

Az E-modell saját eljárásai

Az E-modell fájljaiban ez a fájl az alap [E-alap 2023.ggb](#) Ezt rendre feltöltve az alábbi saját eljárásokkal kaptuk meg az [E-eljárásOK üres 2023.ggb](#) fájlt, amelyre épül(het) az összes bemutatott applet.

A rendszer felhasznált változói:

k: az alapkör: $k = (\text{Kör}((0,0),10))$ 1. réteg;

k_{kitakar} ugyanekkora. 2. réteg;

Láthatóság vezérlése: **kt**

Az alapkör kitakart része a 2. rétegben van, a köré írt szövegeket vezérlést stb. e fölé kell írni.

A szerkesztéssel kapott E-pontok így a 3 rétegbe kerülnek, ugyanígy az ezekkel előállított objektumok is. Ezeket rendre át kell írni a 0. rétegbe, mert csak így takarhatók el az alapkörön kívüli részei.



E-pont előállítás: 3. réteg Mindenígy felvett E-pont – dinamikus koordinátákkal áll elő.

Először a (0,0) pontba kerül, onnan el kell mozdítani.

Ezzel biztosítható, hogy ha az egérrel kivisszük az alapkörből, bejön az átellenes pontban. Az előállításához rendre generálunk egy **M_1**, **M_2** ... nem látható pontot, amelyet a **w** mutató számol. Ha egy pontot letörölünk, az őt előállító **M** pont nem törlődik. Ez a program állandó növelését jelentheti, ezért minden új appletet az üres, de az összes saját eljárást tartalmazó fájlból kell felépíteni, ahol **w=0** és még nincs felvett E-pont.

Az **M_i** pontot generáló és számoló rész a kattintással aktivizált scriptben van, ezt Kovács Zoltán (<https://www.geogebra.org/u/zoltan>) készítette:

```
var g = ggbApplet;
g.setValue("w", g.getValue("w") + 1);
g.evalCommand("Rename((0,0),M)");
g.evalCommand("DynamicCoordinates(M, If((x(M))^2 + (y(M))^2 >= 100, -x(M) 100/((x(M))^2 + (y(M))^2)), x(M)), If((x(M))^2 + (y(M))^2 >= 100, -y(M) 100/((x(M))^2 + (y(M))^2)), y(M))");
g.evalCommand("SetConditionToShowObject(M,false)");
g.setAuxiliary("M", true);
g.renameObject("M", "M_{ " + g.getValue("w") + " }");
```

Az alább bemutatott eljárások közül néhány más saját eljárást is használ, Ezt mindenütt jelezni fogjuk.



E-egyenes: **EE(A,B)** [E-egyenes OK 2023.ggb](#) ahol **A,B** az E-modell pontjai.

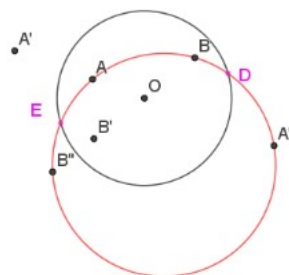
$c = \text{Kör}(A, B, \text{Ha}(A \stackrel{?}{=} (0, 0),$

Tükrözés(-B, Kör((0, 0), 10)),

Tükrözés(-A, Kör((0, 0), 10)))

Olyan **e** kört (ill. egyenest) kellett szerkeszteni, amely illeszkedik A-ra és B-re, továbbá átellenes pontokban metszi a **k** alapkört. Azt használtuk ki, hogy ha $A \neq (0,0)$, akkor a $(0,0)$ -ra vonatkozó tükröképének a **k** alapkörre vonatkozó inverze - -un. polárreciproka - is illeszkedik **e**-re. Ha $A=(0,0)$, akkor **B**-re ugyanez teljesül.

Az eljárás így három pontra illeszkedő kört állít elő, amely speciális (pl $A=(0,0)$ esetben egyenessé fajul. Így a GeoGebra az elfajuló esetet is körként kezeli. A kapott alakzatot át kell tenni a 0.rétegbe.



