Problemas sobre representación de funciones

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
2ºBach CCSS	Tema 1: Funciones, límites y derivadas	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

PROBLEMA 1

Sea la función

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}-x^2+4x+3 & si \quad x<4\\ 2x-5 & si \quad x\geq 4\end{cases}}$$

a) Estudie su continuidad y derivabilidad.

b) Estudie su monotonía y calcule sus extremos relativos.

c) Represente la región del plano limitada por la gráfica de la función, las rectas $x=3$, $x=5$ y el eje de abscisas.

a) Los dos tramos de la función vienen expresados por polinomios. Las funciones polinómicas son continuas y derivables en toda la recta real. Solo debemos comprobar la condición de continuidad y de derivabilidad en el punto frontera $x=4$.

$$Existe\ f(4)\rightarrow f(4)=2\cdot 4-5\rightarrow f(4)=3$$

$$L^-=L^+=L$$

$$L^-=\lim_{x\to 4^-}(-x^2+4x+3)=evaluar=-4^2+4\cdot 4+3=3$$

$$L^+=\lim_{x\to 4^+}(2x-5)=evaluar=2\cdot 4-5=3$$

$$f(4)=L\rightarrow 3=3$$

La función es continua en el punto frontera.

Será derivable si coinciden las derivadas laterales en el punto frontera.

$$f'(x)=\begin{cases}-2x+4 & si \quad x<4\\ 2 & si \quad x>4\end{cases}$$

$$f'(4^-)=-2(4)+4=-4$$

$$f'(4^+)=2$$

Las derivadas laterales no coinciden. Encontramos un punto anguloso en $x=4$. La función no es suave (no es derivable) en el punto frontera.

b) Calculamos los puntos críticos igualando la derivada a cero.

$$(-\infty,4)\rightarrow -2x+4=0\rightarrow x=2\in(-\infty,4)$$

$$(4,\infty)\rightarrow 2=0\rightarrow absurdo$$

Miramos el signo de la derivada en los siguientes intervalos:

$$(-\infty,2)\rightarrow f'(0)=4>0\rightarrow f(x)\ estrictamente\ creciente$$

$$(2,4)\rightarrow f'(3)=-2<0\rightarrow f(x)\ estrictamente\ decreciente$$

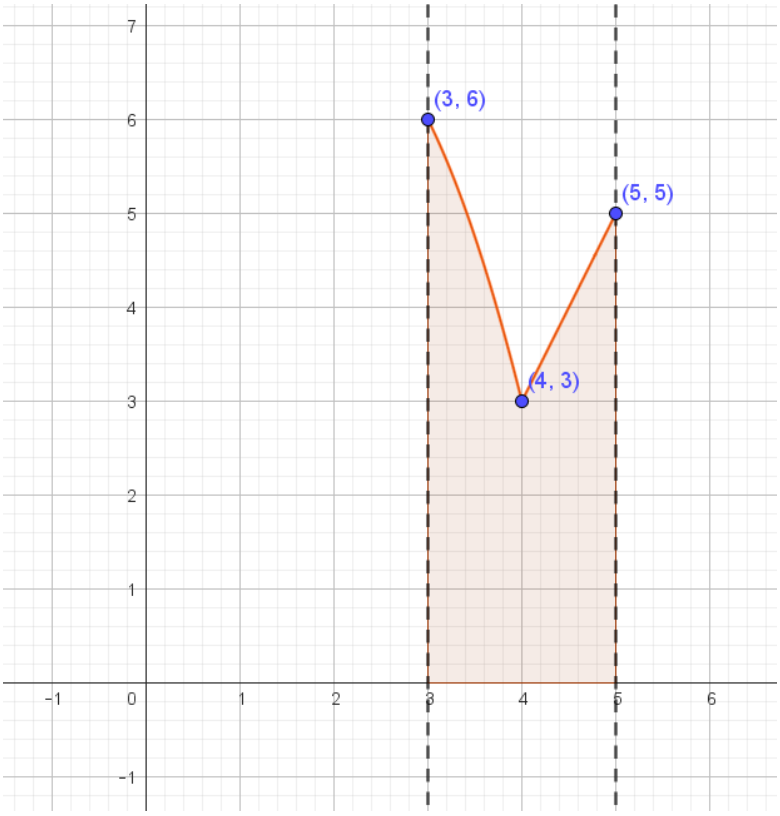
$$(4,\infty)\rightarrow f'(10)=2>0\rightarrow f(x)\ estrictamente\ creciente$$

$$x=2\ máximo\ relativo\rightarrow imagen\rightarrow f(2)=-2^2+4(2)+3\rightarrow f(2)=7\rightarrow punto\ (2,7)$$

c) Dibujamos la gráfica de la función en el extremo [3,5].

