LK 5 Aplikasi matriks dalam geometri analitik

Petunjuk: ikuti perintah yang diberikan, gunakan kalkulator, spreadsheet, atau aplikasi matematika untuk mempercepat proses komputasi dan manipulasi aljabar.

1. Persamaan garis melalui $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$, dengan $P \neq Q$.

   a. Tentukan persamaan garis melalui $\boldsymbol{P(1,3)}$ dan $Q(-2,1)$.

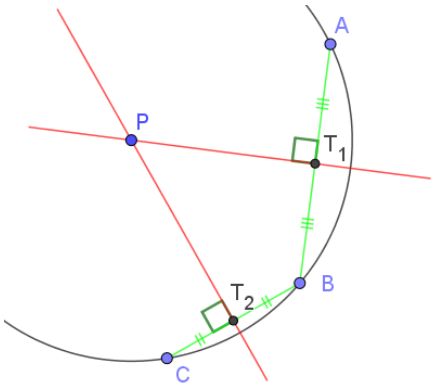
   b. Bandingkan hasil a dengan a dengan $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

   c. Buktikan bahwa persamaan garis melalui $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ dapat dinyatakan dalam
   $$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

   d. Integrasi CT: Buatlah aplikasi spreadsheet untuk menentukan persamaan garis melalui titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$. (tinggal masukkan koordinat P dan Q, diperoleh persamaan garisnya).

2. Persamaan lingkaran melalui $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, dan $C(x_3, y_3)$, dengan A, B, dan C tidak segaris.

   a. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui $\boldsymbol{A(6,0)}$, $\boldsymbol{B(4,-4)}$ dan $\boldsymbol{C(1,-5)}$.
   Gunakan ilustrasi berikut untuk menentukan pusat dan jari-jari lingkaran.
   Ingat, lingkaran berpusat di $P(s,t)$ dan berjari-jari r memiliki persamaan
   $$(x-s)^2 + (y-t)^2 = r^2$$

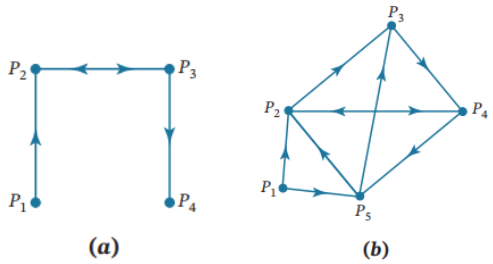


   b. Bandingkan hasil persamaan di atas dengan
   $$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 6^2+0^2 & 6 & 0 & 1 \\ 4+(-4)^2 & 4 & -4 & 1 \\ 1+(-5)^2 & 1 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

   c. Buktikan bahwa lingkaran melalui tiga titik $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, dan $C(x_3, y_3)$ dapat dinyatakan dalam
   $$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

   d. Berdasarkan determinan di atas, buatlah aplikasi spreadsheet untuk menentukan persamaan lingkaran melalui tiga titik $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, dan $C(x_3, y_3)$.

Sekilas Info: Matriks dan Graf Berarah

Graf berarah merupakan himpunan berhingga elemen-elemen $\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_n\}$ bersama-sama dengan himpunan berhingga pasangan berurutan (P_i, P_j) dari elemen-elemen berbeda pada himpunan, dengan tidak ada pasangan berurutan yang berulang.	

Contoh: Matriks menyatakan graf berarah untuk (a) adalah

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{ hanya ada 1 koneksi } (P_1, P_2) \\ \rightarrow \text{ hanya ada 1 koneksi } (P_2, P_3) \\ \rightarrow \text{ ada 2 koneksi } (P_3, P_2) \text{ dan } (P_3, P_4) \\ \rightarrow \text{ tidak ada koneksi dari } P_4 \end{matrix}$$

Berdasarkan contoh di atas, maka untuk gambar b, diperoleh matriks

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriks M^2 menggambarkan koneksi dua langkah pada koneksi antar 2 titik, matriks M^3 menggambarkan koneksi 3 langkah, dan seterusnya. Sebagai contoh,

Pada gambar b, terdapat 3 macam koneksi 3 langkah antara P_1 dan P_4. Kondisi ini ditunjukkan oleh elemen baris pertama kolom ke-4 matriks M^3. Jalur koneksi tersebut adalah:

$$(P_1, P_2), (P_2, P_3), (P_3, P_4)$$
$$(P_1, P_5), (P_5, P_3), (P_3, P_4)$$
$$(P_1, P_5), (P_5, P_2), (P_2, P_4)$$

Anda bisa menyelidiki kemungkinan koneksi 4 langkah.