

A poliéder fogalma

Definíció: *Poliédertestnek* nevezzük a tér azon véges sok sokszöge által határolt részét, amely nem tartalmaz félegyenest (azaz korlátos). A poliédertestet határoló bármely sokszöglap bármely éle egyúttal éle legalább egy másik sokszöglapnak is. Magát a poliédertestet határoló sokszögeknek – a *poliéder lapjainak* – az összességét *poliéderfelületnek* nevezzük. *Poliéderen* érthetjük a poliédertestet vagy a poliéderfelületet is. Ha a szövegkörnyezetből nem derül ki, hogy melyikre gondolunk, csak akkor kell ezt külön hangsúlyoznunk. A *poliéder csúcsai* az őt határoló sokszögek csúcsai, *élei* e sokszögek élei.

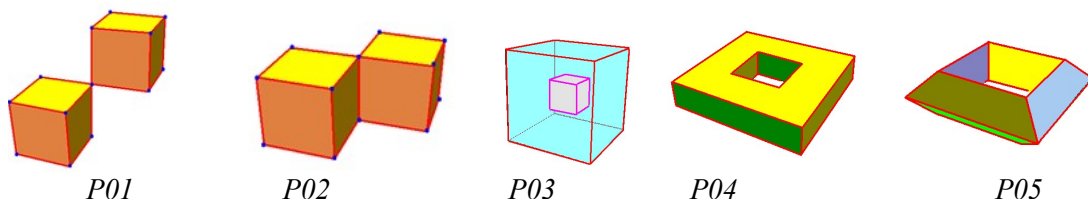
A poliéder minden csúcsára legalább három lap, így legalább három él illeszkedik. (Mivel a legkevesebb oldalszámú sokszög a háromszög, ezért az is igaz, hogy a poliéder minden lapjára legalább három csúcs, így legalább három él illeszkedik.)

Egy poliédert akkor tekinthetünk adottnak, ha egyértelműen megadjuk a csúcsait – pl. térbeli koordinátaikkal – , továbbá egyértelműen megadjuk a lapjait a szomszédos csúcsok ciklikus felsorolásával.

Definíció: Egy *poliédertest összefüggő*, ha bármely két belső (azaz a felületre nem illeszkedő) pontja összeköthető olyan töröttvonallal, amelynek a poliéder felülettel nincs közös pontja. Hasonlóan: egy *poliéderfelület összefüggő*, ha bármely két lapjának egy –egy belső pontja összeköthető olyan töröttvonallal, amelynek minden pontja illeszkedik a felületre, de nem megy át a poliéder egyetlen csúcsán sem. Egy poliéder *élhálózata összefüggő*, ha bármely csúcsból bármely csúcsba eljuthatunk a poliéder élein haladva.

Definíció: Egy poliéder *közönséges*, ha a poliédertest összefüggő, minden csúcsára teljesül, hogy az erre illeszkedő lapok – ebből adódóan az élek is – elrendezhetők egy ciklikus sorrendbe úgy, hogy a ciklus szomszédos lapjai szomszédos (közös éllel rendelkező) lapok legyenek, továbbá teljesül, hogy a lapoknak nem lehet közös belső (azaz a sokszög határvonalára nem illeszkedő) pontjuk. (Ez a feltétel zárja ki, hogy a közönséges poliéder felület önátmetsző legyen.) A közönséges poliéder minden élére szükségképpen pontosan két lap és pontosan két csúcs illeszkedik. Ugyancsak szükségszerű, hogy a közönséges poliéder minden lapja közönséges sokszög.

Ezek alapján például egyetlen poliédernek tekinthető két teljesen különálló kocka is, bár ha sem a poliédertest, sem a poliéderfelület, sem a poliéder élhálózata nem összefüggő, akkor ezt az alakzatot nem szoktuk egyetlen poliédernek tekinteni.

