EJEMPLOS DE LÓGICA PROPOSICIONAL

A) Usando tablas demostrar:

1) $(p')' \Leftrightarrow p$

p	p'	(p')'
V	F	V
F	V	F

2) $p \wedge p' \Leftrightarrow F$

p	p'	$p \wedge p'$
V	F	F
F	V	F

3) $p \vee p' \Leftrightarrow V$

p	p'	$p \vee p'$
V	F	V
F	V	V

4) $p \vee V \Leftrightarrow V$

p	V	$p \vee V$
V	V	V
F	V	V

5) $p \wedge V \Leftrightarrow p$

p	V	$p \wedge V$
V	V	V
F	V	F

6) $p \vee F \Leftrightarrow p$

p	F	$p \vee F$
V	F	V
F	F	F

7) $p \wedge F \Leftrightarrow F$

p	F	$p \wedge F$
V	F	F
F	F	F

8) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

9) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	F
F	F	F	F

Julio 2018
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com

10) $(p \wedge q)' \Leftrightarrow p' \vee q'$

p	q	p'	q'	$p \wedge q$	$(p \wedge q)'$	$p' \vee q'$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

11) $(p \vee q)' \Leftrightarrow p' \wedge q'$

p	q	p'	q'	$p \vee q$	$(p \vee q)'$	$p' \wedge q'$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

12) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

13) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

14) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

p	q	r	$p \leftrightarrow q$	$q \leftrightarrow r$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$	$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	F

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com

15) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F	F
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

16) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

17) $p' \vee q \Leftrightarrow p \rightarrow q$

p	q	p’	$p' \vee q$	$p \rightarrow q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

18) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

19) $p \uparrow q \Leftrightarrow (p \wedge q)'$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q)'$	$p \uparrow q$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com

20) $p \downarrow q \Leftrightarrow (p \vee q)'$

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q)'$	$p \downarrow q$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	V

21) $p \oplus q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \wedge q)'$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q)'$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge (p \wedge q)'$	$p \oplus q$
V	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F	F

B) A partir de los conectivos negación (') y disyunción ($\vee$) se definen:

$p \wedge q =_{def} (p' \vee q')'$

$p \rightarrow q =_{def} p' \vee q$

$p \leftrightarrow q =_{def} (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$p \oplus q =_{def} (p \wedge q') \vee (p' \wedge q)$

$p \uparrow q =_{def} (p \wedge q)'$

$p \downarrow q =_{def} (p \vee q)'$

Utilizando esas definiciones y las leyes de lógica matemática, demostrar las siguientes tautologías:

1) $p \rightarrow q \Leftrightarrow q' \rightarrow p'$

$q' \rightarrow p' \Leftrightarrow (q')' \vee p'$ (Definición)

$\Leftrightarrow q \vee p'$ (Doble Negación)

$\Leftrightarrow p' \vee q$ (Conmutatividad)

$\Leftrightarrow p \rightarrow q$ (Definición)

2) $(p \rightarrow q)' \Leftrightarrow p \wedge q'$

$(p \rightarrow q)' \Leftrightarrow (p' \vee q)'$ (Definición)

$\Leftrightarrow (p')' \wedge q'$ (De Morgan)

$\Leftrightarrow p \wedge q'$ (Doble Negación)

3) $p \rightarrow (q \wedge q') \Leftrightarrow p'$

$p \rightarrow (q \wedge q') \Leftrightarrow p \rightarrow F$ (Complemento)

$\Leftrightarrow p' \vee F$ (Definición)

$\Leftrightarrow p'$ (Identidad)

4) $(q \vee q') \rightarrow p \Leftrightarrow p$

$$
\begin{aligned}
(q \vee q') \rightarrow p &\Leftrightarrow (q \vee q')' \vee p && (\text{Definición})\\
&\Leftrightarrow V' \vee p && (\text{Complemento})\\
&\Leftrightarrow F \vee p && (\text{Complemento})\\
&\Leftrightarrow p && (\text{Identidad})
\end{aligned}
$$

5) $(p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \rightarrow r &\Leftrightarrow (p \wedge q)' \vee r && (\text{Definición})\\
&\Leftrightarrow (p' \vee q') \vee r && (\text{De Morgan})\\
&\Leftrightarrow p' \vee (q' \vee r) && (\text{Asociatividad})\\
&\Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r) && (\text{Definición})
\end{aligned}
$$

