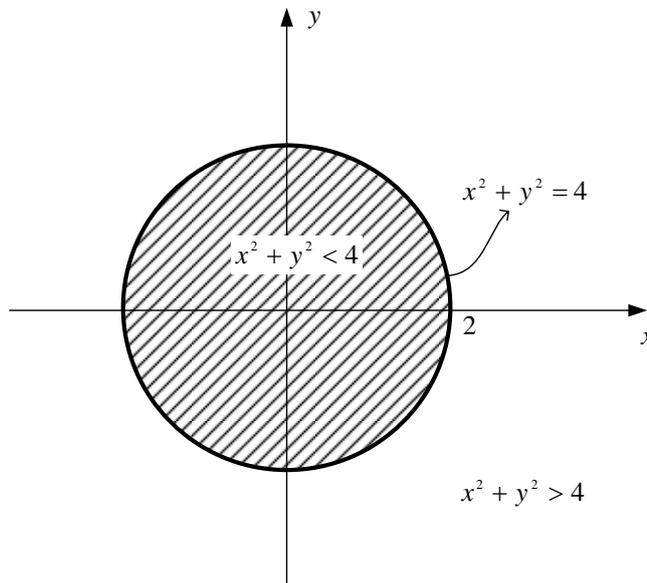
Grafique la región del plano $R = \{(x, y) / y > x^2 - 4\}$

SOLUCIÓN:



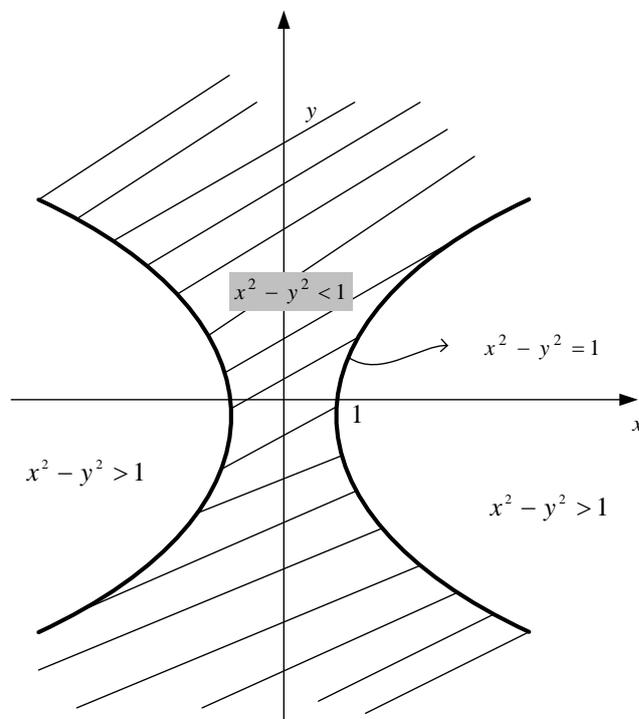
Ejemplo 2

Grafique la región del plano $R = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 4\}$



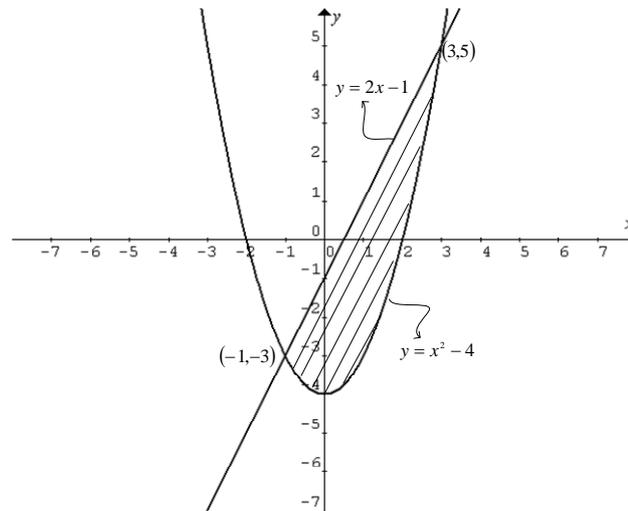
Ejemplo 3

Grafique la región del plano $R = \{(x, y) / x^2 - y^2 \leq 1\}$

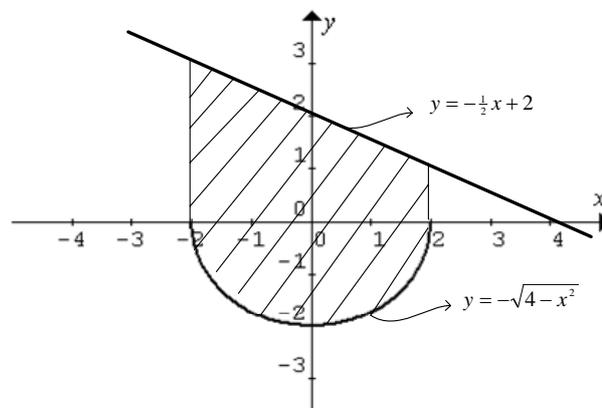


Ejemplo 4

Grafique la región del plano $R = \{(x, y) / x^2 - 4 \leq y \leq 2x - 1\}$

**Ejemplo 5**

Grafique la región del plano $R = \{(x, y) / -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq -\frac{1}{2}x + 2\}$



