

# Funções de várias variáveis\*

\*Material elaborado por Raiane Lemke, na sua pesquisa de mestrado.



# Objetivos



- Definir funções de duas variáveis e dar exemplos práticos;
- Relacionar quádricas com funções de duas variáveis;
- Construir o gráfico de funções de duas variáveis;
- Relacionar paraboloides hiperbólicos com itens do cotidiano;
- Descrever e representar geometricamente o domínio de funções de duas e três variáveis;
- Determinar e representar geometricamente curvas de nível.

# Introdução

- **Definição:** Uma função  $f$  é uma correspondência que a cada elemento de um conjunto  $X$  associa um único elemento de um conjunto  $Y$ . Sendo  $X$  o domínio de  $f$  e  $Y$  o contradomínio.
- Estamos interessados em estudar funções tais que  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , e  $Y \subset \mathbb{R}$ , ou seja, funções reais de  $n$  variáveis reais.
- Notação:  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .
- Em geral estudaremos funções reais de duas variáveis reais cuja notação usual é

$$z = f(x, y).$$

# Exemplos



- Que exemplos de funções de várias variáveis você conhece?
- Áreas de: retângulos, triângulos, trapézios etc.;
- Volumes de: cilindros, cones, paralelepípedos etc.;
- Índice massa corporal:  $I = P^2/A$ ;
- Lei de Ohm;
- Quádricas vistas em Geometria Analítica.
- Lei de um gás ideal.

## Exemplo 1



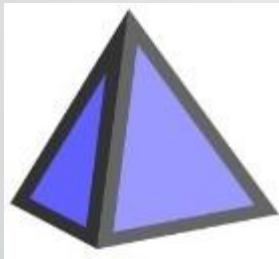
Determine o domínio das funções abaixo e represente-o geometricamente:

$$a) f(x, y) = \frac{xy-5}{2-\sqrt{y-x^2}}$$

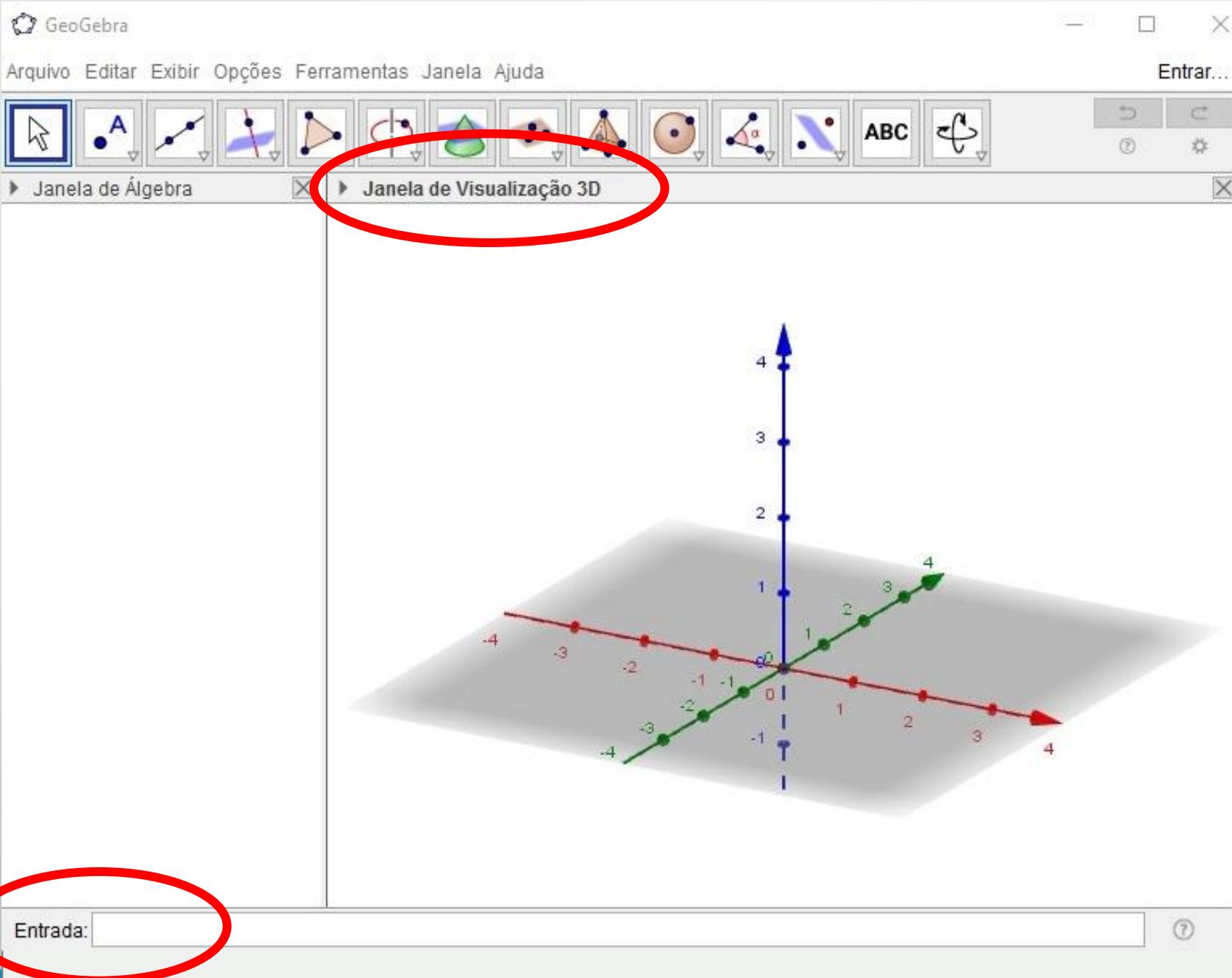
$$b) f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{\ln(4-x^2-y^2)}$$