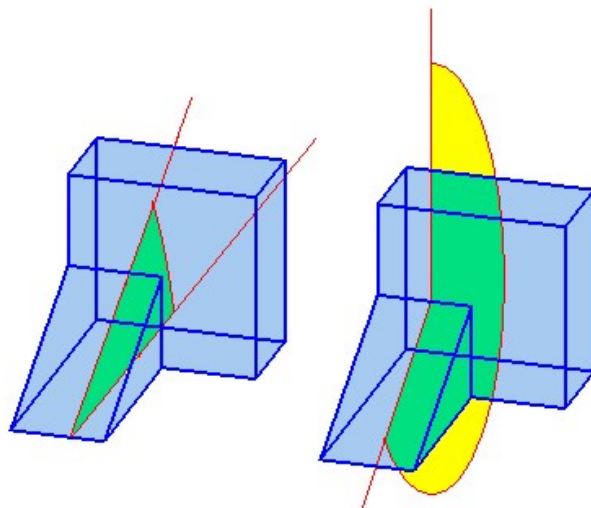


A P01 poliéder élhálózata összefüggő, a poliéderfelület és a poliédertest nem, míg a P02 poliéder felülete már összefüggő, de a poliédertest nem. Képzeljük el azt az összefüggő poliédertestet, amelyet két egymásba illesztett, egymással nem összefüggő poliéderfelület (pl. kocka) határol. A P03 poliédertest a belső kocka felületen "kívüli" és a külsőn "belüli" térrész, így a poliédertest összefüggő, a poliéder felület nem összefüggő, következésképpen az élhálózata sem az. A P04 közönséges poliéder-test, ill. felület összefüggő, az élhálózata azonban nem. A P05 poliéder egyszerű sokszögekkel (jelen esetben négyszögekkel) határolt közönséges poliéder, így az élhálózata szükségképpen összefüggő. A P01 és a P02 poliéderek nem közönségesek, de P03, P04 és P05 azonban igen., bár P03 felülete nem összefüggő.

Definíció: A közönséges poliéder valamely *csúcsának a fokszáma*, az adott csúcsba befutó élek száma, amely egyben az adott csúcsba befutó lapok száma is. Ugyanígy egy *lap fokszáma*, az adott lap éleinek (egyben csúcsainak is) a száma.

A közöséges poliéder felületének bármely pontja köré írt tetszőlegesen kicsi sugarú gömbnek – a felületre illeszkedő *pont (térbeli) környezetének* – lesz a poliéder-testhez tartozó és nem tartozó része is

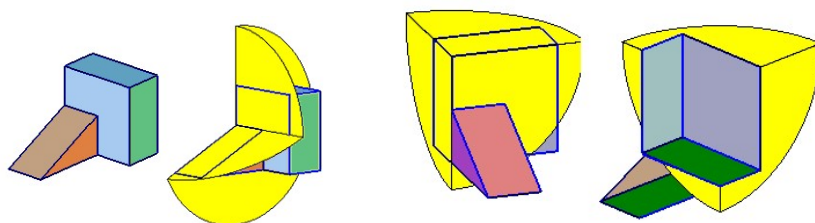
Definíció: A közöséges poliéderek minden éléhez tartozik egy *lapszög*. Ennek a meghatározásához vegyünk fel egy olyan tetszőlegesen kicsi sugarú kört, melynek a középpontja az él egy tetszőleges belső pontja, síkja merőleges a vizsgált élre. Ennek a kör lapnak a poliédertesttel alkotott közös része egy körcikk. Ennek a körcikknek a középponti szögét nevezzük az *él lapszögének*.



