Esercizi su posizione reciproca tra parabola e retta

Trova le rette che soddisfino le seguenti condizioni. Verifica i tuoi risultati disegnando gli elementi sul piano a mano e/o con DESMOS/Geogebra.

1) Passano per $A\left(\frac{5}{2}, 2\right)$ e sono TANGENTI a $y = 2x^2 - 12x + 20$. Calcola le coordinate del punto di tangenza di ogni retta. $[s: y = 2, tangente\ nel\ punto\ S(3,2)\ \ e\ t: y = -4x + 12, tangente\ in\ T(2,4)]$

2) Sono parallele a $\frac{1}{2}y - 2x + 3 = 0$ e TANGENTI a $y = x^2 + 4x + 5$. Calcola le coordinate del punto di tangenza di ogni retta. $[s: y = 4x + 5, tangente\ nel\ punto\ S(0,5)]$

3) Passano per $A(-3,7)$ e sono TANGENTI a $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$. Calcola le coordinate del punto di tangenza di ogni retta.
$[s: y = 4x + 19, tangente\ nel\ punto\ S(-6,-5)\ \ e\ t: y = -2x + 1, tangente\ in\ T(0,1)]$

4) Sono TANGENTI alla parabola $y = 3x^2 - 18x + 26$ e passano per il <u>suo</u> punto A che ha ascissa uguale a 4. Calcola le coordinate del punto di tangenza di ogni retta.
$[A(4,2);\ \ s: y = 6x - 22, tangente\ appunto\ in \ldots A!]$

5) Considera la parabola $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 2$. Calcola le equazioni delle seguenti rette:
   a) Tangenti alla parabola e passa per il punto A in cui la parabola incontra l'asse y
   $[A(0,-2);\ s: y = 2x - 2\ ]$
   b) Perpendicolari alla retta $2y - x - 4 = 0$ e SECANTI la parabola
   $[s: y = -2x + q\ con\ q < 10]$

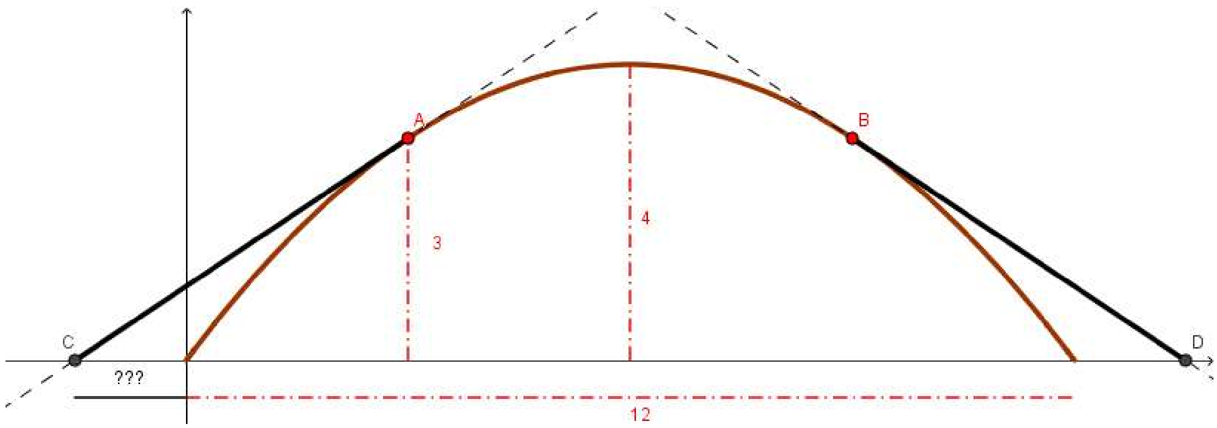
6) Considera la parabola $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$. Calcola le equazioni delle seguenti rette:
   a) ESTERNE alla parabola e passanti per il punto $A(2,4)$
   $[y = m(x-2) + 4\ con\ \ \ -1 < m < 2]$
   b) TANGENTI alla parabola nel suo punto B con $y = -2$ ed ascissa positiva
   $[B(7,-2)\ \ \ s: y = -2x + 12]$