$$c) f(x, y) = \ln(16 - x^2 - y^2 - 4z^2)$$

# Funções de duas variáveis no GeoGebra



- Janela 3D: Ctrl+Shift+3



$$f(x,y) = \frac{xy - 5}{2 - \sqrt{y - x^2}}$$

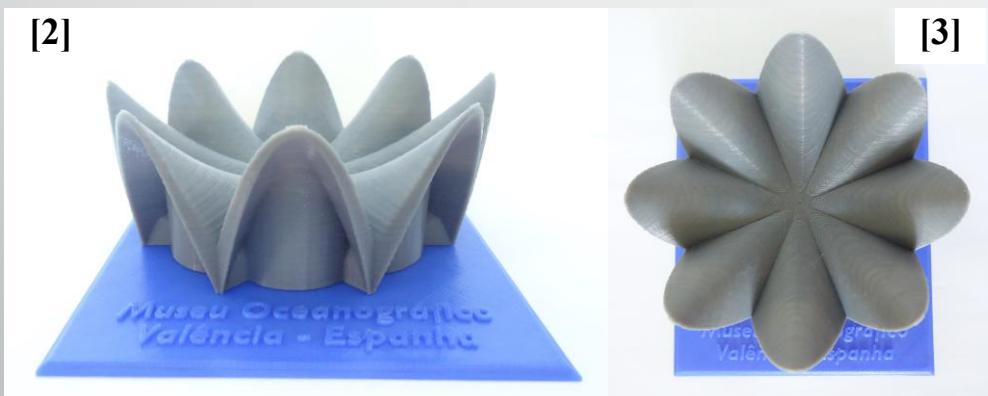
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{\ln(4-x^2-y^2)}$$

