1 | INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA

Se ha preguntado alguna vez…
¿cuál es el origen del estudio de los ángulos y de los triángulos?

¡Hagamos un poco de Historia!

En sus orígenes prácticos los babilonios y los egipcios utilizaban los ángulos y los triángulos para efectuar medidas en la agricultura y en la construcción de edificios; con el estudio de ellos, también se predecían las rutas y posiciones de los cuerpos celestes, la exactitud en la navegación y el cálculo del tiempo y los calendarios. Todas estas relaciones entre los lados y los ángulos de triángulos para medir distancias y extensiones de terreno por triangulación son estudiadas por la trigonometría la cual, etimológicamente, significa Tri (Tρι) tres, gono (γωνο) ángulo, metría (μετρ'ια) medida, es decir, "medida de tres ángulos".

"Los babilonios determinaron aproximaciones de medidas de ángulos o de longitudes de los lados de los triángulos rectángulos. Varias tablas grabadas sobre arcilla lo testimonian. Por ejemplo, una tablilla babilonia escrita en cuneiforme, denominada Plimpton 322 ***(en torno al 1900 a. C.)*** *muestra quince ternas pitagóricas y una columna de números que puede ser interpretada como una tabla de funciones trigonométricas (Figura1); sin embargo, existen varios debates sobre si, en realidad, se trata de una tabla trigonométrica.*

Figura 1. Tablilla babilonia escrita en cuneiforme

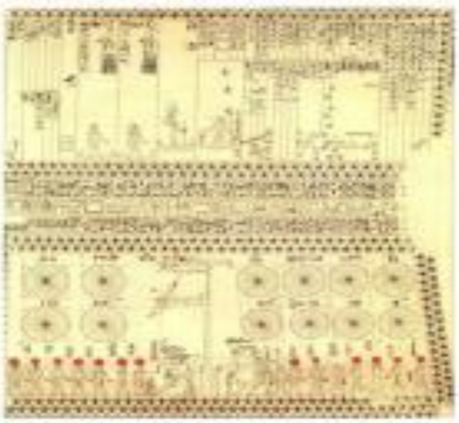


Figura 2. División de 360° de la eclíptica en 36 secciones de 10° cada una.

Los egipcios dividieron a los 360 grados de la eclíptica en 36 secciones de 10 grados cada uno. (Figura 2). Esta división era 2300 años a. C. cada sección de diez grados (llamado decano de la palabra griega diez) contenía una constelación de estrellas, alineadas a lo largo de la eclíptica.
Dado que la Tierra realiza una rotación completa en 24 horas, las estrellas en un nuevo decanato se levantarán sobre el horizonte más o menos cada 40 minutos. El sistema de decanos se utilizó para determinar las horas de la noche y las estaciones".[1]

[1] El contenido de este apartado y la figura 1y2, se obtuvieron de:
https://www.sutori.com/story/historia-de-la-trigonometria-y-la-medicion-de-angulos--x2eV7wdjMVR8ByAS3oB7Eaxc

TEMA 1. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

- **Identidad**

Se llama identidad al enunciado de igualdad que es válido para todos los valores de la variable para los cuales las funciones involucradas en el enunciado están definidas.
Por ejemplo: la ecuación $(x+2)(x-2) = x^2 - 4$ es válida para todo valor de x, por tanto es una identidad.

- **Identidad Trigonométrica**

Una expresión trigonométrica es una identidad trigonométrica. Las identidades trigonométricas se clasifican, de acuerdo a la forma en que han sido deducidas, en tres grupos que son: ***funciones recíprocas, por cociente y relaciones pitagóricas,*** estas se deducen de las seis funciones trigonométricas para desarrollar ocho relaciones fundamentales.

- **Funciones Recíprocas**

Dos funciones son recíprocas cuando su producto es igual a la unidad, es decir.

(1) $sen\theta . csc\theta = 1$

(2) $cos\theta . sec\theta = 1$

(3) $tan\theta . cot\theta = 1$

<u>Demostración:</u>

Tomando como referencia un triángulo rectángulo en el plano cartesiano, como muestra la Figura 3, con catetos de lado **x,y** e hipotenusa **r**.

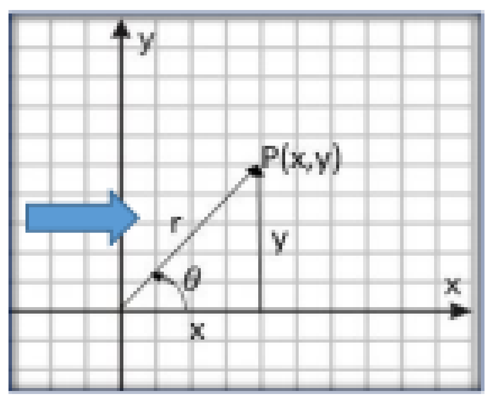


Figura 3. Ángulo en el primer cuadrante

Consideremos la primera función recíproca y la definición de las funciones trigonométricas. Para demostrarla debemos recordar que:

$$sen\theta = \frac{y}{r} = \frac{lado\ opuesto}{hipotenusa}; \quad cos\theta = \frac{r}{y} = \frac{hipotenusa}{lado\ opuesto}$$