A la izquierda de x=4 tenemos la parábola, donde ya hemos sacado su vértice (máximo relativo).

A la derecha de x=4 tenemos la recta, que se puede dibujar obteniendo dos puntos.



PROBLEMA 2

La superficie de ampliación de un parque de atracciones, en decímetros cuadrados, coincide con el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 6x$ y $g(x) = \frac{x^2}{5}$. Represente gráficamente la superficie de ampliación del parque de atracciones.

Las dos funciones son parabólicas. La gráfica de $f(x) = -x^2 + 6x$ se obtiene con los cortes con los ejes y con el vértice (extremo relativo).

$$-x^2 + 6x = 0 \rightarrow x = 0, x = 6 \rightarrow cortes\ (0,0), (6,0)$$

$$f(0) = 0 \rightarrow (0,0)$$

$$f'(x) = -2x + 6 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow -2x + 6 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow máximo\ relativo\ de\ una\ parábola\ convexa$$

$$Imagen\ de\ x = 3 \rightarrow f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 = 9 \rightarrow (3,9)\ vértice\ que\ es\ máximo\ relativo\ y\ absoluto$$

La gráfica de $g(x) = \frac{x^2}{5}$ se deduce de la gráfica de $y = x^2$, sabiendo que las ramas de la parábola serán más abiertas por estar dividiendo el polinomio de grado dos por un número mayor que 1.

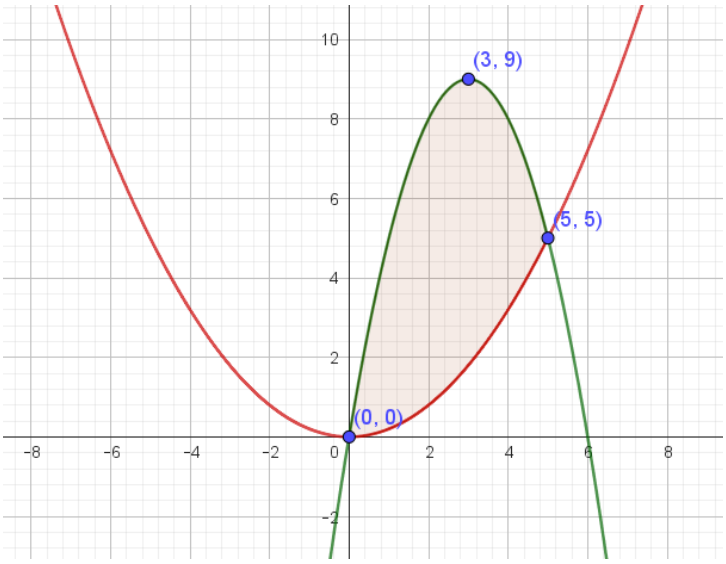
Los puntos de corte de ambas funciones se obtienen igualando las fórmulas de ambas funciones

.

$$f(x) = g(x)$$

$$-x^2 + 6x = \frac{x^2}{5} \rightarrow -5x^2 + 30x = x^2 \rightarrow -6x^2 + 30x = 0 \rightarrow x = 0, x = 5$$

$$Imagen\ puntos\ de\ corte: g(0) = 0\ , g(5) = 5 \rightarrow puntos\ (0,0), (5,5)$$



PROBLEMA 3

Sean las funciones:

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}2-x^2 & si\quad -1\le x\le 1\\(x-2)^2 & si\quad 1<x\le 3\end{cases}}$$

$$\boldsymbol{g(x)=1\ \ si\ -1\le x\le 3}$$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de ambas funciones en sus dominios.

b) Represente el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.

a) Los dos tramos de la función $f(x)$ vienen expresados por polinomios. Las funciones polinómicas son continuas y derivables en toda la recta real. Solo debemos comprobar la condición de continuidad y de derivabilidad en los puntos frontera.

$$Existe\ f(-1)\to f(-1)=2-(-1)^2\to f(-1)=1$$

$$Solo\ tiene\ sentido\ plantear\ L^+=L\ porque\ no\ hay\ función\ a\ la\ izquierda\ de\ x=-1$$

$$L^+=\lim_{x\to(-1)^+}(2-x^2)=evaluar=1$$

$$f(-1)=L\to 1=1$$

La función es continua en $x=-1$.