$$f(x, y) = \ln(16 - x^2 - y^2 - 4z^2)$$



**Observe as imágenes a seguir...**

# Parque Oceanográfico de Valência



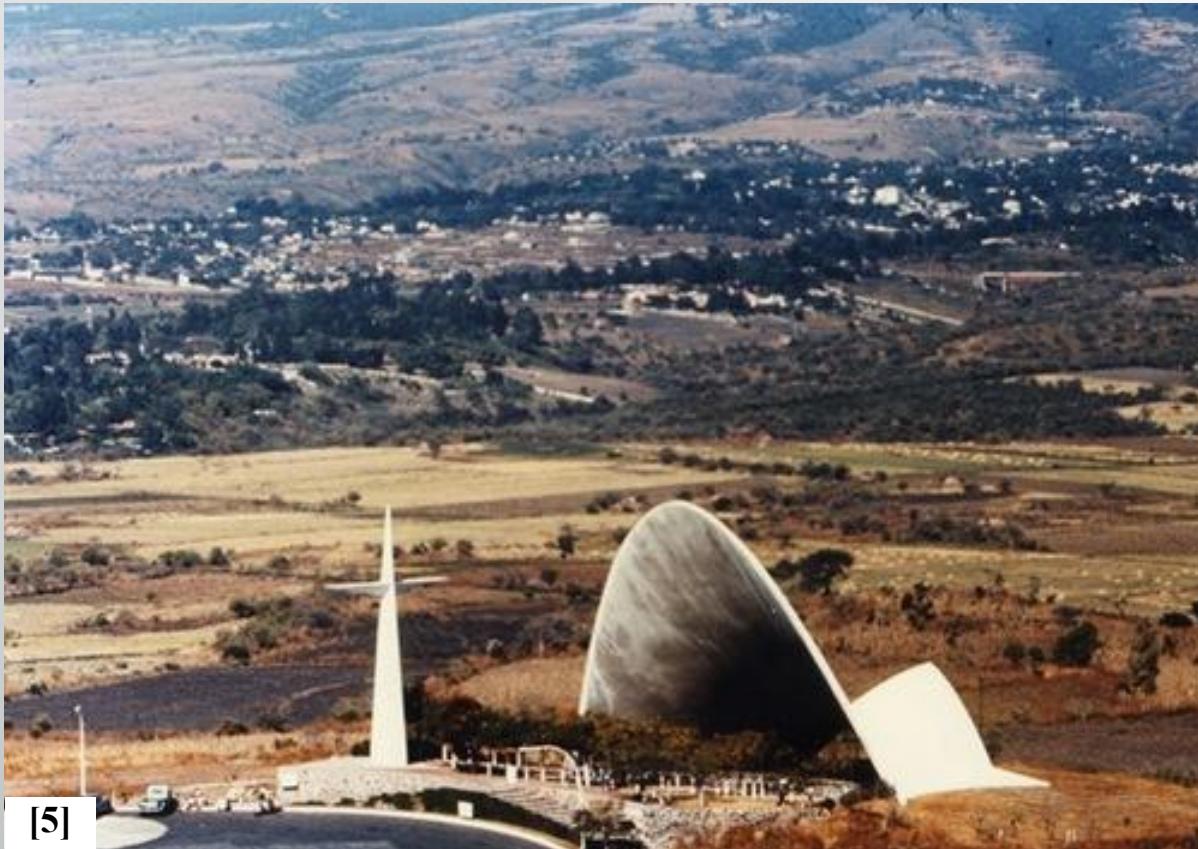
O [Parque \(ou museu\) Oceanográfico de Valência](#) localizado em Valência, na Espanha, na Cidade das Artes e da Ciência, é o maior aquário da Europa, e nele se encontram os principais ecossistemas marinhos. Cada edifício é identificado com os diferentes ambientes aquáticos. O restaurante submarino e a construção de acesso, que recebe os visitantes se destacam por seus telhados espetaculares concebidos por Felix Candela. Nas figuras [2] e [3] temos uma maquete com uma visão lateral e superior do museu. ([Localização no Google Maps](#))

# Pavilhão de São Cristóvão

O [Pavilhão de São Cristóvão](#) projetado por Sérgio Bernardes, foi inaugurado no início dos anos 1960 no Rio de Janeiro. Por volta de 1988, um forte vendaval destruiu pela segunda vez a cobertura do pavilhão. A partir desta data o pavilhão ficou fechado e em desuso por longos anos, até que em 2003 passou a ser utilizado pela Feira de São Cristóvão. Na imagem [4], um registro do pavilhão coberto. Atualmente sem cobertura, se tornou sede da Feira de São Cristóvão. ([Localização no Google Maps](#))