7) Considera la parabola $y = 8x - x^2 + 20$. Calcola le equazioni delle rette SECANTI alla parabola e passanti per il punto $A(0,24)$. $[y = mx + 24\ con\ m < 4 \vee m > 12]$

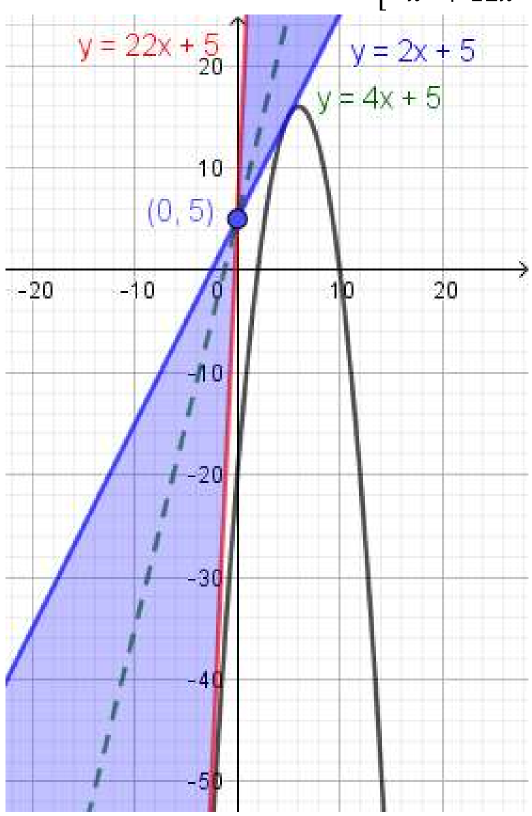
8) Costruisci un ponte di forma parabolica largo 12 metri e alto 4m nel suo punto di **massima** altezza. **DISEGNA UNO SCHIZZO DEL PONTE PER AIUTARTI NEI VARI PASSAGGI**
   a) Calcola l'equazione del ponte ponendo uno dei suoi piedi **nell'origine degli assi**.
   $\left[y = \frac{1}{9}(12x - x^2)\right]$

   b) Vuoi aggiungere due tiranti di rinforzo al ponte, **nei <u>suoi</u> due punti che hanno altezza 3 metri**; saranno cavi di acciaio TANGENTI al ponte nel punto di aggancio e fissati a terra. A quale distanza dal rispettivo piede del ponte andrà piantato il tirante? Una volta risolto il problema per il primo tirante, si può dedurre la soluzione anche per il secondo? Perché?

[Punti di aggancio: $P_1(3,3)$ e $P_2(9,3)$. Equazione tirante tangente in P_1: $y = \frac{2}{3}x + 1$, che ha $y = 0$ in $C\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$, cioè a 1,5m dal piede in $O(0,0)$. Sì, per simmetria sarà 1,5m *dopo* il secondo piede- vedi figura]



9) Il profilo di un monte è dato dall'equazione $y = -x^2 + 12x - 20$. Tu sei su un albero che si trova 2 metri PRIMA del monte, e ti trovi a 5 metri d'altezza. **DISEGNA UNO SCHIZZO PER AIUTARTI**.
   a) Determina le coordinate cartesiane del punto in cui ti trovi $[P(0,5)]$
   b) Vuoi sparare un proiettile in modo che NON si conficchi nel monte e possa proseguire. Con quale inclinazione devi lanciarlo? (coefficiente angolare della retta)
   $[2 < m < 22; in\ questo\ problema\ ha\ senso\ la\ parte\ m > 2\ (vedi\ figura)]$
   c) Quale parte del monte è più alta di 10m?
   $[-x^2 + 12x - 20 > 10 \quad \rightarrow \quad 6 - \sqrt{6} < x < 6 + \sqrt{6}]$



Le rette che passano per $(0,5)$ e NON toccano la parabola-monte sono quelle con m compreso tra 2 (retta blu) e 22 (retta rossa), che sono le due tangenti, quindi $2 < m < 22$

Ad esempio la retta tratteggiata verde a $m = 4$

Se prendo una retta con m>22 sale così rapidamente che si inclina troppo e taglia la parabola in fondo in basso. Ovviamente questo problema nel caso del monte non si pone, e quindi possiamo togliere questo vincolo: rimane $2 < m$, quindi a noi qualunque $m > 2$ va bene.