Ejercicios Propuestos 3.5

1. Si $p(x, y) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, grafique $Ap(x, y)$.

2. Grafique las regiones en el plano definidas por:

1. $3x^2 + 5y^2 \leq 9$	3. $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} < 1$
2. $x^2 + y^2 \geq 16$	4. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} \geq -1$

3. Grafique en el plano el conjunto solución de los siguientes sistemas:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$	2) $\begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$
------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------

Misceláneos

1. Grafique el lugar geométrico definido por cada una de las siguientes ecuaciones: (indique vértices, focos, centros asíntotas)

1. $y^2 + 4y - 6x + 22 = 0$	8. $(y - 1)^2 = 2x + 4$
2. $3x^2 - 5y^2 + 6x + 10y = 32$	9. $x^2 - 4x - 4y = 0$
3. $x^2 + y^2 - 12x - 12y + 36 = 0$	10. $x^2 - 4x + y^2 - 16y + 4 = 0$
4. $x^2 + 3y^2 + 6x + 6 = 0$	11. $25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y - 156 = 0$
5. $x^2 + y^2 + 4x - 3y + 9 = 0$	12. $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$
6. $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$	13. $4x^2 - 3y^2 + 8x + 16 = 0$
7. $4x^2 + 9y^2 - 8x = 32$	

2. Califique como Verdadera o falsa cada una de las proposiciones. Justifique formalmente su respuesta.

a. La ecuación $x^2 + y^2 + ax + by = c$ representa una circunferencia para todos los números reales diferentes de cero a,b,c.

b. La distancia entre los focos de la gráfica de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es $2\sqrt{a^2 - b^2}$

c. La ecuación $x^2 + y^2 - 2kx + 4 = 0$ describe una circunferencia si y sólo si $k \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

d. El vértice de una parábola es el foco de la otra parábola y viceversa, si la ecuación de una de ellas es $y^2 - 2y - 4x + 1 = 0$, entonces la ecuación de la otra parábola es $y^2 + 2y + 2x - 4 = 0$

e. La cónica de ecuación $y = x^2 + 2x - 1$, tiene su foco en $(1, 0)$.

f. Sea la parábola P , cuya ecuación es $P: 2y^2 - 3y + 5x + 2 = 0$, su foco tiene por coordenadas $F_0\left(-\frac{107}{40}, \frac{3}{4}\right)$

g. Sea la ecuación $Ax^2 - 2y^2 + 3x - 2y = 0$ con $\text{Re} = \mathbb{R}; \forall A > 0$, la ecuación describe una hipérbola.

h.

3. Determine la ecuación de la circunferencia que tiene como centro el vértice de la parábola que tiene por ecuación $x + 3y^2 - y = 0$, y contiene al foco de la misma.

$$\text{Resp. } \left(x - \frac{1}{12}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{144}$$

4. Una circunferencia tiene por ecuación $x^2 + (y - 2)^2 = 1$. La recta de ecuación $y = kx$ donde $k \in \mathbb{R}$, es tangente a la circunferencia. Halle todos los valores posibles de k .

Resp. $k = \pm\sqrt{3}$

5. Determine la ecuación del conjunto de puntos $P(x, y)$ tales que la suma de la distancia de P a los puntos $(-4, 0)$ y $(4, 0)$ es 14.

Resp. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{33} = 1$

6. Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que la distancia al punto $(1, -3)$ es dos veces la distancia a la recta definida por la ecuación $x - 4 = 0$.

Resp. $\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{12} = 1$

7. Un avión sigue una trayectoria tal que su distancia a una estación de radar situada en el punto $(2, 0)$ es igual a un tercio de su distancia a una carretera que sigue el trayecto de la recta definida por $x = -2$. Determine la ecuación de la trayectoria que sigue el avión.

Resp. $\frac{(x-\frac{5}{2})^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

8. Determine la ecuación del lugar geométrico compuesto de puntos $P(x, y)$ que cumplen con la condición de que su distancia al eje 'y' es el doble que su distancia al punto $(2, -3)$.