# Capela da Paróquia de São Felipe de Jesus



A [Capela da Paróquia de São Felipe de Jesus](#), na cidade de Lomas de Cuernavaca, no México teve seu projeto realizado com participação dos arquitetos Guillermo Rosell, Manuel Larrosa e Félix Candela em 1958. No projeto da capela a harmonia é muito interessante, pois o interior e o exterior se dissolvem integrados a estrutura, sua forma é extremamente delicada e harmoniosa. ([Localização no Google Maps](#))

# Dorton Arena

A [Dorton Arena](#) da cidade de Raleigh na Carolina do Norte – EUA foi concebida por Mathew Nowicki. Esta Arena foi construída para servir a agricultura, indústria, comércio e bem-estar geral da Carolina do Norte. Ela ganhou uma reputação internacional desde a sua construção em 1951. O edifício é ideal para diversos eventos. ([Localização no Google Maps](#))



# Restaurante Los Manantiales



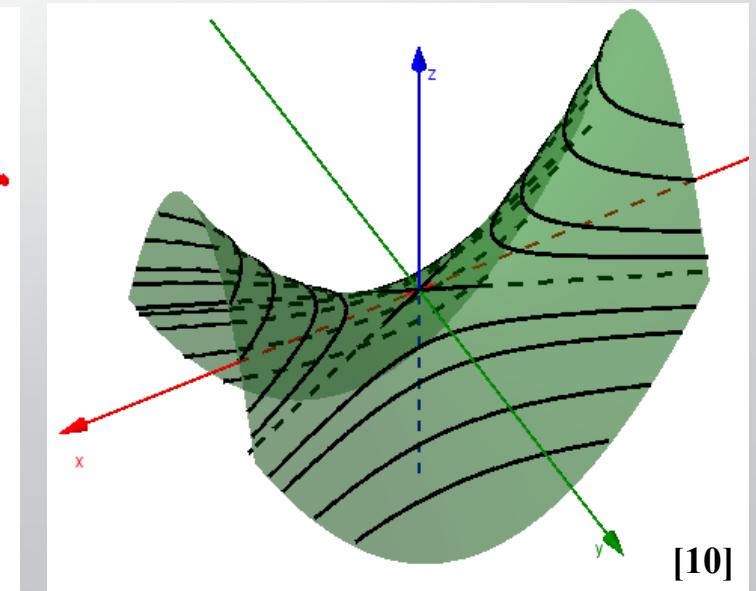
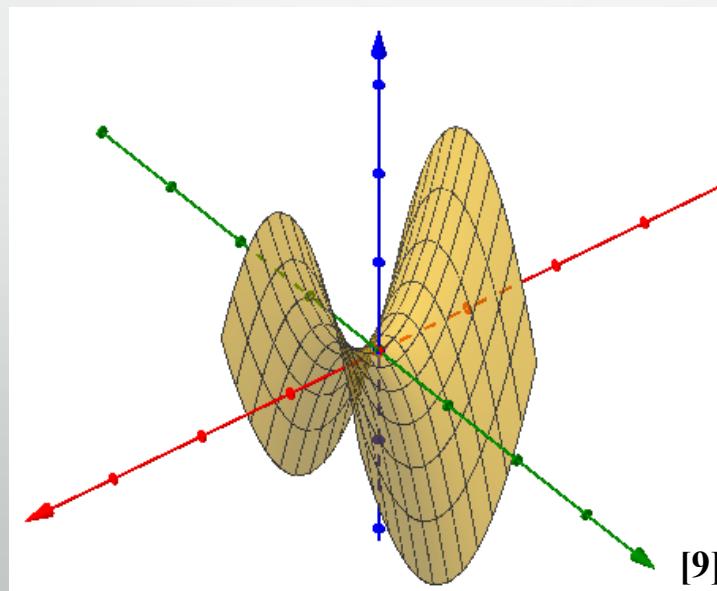
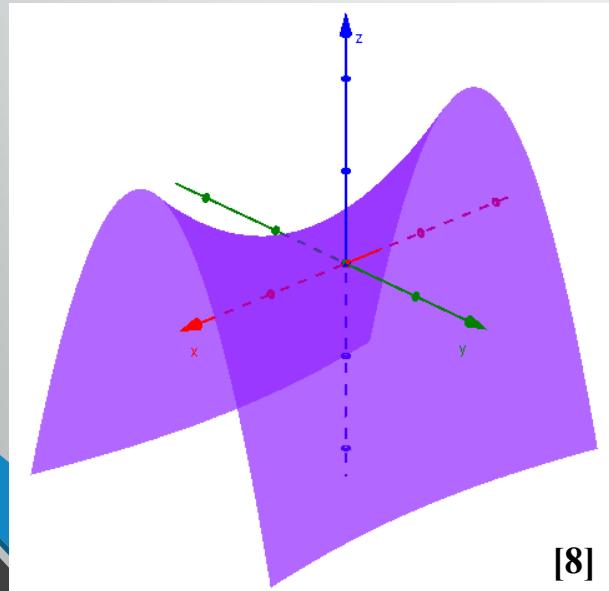
O [Restaurante Los Manantiales](#) se encontra na Cidade do México – México e foi projetado por Félix Candela. Esta construção é considerada um lugar muito significativo por ter suas origens no período pré-hispânico. O lugar se caracteriza por ter um dos mananciais mais importantes para abastecimento de água doce da cidade. ([Localização no Google Maps](#))



