

Teoría – Tema 2

Teoría - 18 - resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones trigonométricas

Ecuaciones trigonométricas

Por lo general, los pasos a seguir para resolver ecuaciones trigonométricas son:

1. Dejar el argumento en función del mismo ángulo.
2. Expresar todo según la misma razón trigonométrica.
3. Resolver la ecuación, obteniendo el ángulo solución.

Ejemplo 1 resuelto

Resolver $4 \cdot \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(2x)$

Usamos la relación del seno del ángulo doble, para dejar todos los argumentos dependiendo del ángulo x .

$$4 \cdot \operatorname{sen}(x) = 2 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) \rightarrow 2 \cdot \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) = 0$$

Sacamos factor común.

$$\operatorname{sen}(x)(2 - \cos(x)) = 0$$

Igualamos cada factor de la multiplicación a 0. Así tendremos una ecuación que solo depende del seno y otra ecuación que solo depende del coseno.

$$\operatorname{sen}(x) = 0 \rightarrow x = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ \dots \rightarrow x = 0^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

Fíjate que hemos dado media vuelta (180 grados) en vez de una vuelta (360°) para unificar todas las soluciones posibles.

$$2 - \cos(x) = 0 \rightarrow \cos(x) = 2 \rightarrow \text{No existe solución ya que } -1 \leq \cos(x) \leq 1$$

Sistemas de ecuaciones trigonométricas

Por lo general, podremos realizar un cambio de variable y resolver el sistema como de costumbre. Sin olvidar, al final, deshacer el cambio para obtener los ángulos solución.

Ejemplo 2 resuelto

$$\text{Resuelve } \begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

Cambio de variable:

$$\operatorname{sen} x = a$$

$$\operatorname{sen} y = b$$

El sistema queda:

$$\begin{cases} a+b = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ a-b = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

Aplicamos el método de reducción, sumando ambas ecuaciones:

$$2a = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$2a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3} + 1 - 1}{2}$$

$$2a = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} \rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Obtenemos la segunda variable.

$$b = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - a$$

$$b = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow b = \frac{1}{2}$$

Deshacemos los cambios de variable.

$$a = \sin x$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 60^\circ + 360^\circ \cdot k, \quad 120^\circ + 360^\circ \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Donde hemos tenido en cuenta que el seno positivo puede darse en el primer y en el segundo cuadrante.

$$b = \sin y$$

$$\sin y = \frac{1}{2}$$

$$y = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ + 360^\circ \cdot k, \quad 150^\circ + 360^\circ \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Donde nuevamente hemos tenido en cuenta que el seno positivo puede darse en el primer y en el segundo cuadrante.