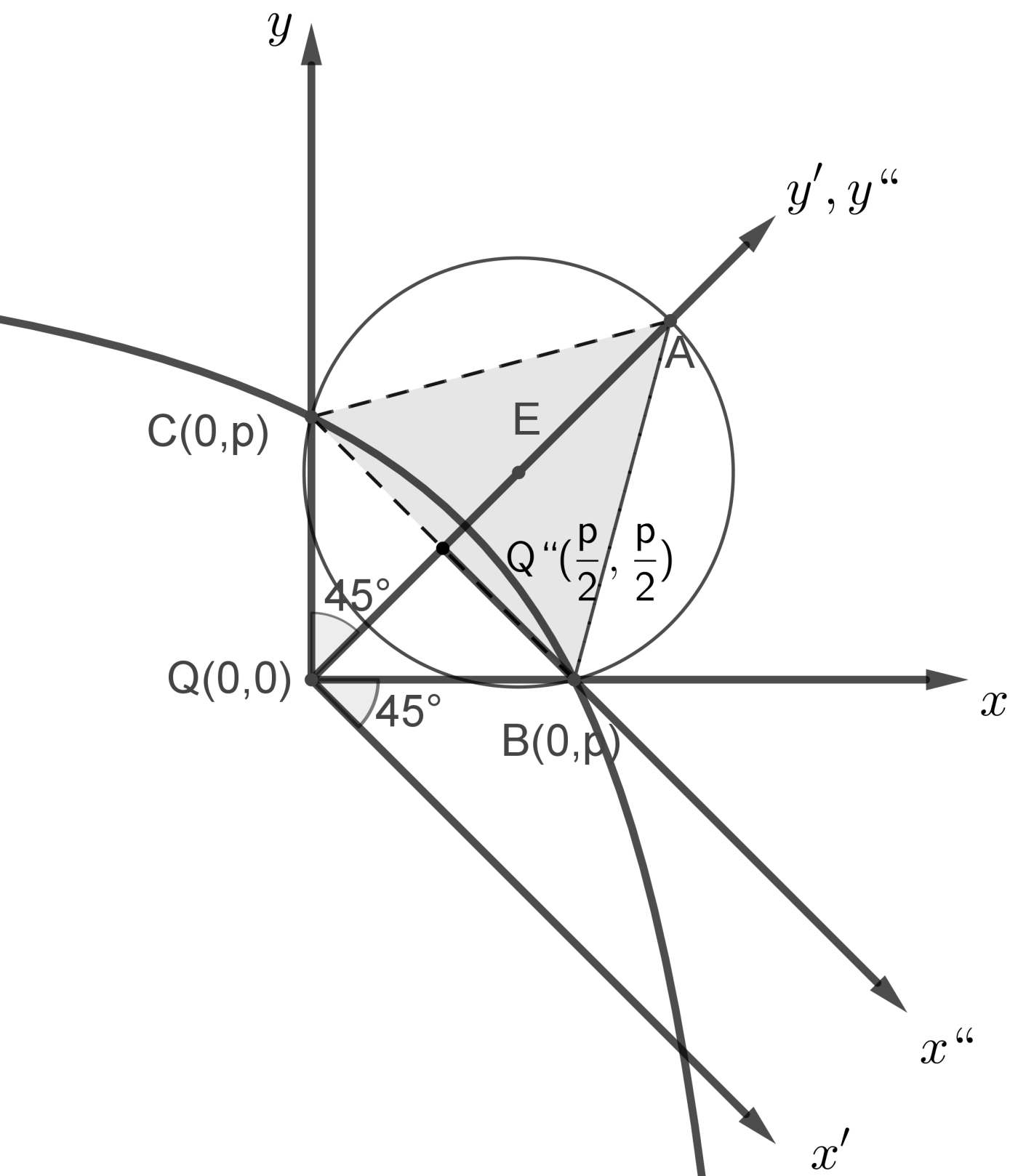




Calculul ariilor suprafețelor de puncte p-triunghiulare

Ecuția conicei, în planul suprafeței punctelor p-triunghiulare, în raport cu sistemul de axe de coordonate (xQy), este:

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 2p \end{cases} \rightarrow xy - 2px - 2py + 2p^2 = 0.$$

Se rotește sistemul de axe de coordonate (xQy), în jurul punctului Q cu 45° , în sens orar, obținându-se sistemul de axe de coordonate (x'Qy').

Între coordonatele unui punct, în raport cu cele două sisteme de axe de coordonate, au loc relațiile:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \end{cases}$$

Se obține ecuația conicei, în planul suprafeței punctelor p-triunghiulare, în raport cu sistemul de axe de coordonate (x'Qy'):

$$(y' - 2\sqrt{2}p)^2 - x'^2 = 4p^2$$

Se efectuează translația sistemului de axe de coordonate (x'Qy'), în raport cu sistemul de axe de coordonate (xQy), cu vectorul $\frac{p}{2}(1; 1)$, obținându-se sistemul de axe de coordonate (x''Q'y'').

În raport cu sistemul de axe de coordonate (x''Q'y''), ecuația conicei va fi

$$(y'' - \frac{3\sqrt{2}p}{2})^2 - x''^2 = 4p^2$$

Se impune condiția $|x''| \leq \frac{p\sqrt{2}}{2}$ și se obține expresia:

$$y'' = \frac{3\sqrt{2}p}{2} - \sqrt{x''^2 + 4p^2}$$

Aria suprafeței punctelor p-triunghiulare corespunzătoare triunghiurilor obtuzunghice în Z se calculează astfel:

$$\int_{-\frac{p\sqrt{2}}{2}}^{\frac{p\sqrt{2}}{2}} (\frac{3\sqrt{2}p}{2} - \sqrt{x^2 + 4p^2}) dx$$

Utilizându-se formula $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}))$,

se obține $\left(\frac{3}{2} - 2\ln 2\right)p^2$.

Aria suprafeței punctelor p-triunghiulare corespunzătoare tuturor triunghiurilor obtuzunghice se calculează astfel:

$$3\left(\frac{3}{2} - 2\ln 2\right)p^2.$$

Aria suprafeței punctelor p-triunghiulare corespunzătoare triunghiurilor ascuțitunghice se calculează astfel:

$$\frac{(p\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} - 3\left(\frac{3}{2} - 2\ln 2\right)p^2,$$

și se obține

$$\left(6\ln 2 - \frac{9 - \sqrt{3}}{2}\right)p^2.$$

Raportul dintre numărul triunghiurilor ascuțitunghice și numărul triunghiurilor obtuzunghice, cu perimetre egale, este

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{3\left(\frac{3}{2} - 2\ln 2\right)} - 1.$$