Egy lapszög lehet konvex vagy konkáv

Definíció: A közöséges poliéder egy csúcsára illeszkedő lapjainak a csúcsra illeszkedő élszögei (belső szögei) két részre osztják a teret. E két rész közül azt tekintjük a poliéder adott csúcsához tartozó *testszögletének*, amelyre teljesül, hogy a csúcs köré írt bármilyen kicsi sugarú gömbnek a poliédertesttel alkotott közös része, valamint a testszöglettel alkotott közös része ugyanaz. (Ugyanez másképpen: a csúcs *környezetének* a poliédertesthez, ill. a csúcs testszögletéhez tartozó része megegyezik.)

A poliéder egy adott csúcsához tartozó testszöglete lehet, hogy tartalmazza a teljes poliédert, de nem feltétlenül. Ezért nem mondhattuk azt, hogy a poliéder egy csúcsára illeszkedő élszögek által meghatározott térrészek közül azt tekintjük testszögletnek, amelyik tartalmazza a poliédert. A testszöglet fogalma a poliéder fogalmától függetlenül is kiépíthető.



Ennek a poliédernek a kiválasztott (konkáv) testszöglete tartalmazza a poliédert de a (konvex) testszöglet nem tartalmazza a poliédert.

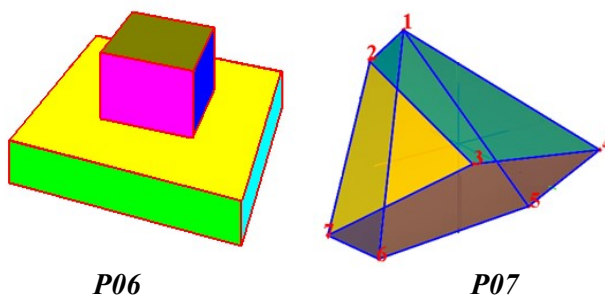
Egy testszöglet valamely éléhez tartozó lapszöget a poliéder lapszögéhez hasonló módon értelmezhetjük. A poliéder valamely élének a lapszöge egyben az él végpontjaihoz tartozó testszögletek lapszöge is.

Definíció: Egy *testszöglet szabályos*, ha minden élszöge, valamint minden lapszöge egyenlő. A szabályos testszöglet elismert olyan síkkal, amely a testszöglet minden élével ugyanakkora szöget zár be. Ennek a síknak a lapszög határoló felületével alkotott metszévonal a szabályos sokszög.

A szabályos testszögletet általánosabban értelmezve megengedhetjük, hogy a határoló felülete önátmetsző is lehet, ekkor az előbbi értelemben vett síkmetszet is önátmetsző szabályos sokszög.

Definíció: Egy poliédert *egyszeresen összefüggőnek* nevezünk, ha a felületre rajzolt bármely egyszerű, zárt töröttvonal mentén felvágva a felületet, az két darabra esik szét. Egy poliédert *egyszerű*, ha egyszeresen összefüggő és minden lapja egyszerű sokszög.

Ugyanezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az egyszerű poliéder felülete folytonos deformálással gömbfelületté alakítható, és mindenlapja körre alakítható.



A *P06* közöséges poliéder felülete egyszeresen összefüggő, de az élhálózata nem összefüggő, mivel van egy körgyűrű szerű, azaz közöséges, de nem egyszerű lapja. A *P05* poliédernek minden lapja egyszerű sokszög, de a felülete nem egyszeresen összefüggő. *P07* egy ötszöggel két négyszöggel és két háromszöggel határolt egyszerű poliéder.

Definíció: Egy poliéder *kombinatorikus szerkezetén* röviden: szerkezetén azt a kombinatorikai eszközökkel leírható reláció rendszert értjük, amely alapján egyértelműen meghatározható, hogy a poliéder egy-egy lapjára mely csúcsok ill. élek, milyen sorrendben illeszkednek.

Egy poliéder egyértelmű megadásához nem elegendő megadnunk a csúcsait (pl. térbeli derékszögű koordinátaival), hanem egyértelműen meg kell adnunk a poliéder szerkezetét. Két poliédert akkor tekintünk azonosnak, ha csúcsaik és kombinatorikai szerkezetük is azonos.