10) In uno stagno di profilo parabolico le due rive distano 20 metri; il punto più basso è profondo 20m. Rispondi alle domande **aiutandoti con uno schizzo**. Soluzione grafica nella prossima pagina, da guardare DOPO aver risolto l'esercizio.

    a) Calcola l'equazione del profilo del stagno, ponendo nell'origine una delle due rive.

    b) La tua barca può muoversi senza incagliarsi sul fondo se c'è una profondità di **almeno 15m**. Determina la parte dello stagno in cui puoi navigare.

    c) Sei $2{,}5m$ *prima* della riva dello stagno e scavi con una sonda un tunnel rettilineo, per prelevare acqua dallo stagno. Per non danneggiare la sonda, però, devi fare in modo che essa non sbuchi nello stagno, ma lo tocchi solo **tangenzialmente**. Quanto devi inclinare la sonda? (Coefficiente angolare) A che profondità incontrerà lo stagno e preleverà l'acqua?

    d) Se invece vuoi fare in modo che la sonda TAGLI lo stagno, che inclinazione le devi dare?

11) Una leggenda racconta che 1000 metri dopo il Monte Parabola ci sia un tempio d'oro. Stai salendo con una spedizione sul monte quando a $2000m$ di altezza, venite bloccati da una bufera. Vuoi scoprire l'altezza della cima del monte per capire cosa conviene fare. (**Fai uno schizzo**; per i tuoi conti usa la scala 1:100 – quindi la spedizione è a 20 unità di altezza; poni la posizione della spedizione **sull'asse delle y**. Quindi le sue coordinate sono…)

    a) Scoprite che l'altro punto del monte che si trova alla stessa quota è 1600m più avanti in linea d'aria. Ti è sufficiente per capire l'altezza massima del monte?

    b) Ricordi che avete iniziato a scalare il monte 400 metri più indietro in senso orizzontale. Trova l'equazione del monte e le coordinate della sua cima.

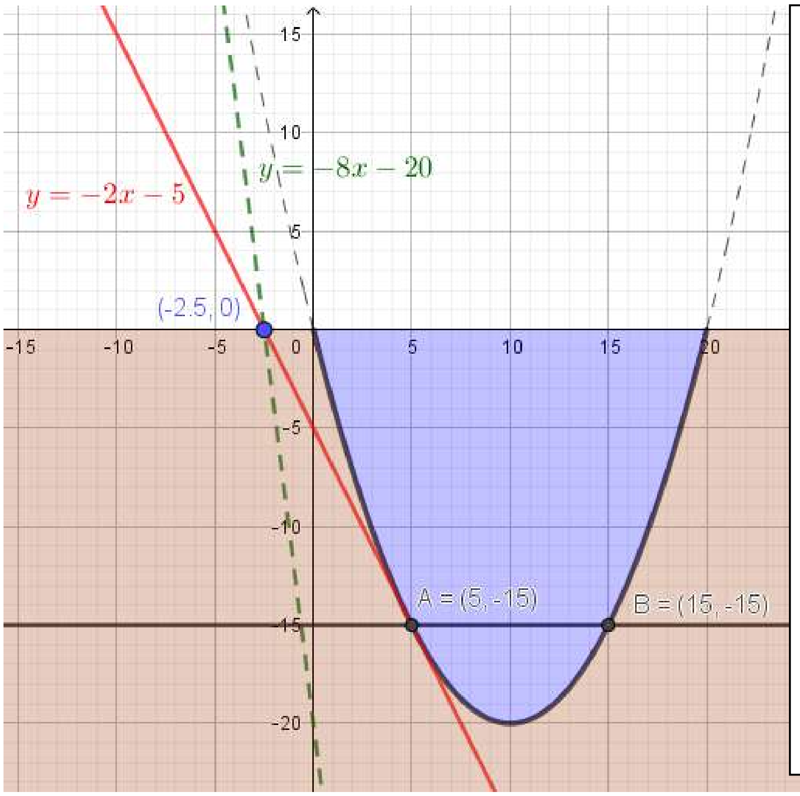
    c) Decidete che la cima è troppo in alto per proseguire, proponi di scavare un tunnel che scenda di un metro ogni due metri di spostamento orizzontale ed attraversare il monte. Calcola l'equazione del tunnel. In che punto sbucherà?

    d) Un'altra possibilità è che per aiutarvi costruiscano un enorme scivolo rettilineo "appoggiato" al monte nel punto in cui vi trovate per far giungere a terra il delicato materiale che avete con voi. Lo scivolo deve solo *toccare* il monte. Calcola la sua equazione e la posizione in cui raggiunge terra.

    e) Sarebbe più lungo il tunnel o lo scivolo?