O que as figuras anteriores têm em comum?

Ambas possuem em sua construção a forma de

## PARABOLOIDE HIPERBÓLICO





Existe relação entre um paraboloide hiperbólico e funções reais de duas variáveis?

# Sim!

Vejamos a equação geral de um paraboloide hiperbólico com centro em  $(x_0, y_0, z_0)$  e coeficientes não nulos  $a$  e  $b$ :

$$z - z_0 = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2}.$$

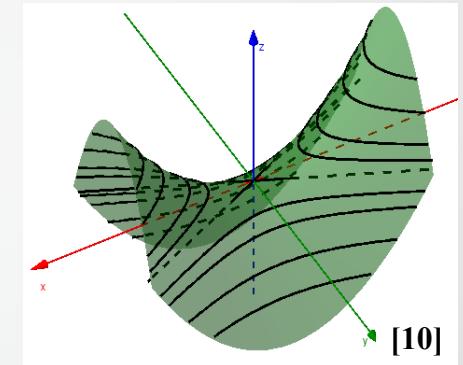
Note que  $z$  depende de  $x$  e  $y$ , podendo, então, ser escrito como uma função de duas variáveis:

$$f(x, y) = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + z_0.$$



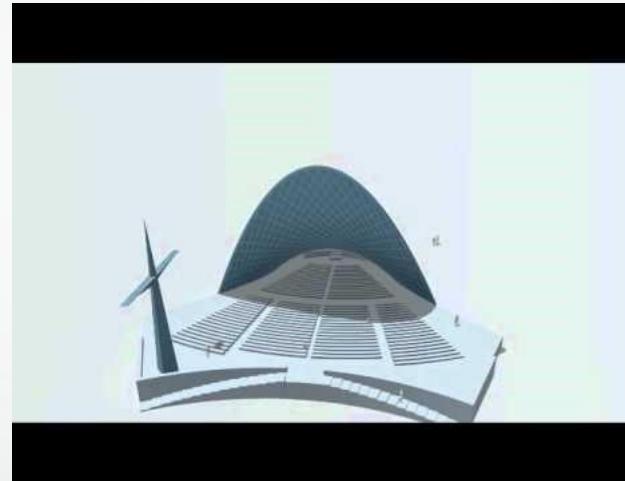
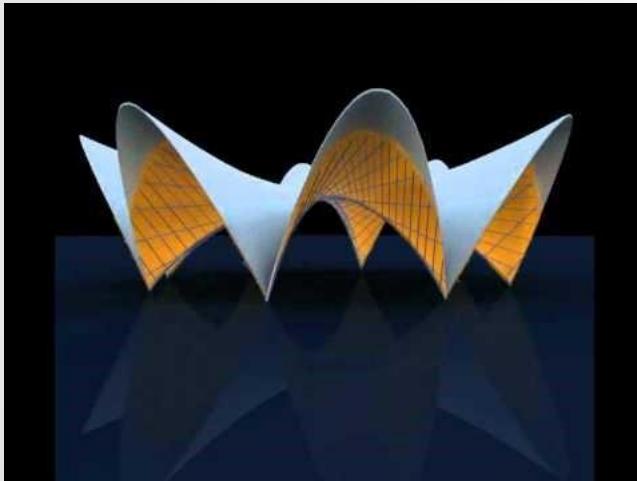
## Outras construções com formato de um **paraboloide hiperbólico**:

