

## Aufgabe 2 Industrieballen

Eine Firma bietet Industrieballen aus normierten Betonstahlfertigteilen an. Zur Herstellung dieser Fertigteile benötigt sie die Rohstoffe Kies ( $R_1$ ), Zement ( $R_2$ ), Stahl ( $R_3$ ) und Wasser ( $R_4$ ).

Aus den Rohstoffen werden folgende Zwischenprodukte hergestellt: Wandplatten ( $Z_1$ ), Stützen ( $Z_2$ ) und Träger ( $Z_3$ ). Aus diesen Bauteilen können zwei Hallentypen,  $H_1$  und  $H_2$ , montiert werden.

Die folgenden Tabellen geben an, wie viele Tonnen der Rohstoffe zur Herstellung je einer Tonne der Zwischenprodukte benötigt werden bzw. wie viele Tonnen der jeweiligen Zwischenprodukte pro Hallentyp benötigt werden.

	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$
$R_1$	0,7	0,55	0,5
$R_2$	0,1	0,2	0,2
$R_3$	0,1	0,15	0,2
$R_4$	0,1	0,1	0,1

	$H_1$	$H_2$
$Z_1$	240	300
$Z_2$	80	120
$Z_3$	80	180

Die Kosten in GE pro Tonne betragen für die jeweiligen Rohstoffe:

Rohstoffe	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$
GE / Tonne	27	190	600	3

Die Fertigungskosten in GE pro Tonne betragen für die jeweiligen Zwischenprodukte:

Zwischenprodukte	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$
GE / Tonne	80	100	120

Die Endmontagekosten betragen 40 000 GE für Hallentyp 1 und 48 000 GE für Hallentyp 2.

a) Beschreiben Sie die Verflechtungen mit einem Graphen.

Berechnen Sie die Matrix  $A_{RH}$ , aus der die Anzahl der Tonnen abgelesen werden kann, die von den einzelnen Rohstoffen pro Hallentyp verarbeitet werden.

Geben Sie an, wie viele Tonnen Kies ( $R_1$ ) für Hallentyp 1 und wie viel Tonnen Stahl ( $R_3$ ) für Hallentyp 2 benötigt werden.

b) Bestimmen Sie, wie viel jeweils die Herstellung einer fertig montierten Halle vom Typ  $H_1$  und vom Typ  $H_2$  kostet.

c) Im Lager sind noch 1 712 Tonnen Kies ( $R_1$ ), 424 Tonnen Zement ( $R_2$ ) und 384 Tonnen Stahl ( $R_3$ ) vorrätig. Wasser ist in ausreichender Menge vorhanden.

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, die Rohstoffe  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$  durch Herstellung von Zwischenprodukten restlos aufzubreuchen, und ermitteln Sie, wie viele Tonnen der einzelnen Zwischenprodukte mit diesen Lagerbeständen produziert werden können. Bestimmen Sie zusätzlich, wie viel Wasser zur Herstellung dieser Zwischenprodukte nötig ist.

- d) Bestimmen Sie, wie viele Hallen vom Typ 1 sich aus den Zwischenprodukten aus Teil c) montieren lassen, wenn man keine Halle vom Typ 2 montiert, und bestimmen Sie, wie viele Hallen vom Typ 2 sich aus den Zwischenprodukten aus Teil c) montieren lassen, wenn man keine Halle vom Typ 1 montiert.

Ermitteln Sie, ob man die Anzahl der herstellbaren Hallen vergrößern könnte, wenn man Hallen beider Typs montieren würde.

- e) Ein Mitarbeiter der Firma behauptet, dass jeder Vorrat der Rohstoffe  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$  bei ausreichendem Wasservorrat restlos für die Herstellung von Zwischenprodukten aufgebraucht werden kann. Er argumentiert folgendermaßen:

Wenn  $\vec{v}$  der Vorratsvektor ist, können die Vorräte genau dann restlos aufgebraucht werden, wenn folgende Gleichung lösbar ist:

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,55 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,15 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{v}$$

Dies ist für jeden Vorratsvektor  $\vec{v}$  der Fall, da die Spaltenvektoren der Matrix linear unabhängig sind.