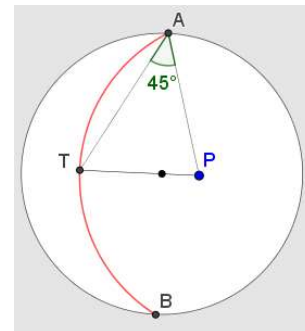


E-pólus- poláris: **EP(P)** [E-pólus-poláris OK 2023.ggb](#)

Bemenő adat egy E-pont: **P** Az E-egyenes megadásának ez a másik eljárása .

Ha a pont egybeesik a (0,0)-val az output a modell alapköre, minden más esetben egy E-egyenes, amely az adott pont polárisa. Ezt a (0,0)-hoz legközelebbi **T** pontjával és az alapkörre illeszkedő pontjaival adjuk meg. Kihasználtuk, hogy **P** és **T** egy olyan háromszöget határoz meg, amelynek a **PT** oldala illeszkedik a (0,0) pontra harmadik csúcsa az alapkörre, továbbá $\angle PAT = 45^\circ$.

Ezért: $T = P \cdot 10 \left(\frac{(t-10)}{(t^2+10t)} \right)$, ahol $t = \text{Távolság}(P, (0,0))$.



E-poláris-pólus: **PP(c)** [E-poláris-pólus OK 2023.ggb](#)

Bemenő adata: **c** egy E-egyenes. Output: az E-egyenes pólusa. Ha az **e** egyenes egyenessé, vagy az alapkörre fajul pl. ha az E-egyenest előállító pontok az alapkörre illeszkednek, akkor is működik. Ha a bemenő adat kör, de nem E-egyenes, akkor nem ad eredményt.

Az eljárás ugyanazt a $P = T \cdot 10 \left(\frac{(t-10)}{(t^2+10t)} \right)$ képletet használja, mint az előző, csak most **T** az E-egyenes origóhoz legközelebbi pontja.

E-egyenest csak ez és az **EE()** eljárás tud előállítani. színük **piros**, vonalvastagságuk 3



E-tengelyes tükrözés: **ET(P,t)** [E-teng tükr OK 2023.ggb](#)

Bemenő adat: egy tetszőleges **P** E-pont és **t** E-egyenes. Output: a pont egyenesre vonatkozó tükörképe. Lényegében **P** inverze a **t** körre. Ha **P** éppen **t** pólusa, akkor a tükörkép önmaga. Az eljárás általános esetben alkalmas merőleges állításra.

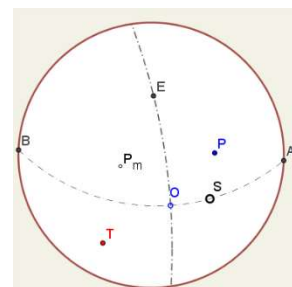


E Centrális tükrözés **P_t=EC(P,O)** [E-centrális tükrözés OK](#)

[2023.ggb](#)

Input a **P** és **O** E-pont, ahol **P** amit tükrözünk, **O** a tükrözés centruma.

- Felvettünk két **O**-ra illeszkedő és egymásra merőleges (**t**, **m**) egyenespárt, amelyekre tükrözve (invertálva) **P**-t kaptuk a $T = P_t$ pontot, ahol **t** egy-egy tetszőlegesen választott - de az egérrel nem elérhető $S = (31/7, -23/7)$ pontra és **O** ra illeszkedő, **m** pedig **O**-ra és **t** pólusára illeszkedő E-egyenes. Gyakorlatilag kizárható az $O = (31/7, -23/7)$ eset, amelyre a szerkesztés nem működne.



E-kör: **EK(O,P)** [E-kör OK 2023.ggb](#)

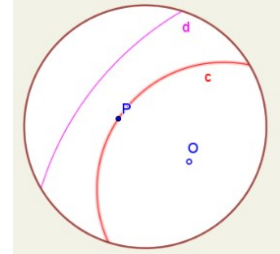
ahol (**O** középpont **P** egy kerületi pont)

Lényegében az előző szerkesztést megismételve, a keresett **c** kör a **P**, **P_t** és **P_m** E-pontokra illeszkedik. **c**-nek az alapkörön kívüli része (ha van) az alapkörre vonatkozó polár-reciprokaként (**O**-ra vonatkozó tükörképének az alapkörre vonatkozó inverzeként) látszik.