6) $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow q \rightarrow (p \rightarrow r)$

$$
\begin{aligned}
p \rightarrow (q \rightarrow r) &\Leftrightarrow p' \vee (q' \vee r) && (\text{Definición})\\
&\Leftrightarrow (p' \vee q') \vee r && (\text{Asociatividad})\\
&\Leftrightarrow (q' \vee p') \vee r && (\text{Conmutatividad})\\
&\Leftrightarrow q' \vee (p' \vee r) && (\text{Asociatividad})\\
&\Leftrightarrow q \rightarrow (p \rightarrow r) && (\text{Definición})
\end{aligned}
$$

7) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \Leftrightarrow p \wedge q$

$$
\begin{aligned}
(p \rightarrow q) \leftrightarrow p &\Leftrightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow (p \rightarrow q)) && (\text{Definición})\\
&\Leftrightarrow ((p \rightarrow q)' \vee p) \wedge (p' \vee (p \rightarrow q)) && (\text{Definición})\\
&\Leftrightarrow ((p' \vee q)' \vee p) \wedge (p' \vee (p' \vee q)) && (\text{Definición})\\
&\Leftrightarrow ((p \wedge q') \vee p) \wedge (p' \vee (p' \vee q)) && (\text{De Morgan})\\
&\Leftrightarrow p \wedge (p' \vee (p' \vee q)) && (\text{Absorción})\\
&\Leftrightarrow p \wedge ((p' \vee p') \vee q) && (\text{Asociatividad})\\
&\Leftrightarrow p \wedge (p' \vee q) && (\text{Idempotencia})\\
&\Leftrightarrow (p \wedge p') \vee (p \wedge q) && (\text{Distributividad})\\
&\Leftrightarrow F \vee (p \wedge q) && (\text{Complemento})\\
&\Leftrightarrow p \wedge q && (\text{Identidad})
\end{aligned}
$$

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com

8) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow q \Leftrightarrow p \vee q$

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow q$	$\Leftrightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow (p \rightarrow q))$	(Definición)
	$\Leftrightarrow ((p \rightarrow q)' \vee q) \wedge (q' \vee (p \rightarrow q))$	(Definición)
	$\Leftrightarrow ((p' \vee q)' \vee q) \wedge (q' \vee (p' \vee q))$	(Definición)
	$\Leftrightarrow (((p')' \wedge q') \vee q) \wedge (q' \vee (p' \vee q))$	(De Morgan)
	$\Leftrightarrow ((p \wedge q') \vee q) \wedge (q' \vee (p' \vee q))$	(Doble Negación)
	$\Leftrightarrow ((p \wedge q') \vee q) \wedge (q' \vee (q \vee p'))$	(Conmutatividad)
	$\Leftrightarrow ((p \wedge q') \vee q) \wedge ((q' \vee q) \vee p')$	(Asociatividad)
	$\Leftrightarrow ((p \wedge q') \vee q) \wedge (V \vee p')$	(Complemento)
	$\Leftrightarrow ((p \wedge q') \vee q) \wedge V$	(Identidad)
	$\Leftrightarrow ((p \wedge q') \vee q)$	(Identidad)
	$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (q' \vee q)$	(Distributividad)
	$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge V$	(Complemento)
	$\Leftrightarrow p \vee q$	(Identidad)

9) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p' \wedge q')$

$p \leftrightarrow q$	$\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	(Definición)
	$\Leftrightarrow (p' \vee q) \wedge (q' \vee p)$	(Definición)
	$\Leftrightarrow (p' \wedge (q' \vee p)) \vee (q \wedge (q' \vee p))$	(Distributividad)
	$\Leftrightarrow ((p' \wedge q') \vee (p' \wedge p)) \vee ((q \wedge q') \vee (q \wedge p))$	(Distributividad)
	$\Leftrightarrow ((p' \wedge q') \vee F) \vee (F \vee (q \wedge p))$	(Complemento)
	$\Leftrightarrow (p' \wedge q') \vee (q \wedge p)$	(Identidad)
	$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p' \wedge q')$	(Conmutatividad)

10) $p' \leftrightarrow q' \Leftrightarrow p \leftrightarrow q$

$p' \leftrightarrow q'$	$\Leftrightarrow (p' \rightarrow q') \wedge (q' \rightarrow p')$	(Definición)
	$\Leftrightarrow ((p')' \vee q') \wedge ((q')' \vee p')$	(Definición)
	$\Leftrightarrow (p \vee q') \wedge (q \vee p')$	(Doble Negación)
	$\Leftrightarrow (q' \vee p) \wedge (p' \vee q)$	(Conmutatividad)
	$\Leftrightarrow (q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q)$	(Definición)
	$\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	(Conmutatividad)
	$\Leftrightarrow p \leftrightarrow q$	(Definición)