- Ginásio municipal de Lins - São Paulo;
- Mercado Municipal de Pirituba – São Paulo;
- Pavilhão dos raios cósmicos - Cidade do México;
- Terminal TWA no Aeroporto Presidente Kennedy, em Nova Iorque;
- Pengrowth Saddledome – Canadá;
- Estação de Combóio Varsóvia – Ochota;
- Le Centre des nouvelles industries et technologies (CNIT) – Paris, França;
- Parroquia de Ntra. Sra. del Valle. Becerril de la Sierra, Madrid – Espanha.





# Alguns vídeos sobre paraboloides hiperbólicos na arquitetura:





# Modelagem 3D no GeoGebra



1. Panteón (Roma)



2. Pearl Tower (Shanghai)



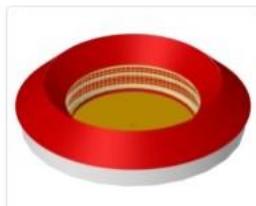
3. Golden Gate (San Francisco)



4. Museo de Arte Contemporâneo...



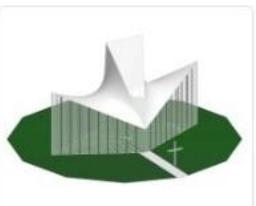
5. Puente romano (Córdoba)



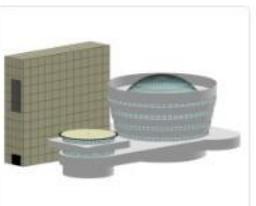
6. Plaza de toros (Ronda)



7. Big Ben (Londres)



8. Iglesia de San Jose (Monterre...



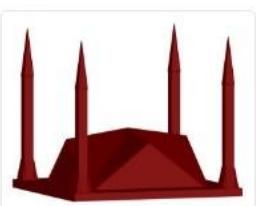
9. Museo Guggenheim (New Yo...