Az outputban az E-körnek a **P**-re illeszkedő köre **piros**, a másik - ha megjelenik - **magenta**. Ezek a

színek változtathatók. Pl. Ha meg szeretnénk szerkeszteni két E-kör metszéspontjait esetleg indokolt lehet ez a színek szerinti megkülönböztetés.

c és **d** a GeoGebra két objektuma, bár együtt alkotják a **EK(O,P)** E-kört.

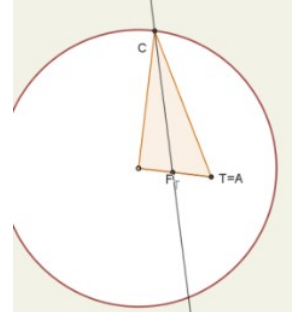


E szakaszfelező pontok **EF(A,B)** ahol **A, B** E-pontok : [E- szf pontok OK 2023.ggb](#)

Használja az **EC()** E-centrális tükrözés eljárást!

Azokat a tükrözési centrumokat – az **A** és **B** pontokhoz tartozó szakaszok felezőpontjait – keressük, amelyek **A**-t **B**-be viszik (és viszont). Ha például **B=(0,0)** lenne, akkor az egyik felezőpont az **(AB)** szakasznak az a pontja lenne, amelyik az **A, B, C** háromszögnek a **C**-hez tartozó szögfelezője metszené ki az **AB** szakaszból melyre **AB ⊥ BC** és **C** illeszkedne az alapkörre.

Mivel nem tudjuk, hogy **A** és **B** közül melyik nem esik egybe az origóval legyen közülük **T** az, amelyik biztosan nem az origó, **R** a másik, amely akár az origó is lehet.



Most legyen **F_T** a $(T, (0,0), C) \Delta$ C csúcsához tartozó szögfelezőjének a $T(0,0)$

szakasszal alkotott metszéspontja. Az **F_T** centrumú E-tükrözés a **T**-pontot a **(0,0)** pontba, az **R (=B)** pontot egy **R'**-be viszi: **R'=EC(R, F_T)**.

Az **R'(0,0)** szakasz **F_R** E-felezőpontját ugyanúgy kaphatjuk meg az $(R', (0,0), D) \Delta$ -ból, mint az imént **F_T**-t. Ezt **F_T**-re „vissza” tükrözve kapjuk az **A** és **B** pont egyik tükörpontját, vagyis az egyik **AB** szakasz **E** felezőpontját.: **E=EC(F_R, F_T)**

Mivel az **A** és **B** pont két olyan E-szakaszt határoz meg, amelyek összege 180° . Ezért szakaszfelező pontjaik E-távolsága 90° . Így a másikat – **F**-et annak az $(R, (0,0))$ egyenesnek abból az **F_R'** pontjából kapjuk, amelyre teljesül, hogy $(F_R, D, F_R') \sphericalangle = \pm 45^\circ$. Vagyis az **F_RD** egyenes **D** körüli 45° -os forgatásának az iránya lényegtelen. Ebből: **F=EC(F_R, F_T)** Ez a szerkesztés akkor is működik, ha az **R(=B)** pont a **(0,0)** origóval esik egybe.



E-szakaszok **ESZ(A,B)** ahol **A, B** E-pontok [E-szakaszok OK 2023.ggb](#)

Az elliptikus geometriában – így az E-modellen is – két E-pont két E szakaszt határoz meg. Ezért output: mindkét szakasz. (E kettő együtt képezi az E-egyenest) Ha csak az **A** és **B** E-pontokat ismerjük az általuk meghatározott Két szakasz nem különböztethető meg. Egegez szükség van egy további pontra, amely a két szakasz egyikére illeszkedik, a másikára nem. Ez itt az **(AB)** E-egyenest az alapkörrel alkotott metszéspontja. Így a az **AB** szakasz **piros**, ha metszi az alapkört, **magenta**, ha nem.



