

Teoría – Tema 6

CCSS - Teoría - 2a - Relación entre derivada de una función y crecimiento

La derivada es una medida del crecimiento

Conocemos la definición formal de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En el límite, encontramos un cociente. El numerador es una diferencia de valores de la imagen. El denominador es una diferencia de valores de la variable independiente. Este valor h tiende a 0, pero por definición es una cantidad siempre positiva porque $x+h$ es siempre mayor que x .

Por lo tanto, si el numerador es positivo, todo el cociente será positivo. Y si el denominador es negativo, todo el cociente será negativo.

¿Qué significa numerador positivo? Significa que el valor $f(x+h)$ es mayor que $f(x)$. Y esto provoca una función que crece estrictamente en el intervalo $[x, x+h]$.

¿Qué significa numerador negativo? Significa que el valor $f(x+h)$ es menor que $f(x)$. Y esto provoca una función que decrece estrictamente en el intervalo $[x, x+h]$.

Consecuencia: si la función es estrictamente creciente, la derivada es positiva. Y si la función es estrictamente decreciente, la derivada es negativa.

Si la función es constante (gráfica horizontal) la derivada es nula, al no ser ni estrictamente creciente ni estrictamente decreciente.

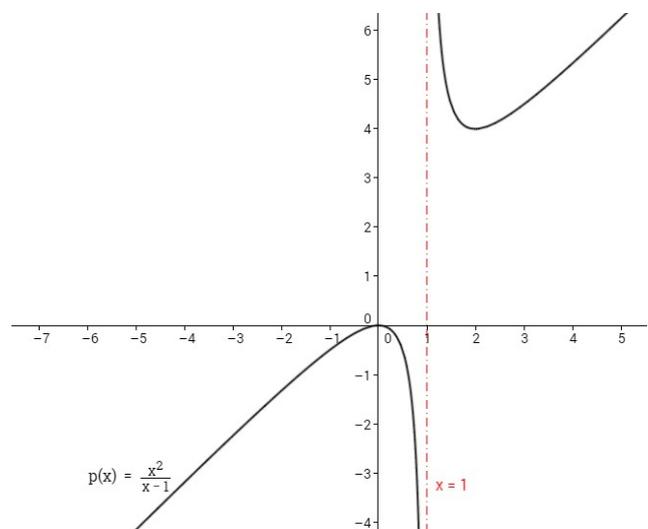
Ejemplo 1 resuelto

La gráfica de la función $p(x) = \frac{x^2}{x-1}$ muestra claramente una curva estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y estrictamente decreciente en el intervalo $(0, 1)$.

Comprueba numéricamente que la derivada de la función es positiva en cualquier valor que tomemos en el intervalo $(-\infty, 0)$ y que es negativa en cualquier valor del intervalo $(0, 1)$.

$$p'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2(1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

Efectivamente, se cumple:



$$x = -2 \rightarrow p'(-2) = \frac{(-2)^2 - 2(-2)}{(-2-1)^2} = \frac{8}{9} > 0 \rightarrow \text{derivada positiva} \rightarrow \text{función estrict. creciente}$$

$$x = -1 \rightarrow p'(-1) = \frac{(-1)^2 - 2(-1)}{(-1-1)^2} = \frac{3}{4} > 0 \rightarrow \text{derivada positiva} \rightarrow \text{función estrict. creciente}$$

$$x = 0.5 \rightarrow p'(0.5) = \frac{(0.5)^2 - 2(0.5)}{(0.5-1)^2} = -3 < 0 \rightarrow \text{derivada negativa} \rightarrow \text{función estrict. decreciente}$$