10. Sinagoga (Florencia)



11. Bauhaus (Dessau)



12. Shah Faisal Masjid (Islamaba...



13. Edificio CEOE (Zaragoza)



14. Giralda (Sevilla)



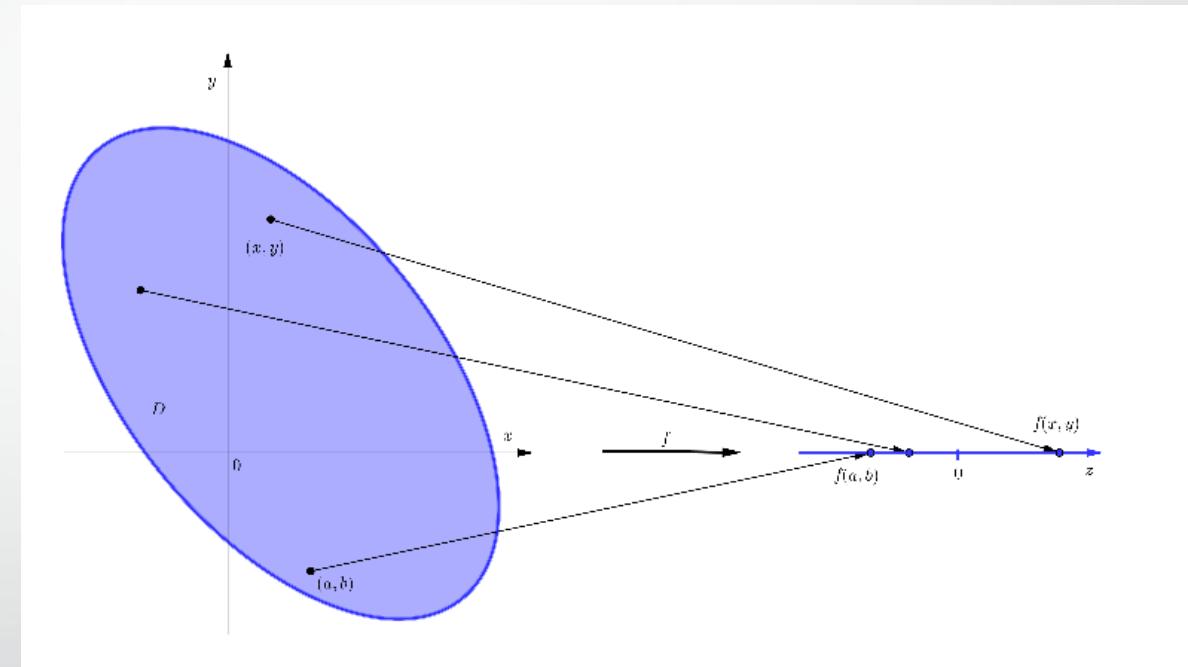
15. Torre del Oro (Sevilla)

[11]

- Materiais organizados por Raúl Manuel Falcón Ganfornina.

# Gráfico de funções reais de duas variáveis reais

Uma função de duas variáveis é aquela cujo domínio é um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  e cuja imagem é um subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Uma maneira de visualizar essa função é pelo diagrama de setas, como na figura ao lado, no qual o domínio é representado como um subconjunto do plano.



# Gráfico de funções reais de duas variáveis reais

**DEFINIÇÃO 2.2.6** Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de  $n$  variáveis. Definimos o gráfico de  $f$  como o subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  formado por todos os pontos da forma

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

onde  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

No caso  $n = 2$ , o gráfico de  $f$  é uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ . Quando  $n \geq 3$ , não é mais possível visualizar o gráfico de  $f$ , pois este será um subconjunto de  $\mathbb{R}^4$ .

# Gráfico de funções reais de duas variáveis reais

Para representação gráfica de superfícies ou gráficos de funções é conveniente observar os seguintes passos:

1. Domínio da função;
2. Interseções com os eixos coordenados;
3. Interseções com os planos coordenados;
4. Curvas de nível:  $z = k$ , com  $k \in \mathbb{R}$ ;
5. Se necessário, traços em  $x = k$  e  $y = k$ .

# Determine o gráfico das seguintes funções:

- $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{2}$
- $f(x, y) = \frac{1}{4x^2+y^2}$



# Referências das figuras

- [1] Disponível em: <<http://www.cerviglas.com/portfolio/oceanografic-valencia/>>. Acesso em: 27 mar. 2017.
  - [4] Disponível em: <<http://www.archdaily.com.br/br/765444/classicos-da-arquitetura-pavilhao-de-sao-cristovao-sergio-Bernardes>>. Acesso em: 27 mar. 2017.
  - [5] The Princeton University Art Museum. (2008). Disponível em: <<http://artmuseum.princeton.edu/legacy-projects/Candela/index.html>>. Acesso em: 27 mar. 2017.
  - [6] Disponível em: <<http://www.ncmodernist.org/nowicki.htm>>. Acesso em: 27 mar. 2017.
  - [7] Disponível em: <<http://static.panoramio.com/photos/large/20855833.jpg>>. Acesso em: 27 mar. 2017
  - [14] Disponível em: <<http://curiosoperoinutil.com/2005/10/31/la-forma-de-una-patata-frita/>>. Acesso em: 27 mar. 2017.
- [2]; [3]; [8]; [9]; [10]; [11]: LEMKE, Raiane. 2017