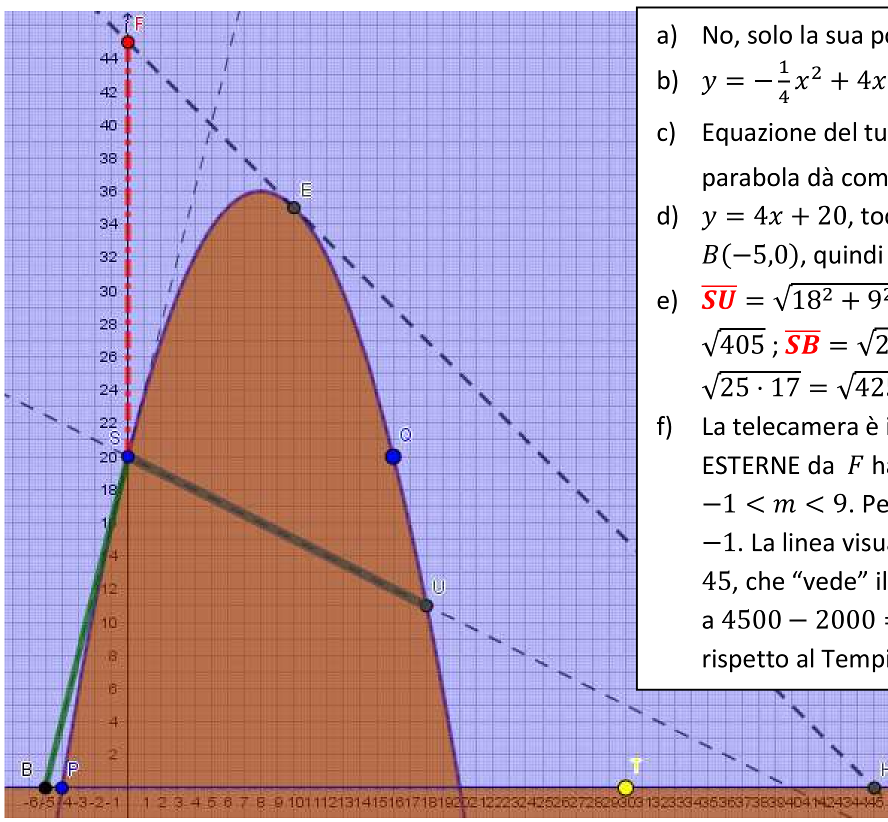
    f) Prima di tornare indietro fate salire un pallone areostatico con una telecamera per 2500 metri verticalmente sopra di voi, per vedere se riuscite almeno a vedere il tempio. Di quanto deve essere inclinata la telecamera se vuole guardare verso il basso ma il suo campo visivo NON deve essere ostacolato dal monte? Dove si trova il punto sul terreno oltre al monte, e più vicino ad esso, che riuscirete ad osservare? Riuscite a scorgere il Tempio d'Oro?

SOLUZIONE ESERCIZIO 10



a) $y = \frac{1}{5}x^2 - 4x$
b) $5 \leq x \leq 15$, *cioè nei* $10\ m$ *centrali dello stagno*
c) $y = -2x - 5$, tangente in $P_1(5, -15)$, quindi a $15m$ di profondità. L'altra tangente, $y = -8x - 20$, "tocca" lo stagno in un punto con $y > 0$ (tratteggiata verde), cioè in cielo e quindi non ci interessa in questo problema.
d) Dai calcoli si trova $m < -8 \ \vee m > -2$, ma nel problema ha senso solo $m < -2$ ed in particolare $-2 < m < 0$, perché con $m < -8$ la parabola viene tagliata nella sua parte con $y > 0$, dove lo stagno NON c'è.