$$Existe\ f(1)\to f(1)=2-(1)^2\to f(1)=1$$

$$L^-=L^+=L$$

$$L^-=\lim_{x\to(1)^-}(2-x^2)=evaluar=1$$

$$L^+=\lim_{x\to(1)^+}(x-2)^2=evaluar=1$$

$$f(1)=L\to 1=1$$

La función es continua en $x=1$.

$$Existe\ f(3)\to f(3)=(3-2)^2\to f(3)=1$$

$$Solo\ tiene\ sentido\ plantear\ L^-=L\ porque\ no\ hay\ función\ a\ la\ derecha\ de\ x=3$$

$$L^-=\lim_{x\to(3)^-}(2-x^2)=evaluar=1$$

$$f(3)=L\to 1=1$$

La función es continua en $x=3$.

La derivabilidad se estudia sobre la función derivada.

$$f'(x)=\begin{cases}-2x & si\quad -1<x<1\\2(x-2) & si\quad 1<x<3\end{cases}$$

La derivada lateral a la derecha de $x=-1$ tiende a 2.

La derivada lateral a la izquierda de $x=3$ tiende a 2.

En el punto frontera $x=1$ estudiamos las derivadas laterales.

$$f'(1^-)=-2$$

$$f'(1^+)=-2$$

Por lo tanto, la función es derivable en $x=1$.

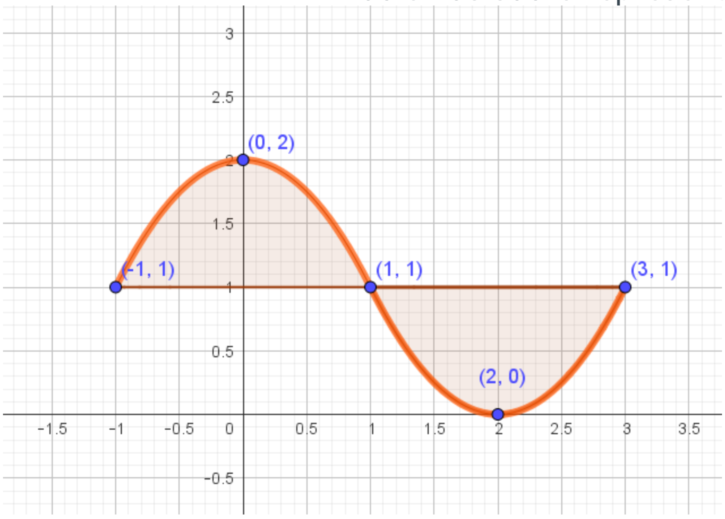
La función $g(x)$ es continua y derivable por ser un polinomio de grado cero.

b) La parábola $f(x)=2-x^2$ se puede dibujar subiendo dos unidades la gráfica de la parábola cóncava $y=-x^2$.

La parábola $f(x)=(x-2)^2$ es un desplazamiento de dos unidades hacia la derecha de la parábola convexa $y=x^2$.

La función $f(x)$ es continua y suave en $x=1$.

La función $g(x)=1$ es una recta horizontal que pasa por el punto $(0,1)$.


(0, 2)
(-1, 1)
(1, 1)
(3, 1)
(2, 0)

PROBLEMA 4

Se considera la función $f(x) = 1 - \frac{4}{3+x}$

a) Halle el dominio de la función y los puntos de corte de su gráfica con los ejes de coordenadas.

b) Calcule las asíntotas de la función.

c) Obtenga los puntos donde la recta tangente a la gráfica de la función tiene pendiente 1.

d) Estudie la curvatura de la función.

a) Encontramos un número más un cociente de polinomios, por lo que el dominio es igual a toda la recta real menos los valores que anulan al denominador:

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$$

Cortes con el eje horizontal:

$$f(x) = 0 \to 1 - \frac{4}{3+x} = 0 \to 1 = \frac{4}{3+x} \to 3 + x = 4 \to x = 1 \to (1,0)$$

Corte con el eje vertical:

$$f(0) = 1 - \frac{4}{3+0} \to f(0) = 1 - \frac{4}{3} \to f(0) = -\frac{1}{3} \to (0, -1/3)$$

b) Encontramos AV en la recta vertical $x = -3$.