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com

11) $(p \leftrightarrow q)' \Leftrightarrow p' \leftrightarrow q$

$(p \leftrightarrow q)'$	$\Leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))'$	(Definición)
	$\Leftrightarrow ((p' \vee q) \wedge (q' \vee p))'$	(Definición)
	$\Leftrightarrow (p' \vee q)' \vee (q' \vee p)'$	(De Morgan)
	$\Leftrightarrow ((p')' \wedge q') \vee ((q')' \wedge p')$	(De Morgan)
	$\Leftrightarrow (p \wedge q') \vee (q \wedge p')$	(Doble Negación)
	$\Leftrightarrow ((p \wedge q') \vee q) \wedge ((p \wedge q') \vee p')$	(Distributividad)
	$\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (q' \vee q)) \wedge ((p \vee p') \wedge (q' \vee p'))$	(Distributividad)
	$\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge V) \wedge (V \wedge (q' \vee p'))$	(Complemento)
	$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (q' \vee p')$	(Identidad)
	$\Leftrightarrow ((p')' \vee q) \wedge (q' \vee p')$	(Doble Negación)
	$\Leftrightarrow (p' \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p')$	(Definición)
	$\Leftrightarrow p' \leftrightarrow q$	(Definición)

12) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow (q \wedge r)$

$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$	$\Leftrightarrow (p' \vee q) \wedge (p' \vee r)$	(Definición)
	$\Leftrightarrow p' \vee (q \wedge r)$	(Distributividad)
	$\Leftrightarrow p \rightarrow (q \wedge r)$	(Definición)

13) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow (q \vee r)$

$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$	$\Leftrightarrow (p' \vee q) \vee (p' \vee r)$	(Definición)
	$\Leftrightarrow ((p' \vee q) \vee p') \vee r$	(Asociatividad)
	$\Leftrightarrow (p' \vee (q \vee p')) \vee r$	(Asociatividad)
	$\Leftrightarrow (p' \vee (p' \vee q)) \vee r$	(Conmutatividad)
	$\Leftrightarrow ((p' \vee p') \vee q) \vee r$	(Asociatividad)
	$\Leftrightarrow (p' \vee q) \vee r$	(Idempotencia)
	$\Leftrightarrow p' \vee (q \vee r)$	(Asociatividad)
	$\Leftrightarrow p \rightarrow (q \vee r)$	(Definición)

14) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$

$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	$\Leftrightarrow (p' \vee r) \wedge (q' \vee r)$	(Definición)
	$\Leftrightarrow (p' \wedge q') \vee r$	(Distributividad)
	$\Leftrightarrow (p \vee q)' \vee r$	(De Morgan)
	$\Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$	(Definición)

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com

15) $(p \to r) \vee (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$

$(p \to r) \vee (q \to r)$	$\Leftrightarrow (p' \vee r) \vee (q' \vee r)$	(Definición)
	$\Leftrightarrow p' \vee (r \vee (q' \vee r))$	(Asociatividad)
	$\Leftrightarrow p' \vee ((r \vee q') \vee r)$	(Asociatividad)
	$\Leftrightarrow p' \vee ((q' \vee r) \vee r)$	(Conmutatividad)
	$\Leftrightarrow p' \vee (q' \vee (r \vee r))$	(Asociatividad)
	$\Leftrightarrow p' \vee (q' \vee r)$	(Idempotencia)
	$\Leftrightarrow (p' \vee q') \vee r$	(Asociatividad)
	$\Leftrightarrow (p \wedge q)' \vee r$	(De Morgan)
	$\Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$	(Definición)

16) $p \Rightarrow p \vee q$

Sea p Verdadero, entonces:

$p \vee q$	$\Leftrightarrow V \vee q$	($p \Leftrightarrow V$)
	$\Leftrightarrow V$	(Identidad)

17) $p \Rightarrow q \to p$

Sea p Verdadero, entonces:

$q \to p$	$\Leftrightarrow q' \vee p$	(Definición)
	$\Leftrightarrow q' \vee V$	($p \Leftrightarrow V$)
	$\Leftrightarrow V$	(Identidad)