Beurteilen Sie, ob der Mitarbeiter Recht hat.

**Aufgabe 2 Industrieballen**

		Lösungsskizze			Zuordnung, Bewertung		
					I	II	III
a)		<p> <math display="block">A_{RZ} = \begin{pmatrix} 0,7 &amp; 0,55 &amp; 0,5 \\ 0,1 &amp; 0,2 &amp; 0,2 \\ 0,1 &amp; 0,15 &amp; 0,2 \\ 0,1 &amp; 0,1 &amp; 0,1 \end{pmatrix} \quad A_{ZH} = \begin{pmatrix} 240 &amp; 300 \\ 80 &amp; 120 \\ 80 &amp; 180 \end{pmatrix}</math> </p> <p>Rohstoffmengen pro Hallentyp:</p> $A_{RH} = A_{RZ} \cdot A_{ZH} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,55 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,15 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 240 & 300 \\ 80 & 120 \\ 80 & 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 252 & 366 \\ 56 & 90 \\ 52 & 84 \\ 40 & 60 \end{pmatrix}$					
		<p>Für Hallentyp 1 werden 252 Tonnen Kies, für Hallentyp 2 werden 84 Tonnen Stahl benötigt.</p>			20		
b)		<p>Gesamtkosten = Rohstoffkosten + Fertigungskosten der Zwischenprodukte + Montagekosten</p> <p><u>Rohstoffkosten</u> :</p> $(27 \quad 190 \quad 600 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 252 & 366 \\ 56 & 90 \\ 52 & 84 \\ 40 & 60 \end{pmatrix} = (48764 \quad 77562)$					
		<p>Die Rohstoffkosten für Halle 1 betragen 48 764 GE, die Rohstoffkosten für Halle 2 betragen 77 562 GE.</p>					

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p><u>Fertigungskosten der Zwischenprodukte:</u></p> $(80 \ 100 \ 120) \cdot \begin{pmatrix} 240 & 300 \\ 80 & 120 \\ 80 & 180 \end{pmatrix} = (36800 \ 57600)$ <p>Die Fertigungskosten der Zwischenprodukte betragen 36 800 GE für Halle 1 und 57 600 GE für Halle 2.</p> <p><u>Gesamtkosten für Halle 1:</u> 48 764 GE + 36 800 GE + 40 000 GE = 125 564 GE.</p> <p><u>Gesamtkosten für Halle 2:</u> 77 562 GE + 57 600 GE + 48 000 GE = 183 162 GE.</p>		25	
c)	<p>Die Rohstoffe <math>R_1</math> bis <math>R_3</math> können restlos aufgebraucht werden, wenn folgendes Gleichungssystem lösbar ist:</p> $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,55 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,15 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1712 \\ 424 \\ 384 \end{pmatrix}$ <p>Lösen des LGS ergibt: <math>x_1 = 1360, x_2 = 800, x_3 = 640</math>. Es können also 1 360 Tonnen <math>Z_1</math>, 800 Tonnen <math>Z_2</math> und 640 Tonnen <math>Z_3</math> hergestellt werden.</p> <p>Für diese insgesamt 2800 Tonnen Zwischenprodukte werden insgesamt <math>2800 \cdot 0,1 = 280</math> Tonnen Wasser gebraucht</p>		30	
d)	<p>Von Typ 1 können wegen der Wandplatten (<math>Z_1</math>) maximal 5 Hallen montiert werden. Von Typ 2 können wegen der Träger (<math>Z_3</math>) maximal 3 Hallen montiert werden. Mehr als 5 Hallen insgesamt können wegen der Wandplatten (<math>Z_1</math>) nicht montiert werden.</p>		5	10
e)	<p>Der Mitarbeiter hat nicht Recht. Das Gleichungssystem ist zwar in jedem Fall lösbar, aber die Vorräte können nur dann aufgebraucht werden, wenn der Lösungsvektor keine negative Komponente enthält.</p> <p>Auch die Angabe eines Gegenbeispiels ist eine richtige Lösung.</p>			10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20