Si reemplazamos el $sen\theta.csc\theta$ tenemos que:

$$sen\theta.csc\theta = \frac{y}{r}\cdot\frac{r}{y}$$

Simplificando,

$$sen\theta.csc\theta = \frac{\cancel{y}}{\cancel{r}}\cdot\frac{\cancel{r}}{\cancel{y}} = 1$$

Por lo tanto queda demostrado que:

$$sen\theta.csc\theta = 1$$

Ahora, le exhortamos a que haga sus demostraciones de las otras dos funciones recíprocas. **¡Ánimo!** Guíese del procedimiento anterior.

Demuestre que $\cos\theta.\sec\theta = 1$ **Aquí↓**	*Demuestre que $\tan\theta.\cot\theta = 1$* **Aquí↓**

Despejando cada una de las relaciones obtenemos:

De $sen\theta . csc\theta = 1$ se obtiene $sen\theta = \frac{1}{csc\theta}$, $csc\theta = \frac{1}{sen\theta}$

De $cos\theta . sec\theta = 1$ se obtiene $cos\theta = \frac{1}{sec\theta}$, $sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$

De $tan\theta . cot\theta = 1$ se obtiene $tan\theta = \frac{1}{cot\theta}$, $cot\theta = \frac{1}{tan\theta}$

- **Relaciones por Cociente**

Estas se deducen directamente de las definiciones de las razones trigonométricas:

(4) $tan\,\theta = \frac{sen\,\theta}{cos\,\theta}$ (5) $cot\,\theta = \frac{cos\,\theta}{sen\,\theta}$

<u>Demostración:</u> Usando la figura 3 y la definición de las funciones trigonométricas, tenemos:

Reemplazando,

$$\frac{sen\,\theta}{cos\,\theta} = \frac{y}{r} \div \frac{x}{r}$$

Simplificando,

$$= \frac{y}{\cancel{r}} \cdot \frac{\cancel{r}}{x}$$

$$= \frac{y}{x}$$

Por definición, según la figura 3 $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{lado\ opuesto}{lado\ adyacente}$

Ahora, le exhortamos a que haga la siguiente demostración. **¡Ánimo!**

Demuestre que $cot\,\theta = \frac{cos\,\theta}{sen\,\theta}$ **aquí↓**

- **Relaciones Pitagóricas**

Recordando el Teorema de Pitágoras $x^2 + y^2 = r^2$ (según la figura 3) y la definición de las funciones trigonométricas se tiene:

Si se dividen en ambos miembros de la igualdad por r^2, obtenemos:

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \left(\frac{r}{r}\right)^2$$

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \text{ (simplificando)}$$

$$\boldsymbol{sen^2\theta + cos^2\theta = 1} \text{ (definición de } \boldsymbol{sen\theta} \text{ y } \boldsymbol{cos\theta}\text{)}$$

En forma similar se obtienen las otras dos identidades pitagóricas.

(6) $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$

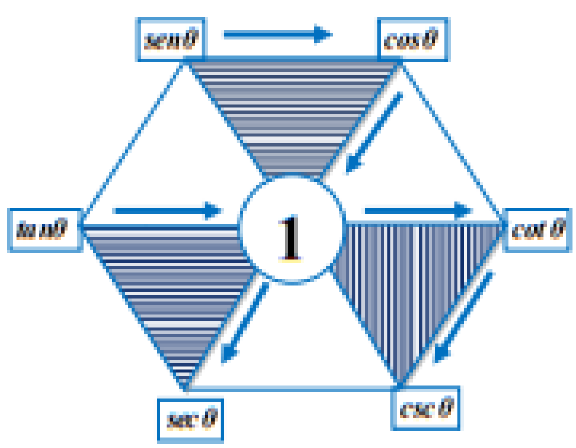
(7) $1 + tan^2\theta = sec^2\theta$

(8) $1 + cot^2\theta = csc^2\theta$

Las ocho relaciones fundamentales son identidades y se pueden usar para deducir otras menos fundamentales.

A continuación, se presenta el hexágono de las identidades, el cual te ayudará para recordar las 8 identidades trigonométricas.

