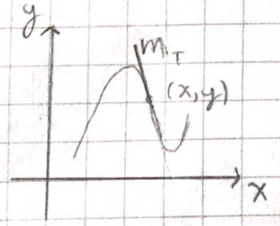
Sección 1.1

27. La pendiente de la gráfica de g en el punto (x,y) es la suma de x y y.

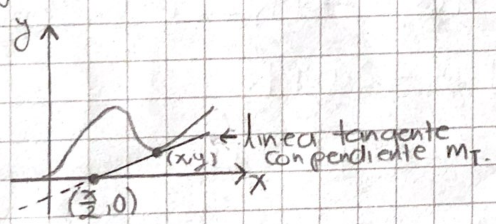


m_T= Pendiente tangente

$$m_T = x+y$$
$$\downarrow$$
$$\frac{dy}{dx} = x+y \;//$$

• La pendiente de una gráfica siempre es la pendiente de la recta tangente, y la pendiente tangente es la derivada de la curva en un punto arbitrario.

28. La línea tangente a la gráfica g en el punto (x,y) corta el eje de las x en el punto (x/2,0).



• Me dan un punto (x,y) donde su línea tangente se extiende hasta el punto $(\frac{x}{2},0)$. Si calculo la recta entre estos dos puntos, hallaré la pendiente.

$$m_T \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y-0}{x-x/2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x/2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \;//$$

Solución de la ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

$$\frac{dy}{2y} = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{2y} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{2} \ln y = \ln x + C$$

$$\ln y = 2 \ln x + 2C \quad \text{(Multiplico x2)}$$

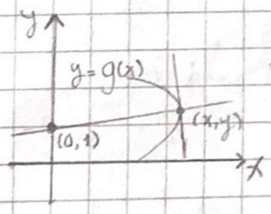
$$\ln y = \ln x^2 + C_1$$

$$e^{\ln y} = e^{\ln x^2 + C_1} \rightarrow e^{\ln x^2} \cdot e^{C_1}$$

$$y = M \cdot x^2 \rightarrow e^{C_1} = M$$

R/ la familia de parabolas con vertice en (0,0) son las curvas que satisfacen que línea tangente en un punto (x,y) arbitrario, interseca el eje X en el punto $(x/2, 0)$.

29. Toda línea recta normal a la gráfica de g pasa a través del punto (0,1). Proponga: ¿Cómo sería la gráfica de la función g?



— línea tangente
— recta normal (ortogonal) a la curva $y = g(x)$ en $P(x,y)$

$$M_{\text{recta normal}} \cdot M_{\text{línea tangente}} = -1$$

$$\frac{y-1}{x-0} \cdot \frac{dy}{dx} = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y-1}$$

$$dy = \frac{x}{(1-y)} dx$$

$$\int (1-y)\, dy = \int x \, dx$$

$$y - y^2/2 = x^2/2 + C$$

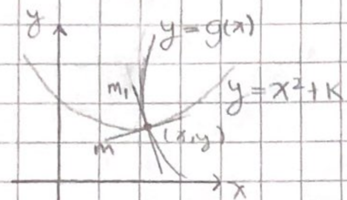
$$\text{(Multiplico x2)} \quad 2y - y^2 = x^2 + K \rightarrow K = 2C$$

$$0 = x^2 + y^2 - 2y + K$$

$$0 = x^2 + y^2 \underbrace{- 2y + 1}_{(\text{mitad})^2} - 1 + K$$

Circulos de radio $\sqrt{1-K}$ si $K < 1$ $\quad 1-K = x^2 + (y-1)^2 \leftarrow 0 = x^2 + (y-1)^2 - 1 + K$

30. La gráfica g es normal (ortogonal) a toda curva de la forma $y = x^2 + k$ (siendo k constante) en el punto donde se encuentra.



$$m \cdot m_1 = -1$$

$$2x \cdot \frac{dy}{dx} = -1$$

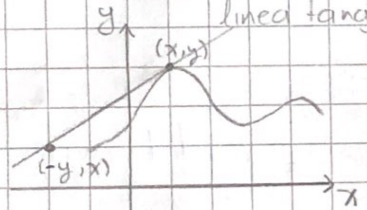
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2x}$$

$$\int 1\,dy = \int \frac{-1}{2x}\,dx$$

$$y = -\tfrac{1}{2}\ln x + C$$

$$y = \ln x^{-1/2} + C$$

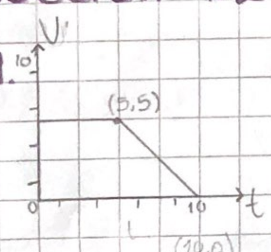
31. La línea tangente a la gráfica de g en (x,y) pasa a través del punto (−y, x)



$$m_T = \frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{x - (-y)} = \frac{y - x}{x + y}$$

Sección 1.2

19.