18) $p' \Rightarrow p \to q$

Sea p' Verdadero, entonces:

$p \to q$	$\Leftrightarrow p' \vee q$	(Definición)
	$\Leftrightarrow V \vee q$	($p' \Leftrightarrow V$)
	$\Leftrightarrow V$	(Identidad)

19) $(p \wedge p') \Rightarrow q$

Equivale a demostrar:

$q' \Rightarrow (p \wedge p')'$ (Contrarrecíproco)

Sea q' Verdadero, entonces:

$(p \wedge p')'$	$\Leftrightarrow F'$	(Complemento)
	$\Leftrightarrow V$	(Complemento)

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com

20) $(p \rightarrow q) \wedge p \;\Rightarrow\; q$

Equivale a demostrar:

$q' \;\Rightarrow\; ((p \rightarrow q) \wedge p)'$ (Contrarrecíproco)

Sea q' Verdadero, entonces:

$$
\begin{aligned}
((p \rightarrow q) \wedge p)' &\Leftrightarrow ((p' \vee q) \wedge p)' && \text{(Definición)}\\
&\Leftrightarrow (p' \vee q)' \vee p' && \text{(De Morgan)}\\
&\Leftrightarrow ((p')' \wedge q') \vee p' && \text{(De Morgan)}\\
&\Leftrightarrow (p \wedge q') \vee p' && \text{(Doble Negación)}\\
&\Leftrightarrow (p \wedge V) \vee p' && (q' \Leftrightarrow V)\\
&\Leftrightarrow p \vee p' && \text{(Identidad)}\\
&\Leftrightarrow V && \text{(Complemento)}
\end{aligned}
$$

21) $(p \rightarrow q) \wedge q' \;\Rightarrow\; p'$

Equivale a demostrar:

$p \;\Rightarrow\; ((p \rightarrow q) \wedge q')'$ (Contrarrecíproco)

Sea p Verdadero, entonces:

$$
\begin{aligned}
((p \rightarrow q) \wedge q')' &\Leftrightarrow ((p' \vee q) \wedge q')' && \text{(Definición)}\\
&\Leftrightarrow ((p' \wedge q') \vee (q \wedge q'))' && \text{(Distributividad)}\\
&\Leftrightarrow ((p' \wedge q') \vee F)' && \text{(Complemento)}\\
&\Leftrightarrow (p' \wedge q')' && \text{(Identidad)}\\
&\Leftrightarrow p \vee q && \text{(De Morgan y Doble Negación)}\\
&\Leftrightarrow V \vee q && (p \Leftrightarrow V)\\
&\Leftrightarrow V && \text{(Identidad)}
\end{aligned}
$$

22) $p' \;\Leftrightarrow\; p \uparrow p$

$$
\begin{aligned}
p \uparrow p &\Leftrightarrow (p \wedge p)' && \text{(Definición)}\\
&\Leftrightarrow p' && \text{(Idempotencia)}
\end{aligned}
$$

23) $p' \;\Leftrightarrow\; p \downarrow p$

$$
\begin{aligned}
p \downarrow p &\Leftrightarrow (p \vee p)' && \text{(Definición)}\\
&\Leftrightarrow p' && \text{(Idempotencia)}
\end{aligned}
$$

24) $p \wedge q \Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$

$(p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$	$\Leftrightarrow ((p \wedge q)' \wedge (p \wedge q)')'$	(Definición)
	$\Leftrightarrow ((p \wedge q)')'$	(Idempotencia)
	$\Leftrightarrow p \wedge q$	(Doble Negación)

25) $p \wedge q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

$(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$	$\Leftrightarrow ((p \vee p)' \vee (q \vee q)')'$	(Definición)
	$\Leftrightarrow (p' \vee q')'$	(Idempotencia)
	$\Leftrightarrow p \wedge q$	(Definición)

26) $p \vee q \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

$(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$	$\Leftrightarrow ((p \vee q)' \vee (p \vee q)')'$	(Definición)
	$\Leftrightarrow ((p \vee q)')'$	(Idempotencia)
	$\Leftrightarrow p \vee q$	(Doble Negación)

27) $p \vee q \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$

$(p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$	$\Leftrightarrow ((p \wedge p)' \wedge (q \wedge q)')'$	(Definición)
	$\Leftrightarrow (p' \wedge q')'$	(Idempotencia)
	$\Leftrightarrow p \vee q$	(De Morgan y Doble Negación)

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com