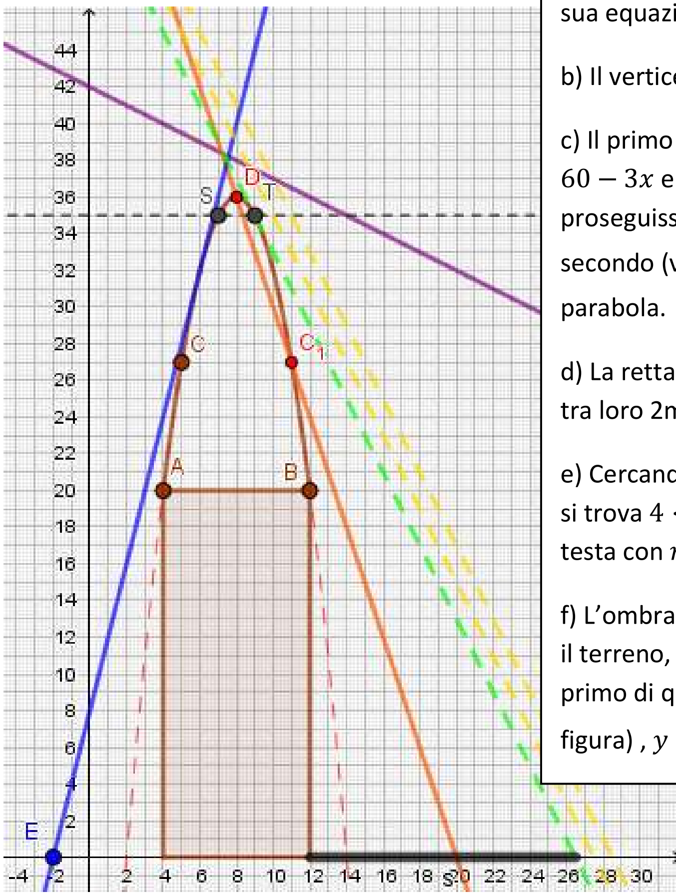
SOLUZIONE ESERCIZIO 11



a) No, solo la sua posizione orizzontale per simmetria
b) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4x + 20$, il vertice è $V(8,36)$
c) Equazione del tunnel: $y = 20 - \frac{1}{2}x$, a sistema con la parabola dà come altro punto $U(18,11)$
d) $y = 4x + 20$, tocca terra dove $y = 0$, cioè in $B(-5,0)$, quindi a 100m dalla base del monte
e) $\overline{SU} = \sqrt{18^2 + 9^2} = \sqrt{9^2(2^2 + 1)} = \sqrt{81 \cdot 5} = \sqrt{405}$; $\overline{SB} = \sqrt{20^2 + 5^2} = \sqrt{5^2(4^2 + 1)} = \sqrt{25 \cdot 17} = \sqrt{425}$. È più lungo lo scivolo.
f) La telecamera è in $F(0, 20 + 25 = 45)$. Le rette ESTERNE da F hanno equazione $y = mx + 45$ con $-1 < m < 9$. Per il nostro caso ci interessa $m > -1$. La linea visuale più verso il basso è $y = -x + 45$, che "vede" il terreno in $H(45,0)$, a $4500 - 2000 = 2500$m dal monte. Troppo avanti rispetto al Tempio.