E-rövid szakasz. **ERS(A,B)** [E-rövid szakasz 2023.ggb](#)

Használja az **EE()**, **EP()**, **EF()**, **ES()** és közvetve az **EC()** eljárásokat!

Bemenő adat **A** és **B** E-pontok, output a **kék színű** E-szakasz, amelynek a hossza legfeljebb 90° , és a **piros**, amely legalább 90° . Ezt a kérdést az dönti el, hogy pl. az $APC \sphericalangle \leq 45^\circ$ vagy az $APD \sphericalangle \leq 45^\circ$ teljesül-e ahol **C** és **D** az **A, B** pontpárhoz tartozó két felezőpont, **P** az **(AB)** e-egyenest pólusa.

Azért van két E-szakaszokat előállító rutin, mert el kellett dönteni, hogy mi alapján különböztessük meg a két E-szakaszt, amelyek az E-egyenest alkotják. Az előző **ESZ()** az alapján különbözteti meg őket, hogy melyik metszi az E-modell alapkörét. Mivel az E-sík – épp úgy, mint az euklideszi- és a hiperbolikus sík – mindenütt homogén, így az alapkörnek csak a modellben van szerepe, magában az E-síkban, mint matematikai konstrukcióban nincs. ezért indokolt ennek a másik eljárásnak is a megadása, ahol a megkülönböztetés alapja a kisebb-nagyobb reláció, amely a modelltől függetlenül is kiépíthető.



E szakasz adott hosszal **ED(A,V, α)** [E-szakasz d OK 2023.ggb](#)

Használja az E-centrális tükrözés **EC()** és az E-felezőpont **EF()** eljárásokat!

Bemenő adatok: **A** a szakasz kezdőpontja; **V** tetszőleges pont a szakasz egyenesén $-\alpha$ akeresett z **AB** szakasz hossza. Output az (AV) egyenesre illeszkedő, A-tól $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ távolságra lévő **B**-pont.

A szerkesztés lényege: felvesszük az **A(0,0)** szakasz **F** felezőpontját, erre tükrözzük a **V** iránypontot. a kapott **(0,0)V_1** egyenesen megadjuk a

B_1=Eltolás((0, 0), Vektor(10tg(α / 2) * EgységVektor(Szakasz((0, 0), V_1)))) pontot, majd ezt **F** –en át visszatükrözzük az AV egyenesre.

Megjegyezzük, hogy **B**-t megszerkesztve megadtuk mindkét **AB** szakaszt.



E-egyenesek metszéspontja **EM(a,b)** [E-metszéspont OK 2023.ggb](#)

Bemenő adat: Két E-egyenes Output: ezek metszéspontjai közül az alapkörön belüli. Bár nem zártuk ki az eszköz alkalmazását arra az esetre, ha a bemenő adat egyike, vagy mindkettő kör,erre az esetre inkább a GeoGebra metszéspont parancsát célszerű alkalmazni.



E-szög **ES(A,C,B)** ahol C a csúcs [E-szög OK 2023.ggb](#)

Bemenő adat E-pont,E csúcspont E-pont Output: 90° -nál nem nagyobb szög.

Az itt vázolt saját eljárások működését és a szerkesztésük során alkalmazott fogásokat forrásfájlaik alapján célszerű megismerni. Azoknak az érdeklődő olvasóinknak, akik úgy érzik ezeket is szívesen tanulmányoznák, kérjük ezt e sorok írójától, aki amellet, hogy ezeket a fájloka örömmel osztja meg az érdeklődőkkel, szívesen olvasná a tárgyhoz tartozó véleményüket, észrevételeiket, megjegyzéseiket is.

Mindehhez jó munkát, az önálló felfedezés örömét kívánja:

Szilassi Lajos

szilassi@jgypk.u-szeged.hu