Resp. $3x^2 + 4y^2 - 16x + 24y + 52 = 0$

9. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $(2, -2)$ es siempre igual a un tercio de su distancia al punto $(4, 1)$. Determine la ecuación del lugar geométrico,

Resp. $8x^2 + 8y^2 - 28x + 38y + 55 = 0$

10. Determine la ecuación general del lugar geométrico definido por el conjunto de puntos (x, y) ubicados en el plano tales que la distancia al punto $(-1, -2)$ es el doble de la distancia a la recta definida por la ecuación $x - 3 = 0$.

Resp. $3x^2 - y^2 - 26x - 4y + 31 = 0$

11. Determine la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la distancia a la recta $x + 3 = 0$ es siempre dos unidades mayor que su distancia al punto $(1, 1)$.

Resp. $y^2 - 2y - 4x + 1 = 0$

12. Sea $p(x, y) : \begin{cases} x^2 + 4y^2 - 25 = 0 \\ 2x^2 - 2y^2 - 5 = 0 \end{cases}$ hallar $Ap(x, y)$.

Resp. $Ap(x, y) = \left\{ \left(\sqrt{7}, \frac{3}{2}\sqrt{2} \right), \left(\sqrt{7}, -\frac{3}{2}\sqrt{2} \right), \left(-\sqrt{7}, \frac{3}{2}\sqrt{2} \right), \left(-\sqrt{7}, -\frac{3}{2}\sqrt{2} \right) \right\}$

13. Hallar los valores de 'b' para los cuales el sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x + b \end{cases}$ tiene solución única.

Resp. $b = \pm 2\sqrt{2}$

14. Sea el sistema $\begin{cases} y^2 - 8y - a_1x + 3a_1 + 16 = 0 \\ y^2 - 8y - a_2x - 2a_2 + 16 = 0 \end{cases}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$. Encuentre los valores de

a_1, a_2 para que el sistema tenga solución en \mathbb{R}^2 .

Resp. $a_1 > a_2 > 0$

15. Encontrar el conjunto solución de los siguientes sistemas (realice las respectivas gráficas)

1. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$	3. $\begin{cases} yx^2 = 20 \\ y = 9 - x^2 \end{cases}$
------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - 6y = 9 \end{cases}$	4. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$
---------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------

Resp. 1. $Ap(x, y) = \{(3,9), (-1,1)\}$

2. $Ap(x, y) = \{\sqrt{21}, 2\}, \{-\sqrt{21}, 2\}\}$

3. $Ap(x, y) = \{(2,5), (-2,5), (\sqrt{5}, 4), (-\sqrt{5}, 4)\}$

4. $Ap(x, y) = \{(2\sqrt{2}, 2), (2\sqrt{2}, -2), (-2\sqrt{2}, 2), (-2\sqrt{2}, -2)\}$

16. Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $(-1,6)$ y es tangente al lugar geométrico que tiene por ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$.

Resp. $2x - 3y + 20 = 0$

17. Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente $-\frac{3}{2}$ y es tangente al lugar geométrico que tiene por ecuación $4x^2 + 4y^2 + 8x + 4y - 47 = 0$.

Resp. $y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$ o $y = -\frac{3}{2}x - \frac{17}{2}$

18. Hallar la ecuación de la recta que es paralela a la recta que tiene por ecuación $x + 4y + 31 = 0$ y es tangente al lugar geométrico que tiene por ecuación $x^2 + y^2 + 6x - 8 = 0$.

Resp. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$ o $y = -\frac{1}{4}x - 5$

19. Determine la ecuación de la recta l que contiene al centro de la elipse de ecuación $4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 4 = 0$ y contiene al foco de la parábola de ecuación $x^2 - 6x - 4y + 5 = 0$.

Resp. $x + 2y - 3 = 0$

20. Determine la ecuación de la parábola que es cóncava hacia arriba y contiene tres de los vértices de la elipse cuya ecuación es $9x^2 + 4y^2 = 36$.

Resp. $x^2 = -\frac{4}{3}(y - 3)$

21. Determine el valor de la distancia mínima entre la circunferencia C y la recta L , si sus ecuaciones son respectivamente $C: x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ y $L: x - 2y - 6 = 0$.

Resp. $d = \frac{11}{\sqrt{5}} - 1$

22. Dadas una circunferencia C y una elipse E que son concéntricas de las cuales se conoce la ecuación de la elipse $E: 9x^2 + 16y^2 + 18x - 64y - 62 = 0$ y que C es tangente al eje x , determine la ecuación de C .

Resp. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 22$

23. Demostrar que la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, en el punto (x_1, y_1) perteneciente a la circunferencia es: $x_1x + y_1y = r^2$.
-