HÉXAGONO DE LAS IDENTIDADES



1. Las dos funciones en la diagonal son recíprocas:

$$sen\theta = \frac{1}{csc\,\theta} \quad \Rightarrow \quad sen\,\theta\ .\ csc\,\theta = 1$$

$$cos\theta = \frac{1}{sec\,\theta} \quad \Rightarrow \quad cos\,\theta\ .\ sec\theta = 1$$

$$tan\theta = \frac{1}{cot\,\theta} \quad \Rightarrow \quad tan\theta\ .\ cot\,\theta = 1$$

2. Cualquier función es igual al producto de las funciones que se encuentran en los vértices adyacentes:

$$tan\,\theta = \frac{sen\,\theta}{cos\,\theta} \quad \Rightarrow \quad sen\,\theta = tan\,\theta\ .\ cos\,\theta$$

$$cot\,\theta = \frac{cos\,\theta}{sen\,\theta} \quad \Rightarrow \quad cos\,\theta = cot\,\theta\ .\ sen\,\theta$$

3. En cada triángulo sombreado, el cuadrado de la función superior izquierda más el cuadrado de la función superior derecha es igual al cuadrado de la función inferior:

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad cos^2\theta = 1 - sen^2\theta \ ,\ sen^2\theta = 1 - cos^2\theta$$

$$1 + tan^2\theta = sec^2\theta \quad \Rightarrow \quad tan^2\theta = sec^2\theta - 1 \ ,\ 1 = sec^2\theta - tan^2\theta$$

$$1 + cot^2\theta = csc^2\theta \quad \Rightarrow \quad cot^2\theta = csc^2\theta - 1 \ ,\ 1 = csc^2\theta - cot^2\theta$$

Para demostrar que una ecuación es una identidad, consiste en convertir uno de los miembros de la ecuación en la forma que tiene el otro miembro. No hay un método general para demostrar estos ejercicios, pero existen algunas indicaciones que te pueden ayudar.

- Es conveniente trabajar con el miembro más complicado de la identidad reduciéndolo a la forma del miembro más sencillo.
- De ser posible se debe factorizar, a veces es necesario multiplicar el numerador y denominador por un mismo factor, es equivalente a multiplicar por la unidad.
- De no ser posible aplicar ninguna de las indicaciones anteriores, las funciones del miembro más complicado se convierten en senos y cosenos y se simplifica.

Ejemplos:

A- Demuestre que las siguientes expresiones son identidades:

1. $\cos + \dfrac{sen^2 A}{\cos A} = \sec A$

Solución: Partimos del primer miembro para llegar al segundo que es el más simple, así:

$\cos A + \dfrac{sen^2 A}{\cos A} = \dfrac{cos^2 A + sen^2 A}{\cos A}$ (aplicando suma de fracciones)

$= \frac{1}{cos A}$ (aplicando identidad pitagórica: $sen^2 A + cos^2 A = 1$)

$= sec\ A$ (aplicando identidad recíproca: $cos\ A.\ sec\ A = 1$)

2. $\dfrac{1}{1+\cos A} + \dfrac{1}{1-\cos A} = 2\,csc^2 A$

Solución: Partimos del primer miembro, así:

$\frac{1}{1+\cos A} + \frac{1}{1-\cos A} = \frac{1-cos A+1+cos A}{(1+cos A)(1-\cos A)}$ (suma de fracciones)

$= \frac{2}{(1+\cos A)(1-\cos A)}$ (reduciendo términos semejantes y cancelando opuestos)

$= \frac{2}{1-cos^2 A}$ (multiplicando en el denominador)

$= \frac{2}{sen^2 A}$ (aplicando $sen^2 A + cos^2 A = 1$)

$= 2\ csc^2\ A$ (aplicando $\frac{1}{sen\ A} = cscA$)

3. $\tan\theta + \frac{\cos\theta}{1+sen\ \theta} = \sec\theta$

Solución: Partiendo del primer miembro tenemos:

$\tan\theta + \frac{\cos\theta}{1+sen\ \theta} = \frac{sen\ \theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1+sen\ \theta}$ (reemplazando $\tan\theta = \frac{sen\ \theta}{\cos\theta}$)

$= \frac{sen\theta(1+sen\theta)+\cos(cos\theta)}{\cos\theta(1+sen\ \theta)}$ (suma de fracciones)

$= \frac{sen\theta + sen^2\theta + cos^2\theta}{\cos\theta(1+sen\ \theta)}$ (multiplicando término a término en el numerador)

$= \frac{sen\theta + (sen^2\theta + cos^2\theta)}{cos\theta(1+sen\ \theta)}$ (agrupando los dos últimos términos en el numerador)

$= \frac{sen\theta + 1}{\cos\theta\,(1+sen\ \theta)}$ $(sen^2\theta + cos^2\theta = 1)$

$= \frac{\cancel{(1+sen\theta)}}{\cos\theta\,\cancel{(1+sen\ \theta)}}$ (simplificando)

$= \frac{1}{\cos\theta}$

= sec θ (usando cos θ . sec θ = 1)

4. $sen^2\,\theta - cos^2\,\theta = sen^4\,\theta - cos^4\,\theta$

Solución: en este caso partimos del Segundo miembro, pues los términos tienen los exponentes mayores que en el primero.

$sen^4\,\theta - cos^4\,\theta = (sen^2\,\theta + cos^2\,\theta)(sen^2\,\theta - cos^2\,\theta)$ (factorizando)

$= (1)(sen^2\theta - cos^2\theta)$ $(sen^2\theta + cos^2\theta = 1)$

$= sen^2\,\theta - cos^2\,\theta$ (multiplicando por 1)