Recordemos:

- Si tengo la V(t) (velocidad respecto al tiempo) y la integro, obtengo la función posición,

$$\int v(t)\,dt = x(t)$$

ya que:

$$V = \frac{dx}{dt}$$

La velocidad es una función definida a trozos

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = \begin{cases} 5 & ; 0 \le t \le 5 \\ -t + 10 & ; 5 \le t \le 10 \end{cases} \rightarrow$$

saco la ecuación por punto pendiente:

$$V - 0 = m\,(t - 10)$$

$$V - 0 = \frac{5-0}{5-10}\,(t - 10)$$

$$V = -1\,(t - 10) \Rightarrow V = 10 - t$$

- V(t) es continua.

• Como la velocidad es una función continua, entonces esta no va a tener saltos. Por lo tanto, cuando $t=5$ se puede evaluar en cualquiera de las dos rectas.

$\frac{dx}{dt} = V(t)$ → es la derivada de la posición respecto al tiempo. Por lo tanto, al integrar $V(t)$ se halla $x(t)$.

$$x(t) = \begin{cases} 5t + C_1 \ ; 0 \leq t \leq 5 \\ -t^2/2 + 10t + C_2 \ ; 5 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

El enunciado nos dice que como $x(0)=0$, entonces:

$$5(0)^2 + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

Por lo tanto:

$$x(t) = \begin{cases} 5t \ ; 0 \leq t \leq 5 \\ -t^2/2 + 10t + C_2 \ ; 5 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

Como $V(t)$ es una función continua y $V(t) = dx/dt$, entonces $x(t)$ es continua. Por eso $x(t)$ debe satisfacer los criterios de continuidad.

Los criterios de continuidad nos permiten hallar C_2. En particular la función $x(t)$ debe ser continua en $t=5$

• $x(5) = \quad 5(5) = -\frac{(5)^2}{2} + 10(5) + C_2$

$$25 = 75/2 + C_2$$

$$-25/2 = C_2$$

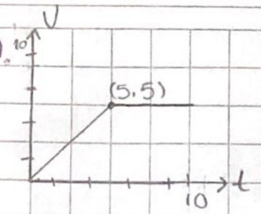
• $\lim_{t \to 5^-} 5t = \lim_{t \to 5} -t^2/2 + 10t + C_2 \Rightarrow -25 = 75/2 + C_2$

$$-25/2 = C_2$$

$x(t)$ es continua en $t=5$ si $C_2 = -25/2$. Por lo tanto:

$$x(t) = \begin{cases} 5t - 125 \ ; 0 \leq t \leq 5 \\ -t^2/2 + 10t - 275/2 \ ; 5 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

es una función continua en $(0,10)$

20. 

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = \begin{cases} t \,;\ 0 \le t \le 5 \\ 5 \,;\ 5 \le t \le 10 \end{cases}$$

$\rightarrow V - 0 = m(t-0)$

$V = \frac{5-0}{5-0}(t-0)$

$V = 1(t-0)$

$V = t$

$$V(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} + C_1 \,;\ 0 \le t \le 5 \\ 5t + C_2 \,;\ 5 \le t \le 10 \end{cases}$$

Como el enunciado no dice que $x(0) = 0$, entonces:

$$\frac{0^2}{2} + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t^2 \,;\ 0 \le t \le 5 \\ 5t + C_2 \,;\ 5 \le t \le 10 \end{cases}$$

Como $V(t)$ es una funcion continua en $(0,10)$ y $V(t) = dx/dt$, entonces la funcion posicion $x(t)$ es continua en $(0,10)$ en particular la funcion $x(t)$ debe ser continua en $t = 5$

- $x(5) = \frac{1}{2}(5)^2 = 5(5) + C_2$

$$25/2 = 25 + C_2$$

$$-25/2 = C_2$$

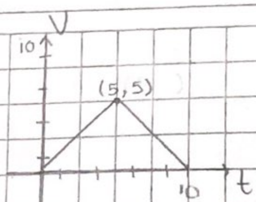
- $\lim\limits_{t \to 5^-} \frac{1}{2} t^2 = \lim\limits_{t \to 5^+} 5t + C_2 \Rightarrow 25/2 = 25 + C_2$
$-25/2 = C_2$

$x(t)$ es continua en $t = 5$ si $C_2 = -25/2$. Por lo tanto:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t^2 \,;\ 0 \le t \le 5 \\ 5t - 25/2 \,;\ 5 \le t \le 10 \end{cases}$$

es una funcion continua en $(0,10)$.

21.



$$V(t) = \frac{dx}{dt} = \begin{cases} t & ; 0 \leq t \leq 5 \\ -t+10 & ; 5 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 + C_1 & ; 0 \leq t \leq 5 \\ -\frac{1}{2}t^2 + 10t + C_2 & ; 5 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

El enunciado nos dice que $x(0) = 0$ entonces:

$$\tfrac{1}{2}(0)^2 + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & ; 0 \leq t \leq 5 \\ -\frac{1}{2}t^2 + 10t + C_2 & ; 5 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

Como $V(t)$ es una función continua en $(0,10)$ y $V(t) = dx/dt$, entonces la función posición $x(t)$ es continua en $(0,10)$ en particular la función $x(t)$ debe ser continua en $t=5$.