$$L^- = \lim_{x \to (-3)^-} (1 - \frac{4}{3+x}) = evaluar = 1 - \frac{4}{0^-} = 1 + \infty = \infty$$

$$L^+ = \lim_{x \to (-3)^+} (1 - \frac{4}{3+x}) = evaluar = 1 - \frac{4}{0^+} = 1 - \infty = -\infty$$

Si escribimos la función en una sola fracción:

$$f(x) = 1 - \frac{4}{3+x} = \frac{3+x-4}{3+x} = \frac{x-1}{3+x}$$

Encontramos un cociente de polinomios del mismo grado, por lo que tendremos AH y no AO. Además, la AH cuando x tiende a infinito coincide con la AX cuando x tiende a menos infinito.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{3+x} = evaluar = \frac{\infty}{\infty}$$

La indeterminación se resuelve dividiendo los coeficientes que multiplican a la máxima potencia, por ser el mismo grado en numerador y en denominador. En consecuencia, existe AH en la recta horizontal $y = 1$.

c) Por la interpretación geométrica de la derivada, sabemos que la derivada de la función en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto. Por lo que debemos igualar la derivada a 1.

$$f(x) = 1 - \frac{4}{3+x}$$

$$f'(x) = \frac{4}{(3+x)^2} \to f'(x) = 1 \to \frac{4}{(3+x)^2} = 1 \to 4 = (3+x)^2 \to x = -5, x = -1$$

Obtenemos la imagen de esos puntos.

$$f(-1) = 1 - \frac{4}{3-1} \to f(-1) = -1 \to punto\ (-1,-1)$$

$$f(-5) = 1 - \frac{4}{3-5} \to f(-5) = 3 \to punto\ (-5,3)$$

d) La curvatura se estudia mirando el signo de la segunda derivada.

$$f'(x) = \frac{4}{(3+x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{4 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (3+x)}{(3+x)^4} \rightarrow f''(x) = \frac{-8}{(3+x)^3}$$

La segunda derivada nunca se anula, ya que al hacer $f''(x) = 0 \rightarrow -8 = 0 \rightarrow absurdo$. Por lo tanto, no hay puntos de inflexión.

Pero sí hay curvatura:

$$(-\infty, -3) \rightarrow x = -10 \rightarrow f''(-10) > 0 \rightarrow f(x)\ convexa$$

$$(-3, \infty) \rightarrow x = 0 \rightarrow f''(0) < 0 \rightarrow f(x)\ cóncava$$

PROBLEMA 5

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & si \;\; x < 2 \\ x^2 - 2x & si \;\; x \geq 2 \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función.

b) Represente el recinto limitado por las rectas $y = 2x$, $x = -1$, $x = 1$ y la gráfica de la función.

a) Los dos tramos de la función $f(x)$ vienen expresados por polinomios. Las funciones polinómicas son continuas y derivables en toda la recta real. Solo debemos comprobar la condición de continuidad y de derivabilidad en el punto frontera.

$$Existe\; f(2) \rightarrow f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 \rightarrow f(2) = 0$$

$$L^- = \lim_{x \to (2)^-} (-x^2 + 2x) = evaluar = 0$$

$$L^+ = \lim_{x \to (2)^+} (x^2 - 2x) = evaluar = 0$$

$$f(2) = L \rightarrow 0 = 0$$

La función es continua en $x = 2$.

La derivabilidad se estudia sobre la función derivada.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 2 & si \;\; x < 2 \\ 2x - 2 & si \;\; x > 2 \end{cases}$$

La derivada lateral a la izquierda de $x = 2$ tiende a $f'(2^-) = -2 \cdot 2 + 2 = -2$.

La derivada lateral a la derecha de $x = 2$ tiende a $f'(2^+) = 2 \cdot 2 - 2 = 2$.

Las derivadas laterales no coinciden, por lo que la función no es derivable en $x = 2$.

b) La recta $y = 2x$ pasa por el origen de coordenadas. Tiene una pendiente doble a la bisectriz del primer y tercer cuadrante. Pasa, por ejemplo, por los puntos $(-1, -2), (0,0)\; y\; (1,2)$.