12) In una piazza c'è una fontana. A 4 metri dalla fontana viene costruita una torre per un osservatorio astronomico, alta 20m e larga 8m. Ti affidano il progetto per completare la torre con una cupola parabolica da porle in cima, con la specifica che essa a 5m dalla fontana dovrà essere alta 27m
   a) disegna uno schizzo ponendo la fontana nell'origine degli assi. Nel tuo disegno la torre sarà quindi un rettangolo, e la cupola deve appoggiarsi sulla sua base superiore. Calcola l'equazione della parabola.
   b) Nasce una polemica perché una legge della città dice che nessuna torre deve superare i 35m di altezza. La torre, con la tua cupola, rispetta la legge?
   c) Due meteoriti stanno precipitando sulla città. Uno passa sulla fontana a 60m di altezza, ed ogni volta che procede di 1 metro scende di 3. Il secondo passa sulla fontana all'altezza di 42m e scende di 2m ogni 4 metri percorsi. Calcola le loro equazioni e verifica se colpiscono la torre. In caso affermativo determina il punto in cui la colpiscono.
   d) Dato che uno dei meteoriti ha danneggiato la cupola, se ne approfitta per tagliarla orizzontalmente proprio a quota 35m, in modo che al posto della punta della cupola vi sia un terrazzino per le osservazioni notturne d'estate. Quanto è lungo il terrazzino?
   e) Ti metti 2m prima della fontana e guardi verso l'alto per osservare il cielo. Quanto devi inclinare la testa perché la cupola non ti nasconda le stelle?
   f) È giorno. I raggi del sole, dato che la fonte che li genera è molto lontana, possono essere considerati **tutti paralleli** tra loro. In questo momento loro inclinazione è tale per cui ogni 3 metri percorsi orizzontalmente scendono di 6 metri. Quanto è lunga l'ombra della torre? (aiutati con il tuo disegno, disegna alcuni raggi e cerca di capire come è definita l'ombra)

13) A un metro dietro casa tua c'è una collinetta di forma parabolica, larga alla base sei metri e che ha altezza massima nove metri.
   a) Organizza il sistema di riferimento in modo che la tua casa FINISCA in corrispondenza dell'origine e traccia uno schizzo della situazione.
   b) Deduci i punti necessari per calcolare l'equazione della parabola che descrive la collinetta ed effettua il calcolo $[A(1,0), B(7,0), V(4,9) \to y = -x^2 + 8x - 7]$
   c) Quanto è alta la collinetta a 5 metri e mezzo da casa tua? $[6m\ e\ 75\ cm]$
   d) Trova in quale zona la collina è **più alta** di 5m
      $[da\ una\ distanza\ di\ 2m\ fino\ a\ 6m\ da\ casa]$
   e) Il tuo telescopio è inclinato in modo che ogni metro sale di 2 metri. A che altezza devi salire, da casa tua, per poterlo utilizzare per vedere il cielo senza che la collinetta ti copra la visuale? $[ad\ almeno\ 2m]$
   f) Sempre da casa tua, dall'altezza di 11m, usi una fionda per sparare una talpa verso la collinetta con un'inclinazione di 45° verso il basso (quindi la talpa scenderà di … ogni 1 metro). Scopri se la talpa sfiora, evita, colpisce ed inizia a scavare nella collina. Nel caso la colpisca, trova la lunghezza della galleria che scaverà, ed a che altezza sbucherà.
      $$\begin{bmatrix} la\ retta\ della\ talpa\ \text{è}\ secante\ e\ attraversa\ la\ collina\ da\ P(3,8)\ a\ Q(6,5). \\ Il\ tunnel\ scavato\ \text{è}\ quindi\ lungo\ 3\sqrt{2}m \approx 4{,}24\ m \end{bmatrix}$$



a) La cupola deve passare per $A(4,20)$, $B(12,20)$ e $C(5,27)$; la sua equazione è $y = -x^2 + 16x - 28$

b) Il vertice della parabola è $D(8,36)$, quindi viola la legge

c) Il primo meteorite (arancio) ha traiettoria di equazione $y = 60 - 3x$ e colpisce la parabola proprio sul vertice – se proseguisse dritto la attraverserebbe uscendo in $C_1(11,27)$. Il secondo (viola) ha equazione $y = -\frac{1}{2}x + 42$ e non colpisce la parabola.

d) La retta $y = 35$ sega la parabola nei punti S e T, che distano tra loro 2m.

e) Cercando le rette passanti da $E(-2,0)$ ESTERNE alla parabola si trova $4 < m < 36$. A noi basta sapere che bisogna inclinare la testa con $m > 4$.

f) L'ombra finisce dove i raggi solari ($y = -2x + q$) raggiungono il terreno, ovvero dove NON sono più intercettati dalla torre. Il primo di questi raggi è quello tangente alla torre (verde in figura) , $y = -2x + 53$, che tocca terra in $\left(\frac{53}{2}, 0\right)$. Ombra=14,5