- $x(5) = \frac{1}{2}(5)^2 = -\frac{1}{2}(5)^2 + 10(5) + C_2$

$$\tfrac{25}{2} = \tfrac{75}{2} + C_2$$

$$-25 = C_2$$

- $\lim\limits_{t \to 5^-} \frac{1}{2}t^2 = \lim\limits_{t \to 5^+} -\frac{1}{2}t^2 + 10t + C_2 \Rightarrow \frac{25}{2} = \frac{75}{2} + C_2$

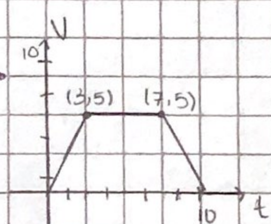
$$-25 = C_2$$

$x(t)$ es continua en $t=5$ si $C_2 = -25$. Por lo tanto:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & ; 0 \leq t \leq 5 \\ -\frac{1}{2}t^2 + 10t - 25 & ; 5 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

es una función continua en $(0,10)$

22.



$$V(t) = \frac{dx}{dt} = \begin{cases} \frac{5}{3}t & ; 0 \leq t \leq 3 \\ 5 & ; 3 \leq t \leq 7 \\ -\frac{5}{3}t + \frac{50}{3} & ; 7 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

- $V - 0 = \frac{5-0}{3-0}(t-0)$

$V = \frac{5}{3}t$

- $V - 0 = \frac{5-0}{7-10}(t-10)$

$V = -\frac{5}{3}t + \frac{50}{3}$

$$x(t) = \begin{cases} 5/6\, t^2 + C_1 \; ; \; 0 \leq t \leq 3 \\ 5t + C_2 \; ; \; 3 \leq t \leq 7 \\ -5/6\, t^2 + 50/3\, t + C_3 \; ; \; 7 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

Como $V(t)$ es una función continua en $(0,10)$ y $V(t) = dx/dt$, entonces la función posición $x(t)$ es continua en $(0,10)$ en particular la función $x(t)$ debe ser continua en $t=3$ y $t=7$

• $\lim\limits_{t \to 3^-} 5/6\, t^2 = \lim\limits_{t \to 3^+} 5t + C_2$

$15/2 = 15 + C_2$ en $t=3$ los límites laterales deben ser iguales

$-15/2 = C_2$

• $\lim\limits_{t \to 7^-} 5t - 15/2 = \lim\limits_{t \to 7^+} -5/6 t^2 + 50\,3\, t + C_3$

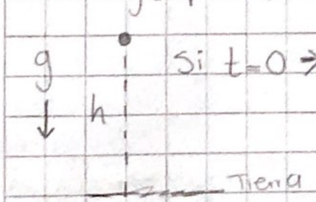
$35 - \frac{15}{2} = \frac{-245}{6} + \frac{350}{3} + C_3$

$-145/3 = C_3$

Para que la función sea continua en $t=3$ y $t=7$ y por consiguiente en $(0,10)$ es suficiente que $C_2 = -15/2$ y $C_3 = -145/3$

$$x(t) \begin{cases} 5/6\, t^2 \; ; \; 0 \leq t \leq 3 \\ 5t - 15/2 \quad 3 \leq t \leq 7 \\ -5/6\, t^2 + 50/3\, t - 145/3 \; ; \; 7 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

35. Se lanza una piedra, desde la posición de reposo ($V(0)=0$), a una altura inicial h ($y(0)=h$) arriba de la superficie de la Tierra. Mostrar que la velocidad con la cual golpea el piso es $V = \sqrt{2gh}$.



Si $t=0 \Rightarrow V=0$

Movimiento caída libre:

$$a = -g$$

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

$$V(t) = \int -g \, dt$$

$$V(t) = -gt + C_1$$

$V(0) = -g(0) + C_1$ ← recordamos que $V(0) = 0$

$$0 = C_1$$

$$V(t) = -gt$$

$$\frac{dy}{dt} = -gt$$

$$y(t) = \int -gt \, dt$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + C_2$$

→ Como $y(0) = h$: $y(0) = \frac{1}{2} g(0)^2 + C_2$

$$h = C_2$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h$$

Para hallar la velocidad de impacto debemos primero encontrar el tiempo que la piedra demora cayendo t_c y t_c se halla cuando $y = 0$.

$$-\frac{1}{2} g t_c^2 + h = 0$$

$$h = \frac{1}{2} g t_c^2$$

$$\frac{2h}{g} = t_c^2$$

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} = t_c \quad (t_c > 0)$$

→ Velocidad de impacto con la tierra $= V(t_c)$

$$= -g \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$= -g \cdot \frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{g}}$$

$$= -\sqrt{g}\sqrt{2h}$$

(el signo negativo obedece a que el movimiento ocurre hacia abajo) $= -\sqrt{2gh} \approx \sqrt{2gh}$ → rapidez con la que impacta el suelo.