Cada tramo de la función $f(x)$ es una parábola. De hecho, las fórmulas de ambas parábolas son opuestas entre sí.

$$si\; x < 2$$

$$y = -x^2 + 2x$$

Parábola cóncava

Corte con eje horizontal: $y = 0 \rightarrow -x^2 + 2x = 0 \rightarrow x = 0, x = 2 \rightarrow (0,0), (2,0)$

Vértice: $y' = -2x + 2 \rightarrow y' = 0 \rightarrow -2x + 2 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow máximo\; relativo\; y\; absoluto\; en\; (1,1)$

$$si\; x \geq 2$$

$$y = x^2 - 2x$$

Parábola convexa

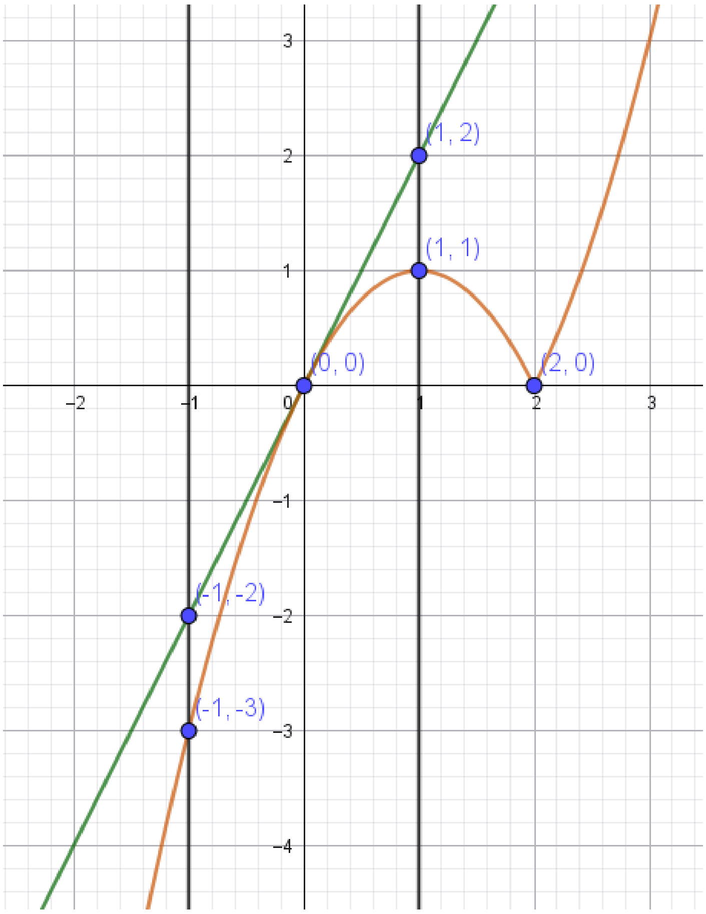
Corte con eje horizontal: $y = 0 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow x = 0, x = 2 \rightarrow (0,0), (2,0)$

Vértice: $y' = 2x - 2 \rightarrow y' = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow mínimo\; relativo\; y\; absoluto\; en\; (1, -1)$

Dando valores x=-1 y x=1 en el tramo de la función para $x < 2$, podemos obtener los cortes de las rectas verticales con la función $f(x)$ y con la recta $y = 2x$.

$$si\; x = -1 \rightarrow f(-1) = -3 \rightarrow y(1) = -2$$

$$si\; x = 1 \rightarrow f(1) = 1 \rightarrow y(1) = 2$$


(1, 2)
(1, 1)
(0, 0)
(2, 0)
(-1, -2)
(-1, -3)

PROBLEMA 6

Sea la función

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}3+e^{x} & si\ \ x<1\\ x^{2}+ax+2 & si\ \ x\geq 1\end{cases}}$$

a) Determine el valor de a para que la función sea continua en toda la recta real. Para ese valor de a, ¿es la función derivable?

b) Para $a=-3$, calcule la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=0$.

c) Para $a=-3$, represente la región limitada por la gráfica de la función, las rectas $x=2$, $x=4$ y el eje de abscisas.

a) En el primer tramo tenemos un polinomio más una exponencial. En el segundo tramo, un polinomio. Por lo tanto, son continuas y derivables en los intervalos abiertos a la izquierda de $x=1$ y a la derecha de $x=1$.

Estudiemos la continuidad en el punto frontera.

$$Existe\ f(1)\to f(1)=1^{2}+a\cdot 1+2\to f(1)=3+a$$

$$L^{-}=\lim_{x\to(1)^{-}}(3+e^{x})=evaluar=3+e$$

$$L^{+}=\lim_{x\to(1)^{+}}(x^{2}+ax+2)=evaluar=3+a$$

$$L^{-}=L^{+}=L\to 3+e+3+a\to a=e$$

$$f(1)=L\to 3+a=3+a$$

Para $a=e$ la función es continua en el punto frontera.

Calculamos la derivada, tomando $a=e$:

$$f'(x)=\begin{cases}e^{x} & si\ \ x<1\\ 2x+e & si\ \ x>1\end{cases}$$

$$f'(1^{-})=e^{1}=e$$

$$f'(1^{+})=2+e$$

Las derivadas laterales no son iguales, por lo que la función no es derivable en el punto frontera $x=1$.

b) Para $a=-3$ tenemos:

$$f(x)=\begin{cases}3+e^{x} & si\ \ x<1\\ x^{2}-3x+2 & si\ \ x\geq 1\end{cases}$$

Para estudiar la recta tangente en $x=0$ necesitamos solo el tramo de la función a la izquierda de $x=1$.

La ecuación de la recta tangente en $x=0$ se calcula con ayuda de la interpretación geométrica de la derivada.

$$f'(0)=\frac{y-f(0)}{x-0}$$

$$e^{0}=\frac{y-(3+e^{0})}{x-0}\to 1=\frac{y-4}{x}\to x=y-4\to x+4=y$$

c) Para $a=-3$ tenemos:

$$f(x)=\begin{cases}3+e^{x} & si\ \ x<1\\ x^{2}-3x+2 & si\ \ x\geq 1\end{cases}$$

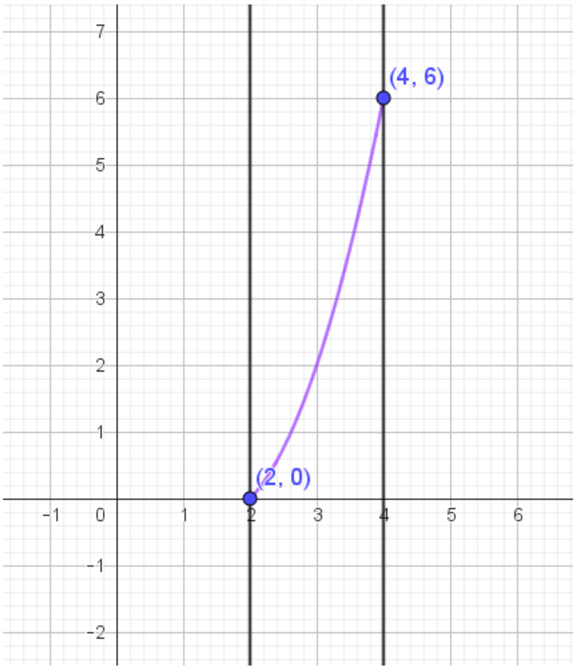
Debemos estudiar la gráfica de la parábola, por estar el intervalo $[2,4]$ a la derecha de $x=1$.

Sacamos los cortes de la parábola convexa con el eje horizontal.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = 1, x = 2 \rightarrow (1{,}0), (2{,}0)$$

$$Vértice: f'(x) = 2x - 3 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow mínimo\ relativo$$

$$Imagen\ en\ los\ extremos\ del\ intervalo: f(2) = 0, f(4) = 6$$



PROBLEMA 7

Trinidad, una persona ahorradora, deposita 5.000€ en un fondo de inversión y el capital final que obtiene cuando transcurren t años viene dado por la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(t) = \begin{cases} 5.000 \cdot (1 + 0{,}05\, t) & si\ \ 0 \leq t \leq 1 \\ 5.000 \cdot 1{,}05^{t} & si\ \ t > 1 \end{cases}}$$

a) ¿Cuánto tiempo debe mantener invertido el dinero si el capital final que se obtiene es de 5.931,19€?

b) Calcule los intereses que obtiene Trinidad entre el año 2 y el año 4, si se conoce que los intereses que genera esta inversión entre el año $\boldsymbol{t_1}$ y el año $\boldsymbol{t_2}$ vienen dados por $\boldsymbol{I = f(t_2) - f(t_1)}$.

c) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función $\boldsymbol{f}$.

d) Estudie la monotonía de la función $\boldsymbol{f}$ y esboce su gráfica.

a) Buscamos que la imagen de la función sea igual a 5.931,19. Por lo tanto:

$$f(t) = 5.931{,}19$$

Tenemos dos tramos de funciones. Por lo que debemos igualar ambas funciones a la imagen.

$$[0,1] \to 5.000 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot t) = 5.931{,}19 \to 1 + 0.05 \cdot t = 1.18 \to 0.05 \cdot t = 0.18 \to t = 3{,}6 \notin [0,1]$$

$$(1, \infty) \to 5.000 \cdot 1{,}05^{t} = 5.931{,}19 \to 1{,}05^{t} = 1{,}18 \to \ln(1{,}05^{t}) = \ln(1{,}18) \to t \cdot \ln(1{,}05) = \ln(1{,}18) \to t = 3{,}39\ años$$

b)

$$f(2) = 5.000 \cdot 1{,}05^{2} = 5.512{,}5\ €$$

$$f(4) = 5.000 \cdot 1{,}05^{4} = 6.077{,}5\ €$$

Los intereses se obtienen con la diferencia de ambos valores:

$$I = 565\ €$$

c) Los polinomios y las exponenciales son funciones continuas y derivables en toda la recta real. Por lo que solo debemos estudiar lo que pasa en el punto frontera $t = 1$.

$$f(1) = 5.000 \cdot (1 + 0{,}05) = 5.250$$

$$L^{-} = \lim_{t \to 1^{-}} (5.000 \cdot [1 + 0{,}05 \cdot t]) = 5.250$$

$$L^{+} = \lim_{t \to 1^{+}} (5.000 \cdot 1{,}05^{t}) = 5.250$$

$$L^{-} = L^{+} = L$$

$$f(1) = L \to 5.250 = 5.250$$

Hacemos la derivada de la función:

$$f'(t) = \begin{cases} 5.000 \cdot 0{,}05 & si\ \ 0 < t < 1 \\ 5.000 \cdot 1{,}05^{t} \cdot \ln(1{,}05) & si\ \ t > 1 \end{cases} \to f'(t) = \begin{cases} 250 & si\ \ 0 < t < 1 \\ 243{,}95 \cdot 1{,}05^{t} & si\ \ t > 1 \end{cases}$$

La función es suave en el punto frontera, si las derivadas laterales son iguales:

$$f'(1^{-}) = \lim_{t \to 1^{-}} (250) = 250$$

$$f'(1^{+}) = \lim_{t \to 1^{-}} (243{,}95 \cdot 1{,}05^{t}) = 256{,}15$$

Las derivadas laterales no coinciden, por lo que la función no es derivable en el punto frontera.

d) Para estudiar la monotonía obtenemos los puntos críticos, igualando la primera derivada a cero.

$$f'(t) = 0$$

$$(0,1) \to f'(t) = 250 \ \ \to 250 = 0 \to Absurdo \to no\ hay\ extremos\ relativos$$

$$(1,\infty) \to f'(t) = \ 243{,}95 \cdot 1{,}05^t \to 243{,}95 \cdot 1{,}05^t = 0 \to la\ exponencial\ nunca\ se\ anula$$

No hay extremos relativos. Miramos el signo de la derivada para conocer el crecimiento o decrecimiento.

$$(0,1) \to f'(t) = 250 \ \to derivada\ siempre\ positiva \ \to función\ estrictamente\ creciente$$

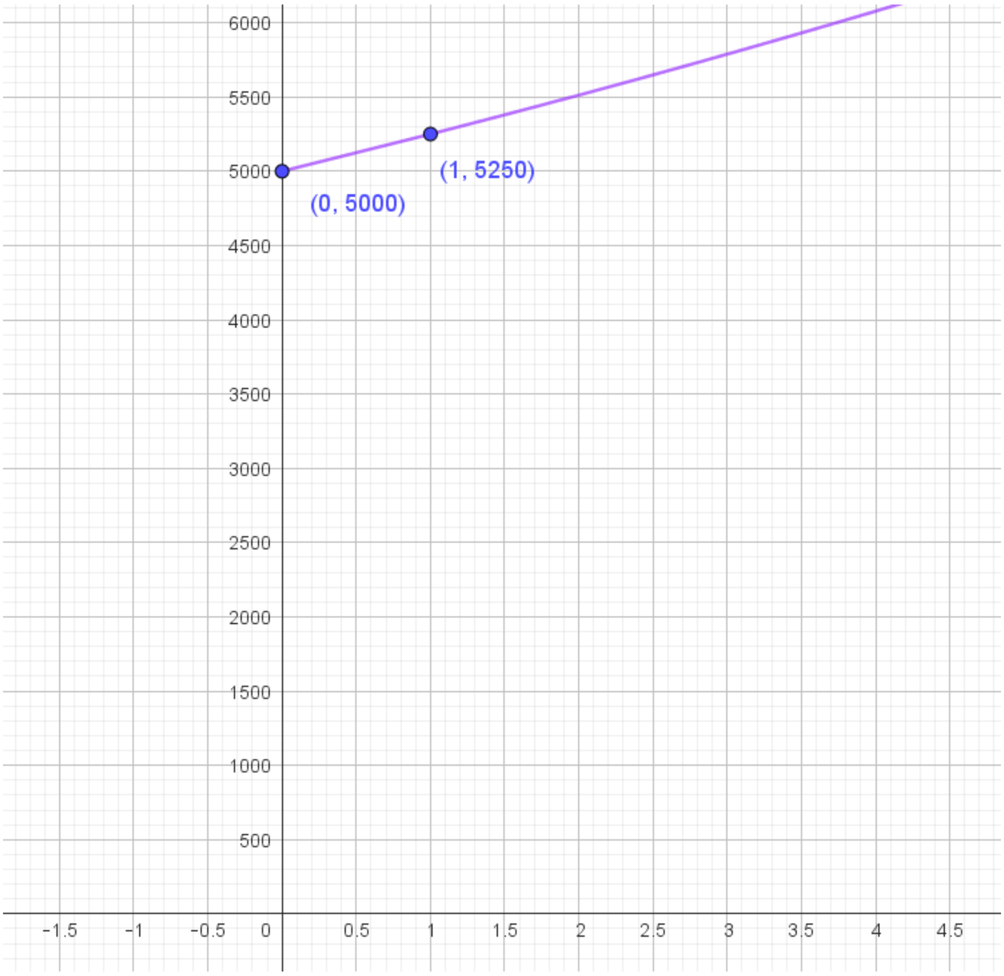
$$(1,\infty) \to f'(t) = \ 243{,}95 \cdot 1{,}05^t \to sustituir\ t = 2 \to f(2) > 0 \to estrictamente\ creciente$$

Por lo tanto, tenemos la gráfica de una recta en el intervalo $[0,1]$. Y una recta se dibuja con un par de puntos.

$$t = 0 \to f(0) = 5.000 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot 0) = 5.000$$

$$t = 1 \to f(1) = 5.000 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot 1) = 5.250$$

La función es continua en el punto frontera. Y a partir de $t = 1$ tenemos la gráfica de una exponencial. Que hemos demostrado que es estrictamente creciente en todos su dominio.



PROBLEMA 8

Un periódico digital ha publicado una noticia de última hora. El número de personas que han visto la noticia t horas después de su lanzamiento viene modelado por la función:

$$N(t) = 500.000 \cdot \left(1 - e^{-0.2 \cdot t}\right)$$

Para $t > 0$.

a) Estudie la monotonía y la curvatura de la función N.

b) Represente gráficamente la función N y describa su tendencia a lo largo del tiempo.

c) ¿Cuánto tiempo ha debido de pasar para que la noticia haya sido vista por 450.000 personas?

d) La velocidad de difusión de la noticia (número de personas por hora que han visto la publicación) es $N'(t)$. ¿Qué conclusión se obtiene al comparar $N'(t)$ en los instantes $t = 1$ y $t = 10$?

PROBLEMA 9

La velocidad media del viento en la zona de Sierra Nevada, prevista para cierto día, viene dada por la función $v(t)$ expresada en km/h, donde t es el tiempo expresado en horas:

$$v(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 60 & si \quad 0 \leq t \leq 10 \\ -t^2 + 32t - 140 & si \quad 10 < t \leq 24 \end{cases}$$

a) Comprueba que la función v es continua y derivable.

b) Represente gráficamente la función, estudiando previamente la monotonía y calculando los extremos absolutos.

c) La Agencia Estatal de Meteorología emite avisos de alerta por vientos siguiendo el código de colores: naranja para vientos entre 100 y 140 km/h, y rojo para vientos de más de 140 km/h. Según la previsión, indique si se debe emitir alguna alerta naranja en Sierra Nevada ese día y durante qué horas estaría activa. ¿Se emitiría alerta roja?

PROBLEMA 10

Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=\frac{x}{x+2}$.