5. Kettenregel

Schätze dein Können ein und bearbeite in ca. 20 Minuten mindestens zwei der Aufgaben. Das Symbol zeigt die die Schwierigkeit an.

A1) Leite mit Hilfe der Kettenregel ab.

a) $f(x) = (2x+1)^3$

b) $g(x) = (5-x)^2$

c) $h(x) = (3x+2)^{-1}$

d) $i(x) = \frac{3}{(4-x)^2}$

A2) Leite mit Hilfe der Kettenregel ab.

a) $f(x) = \frac{4}{(7x-2)^3}$

b) $g(x) = \frac{1}{(x^2-4)^2}$

c) $h(x) = 2\sin(3x^2+1)$

d) $i(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

A3) Leite die Funktion ab.

Die Funktion $f: x \mapsto (\sin(3x^2-2))^2$ kann als Verkettung $f = u \circ v \circ w$ der Funktionen $u: x \mapsto x^2, v: x \mapsto \sin(x)$ und $w: x \mapsto 3x^2 - 2$ betrachtet werden.

Leite die Funktion durch zweimaliges Anwenden der Kettenregel ab.

5.1 Lerneinheit: Kettenregel - LÖSUNG

Lösung: A1)

a) $f'(x) = 3 \cdot (2x+1)^2 \cdot 2 \ = 6 \cdot (4x^2 + 4x + 1)$
$= 24x^2 + 24x + 6$

b) $g'(x) = 2 \cdot (5 - x) \cdot (-1) = -2 \cdot (5 - x)$
$= -10 + 2x$

c) $h'(x) = -(3x+2)^{-2} \cdot 3 = \frac{-3}{(3x+2)^2}$

d) $i(x) = 3 \cdot (4 - x)^{-2}$
$i'(x) = -2 \cdot 3 \cdot (4 - x)^{-3} \cdot (-1) = \frac{6}{(4-x)^3}$

Lösung: A2)

a) $f(x) = 4 \cdot (7x - 2)^{-3}$
$f'(x) = 4 \cdot (-3) \cdot (7x-2)^{-4} \cdot 7 = \frac{-84}{(7x-2)^4}$

b) $g(x) = (x^2 - 4)^{-2}$
$g'(x) = -2 \cdot (x^2 - 4)^{-3} \cdot 2x = \frac{-4x}{(x^2-4)^3}$

c) $h'(x) = 2\cos(3x^2 + 1) \cdot 6x = 12x \cdot \cos\,(3x^2 + 1)$

d) $i(x) = \cos(x)^{-1}$
$i'(x) = -\cos(x)^{-2} \cdot (-\sin(x)) = \frac{\sin\,(x)}{\cos(x)^2}$

Lösung: A3)

$f'(x) = 2 \cdot sin\,(3x^2 - 2) \cdot cos\,(3x^2 - 2) \cdot 6x$

$= 12x \cdot \sin\,(3x^2 - 2) \cdot \cos\,(3x^2 - 2)$

5.2 Lerneinheit: Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten und ihre Ableitung

Info: Heute lernst du wie man Wurzeln richtig ableitet.

Aufgabe 1: Schaue dir zum Einstieg Wiederholung die folgenden Erklärvideos an.

Wurzel als Potenz umschreiben: https://www.youtube.com/watch?v=k7lPd5vOXqo

Wurzel ableiten: https://www.youtube.com/watch?v=brciG-j3VUo

Aufgabe 2: Vervollständige mithilfe des Buchs S.126 und des Videos den folgenden Hefteintrag.

Hefteintrag

4. Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten und ihre Ableitung

Merke: Die Potenzregel gilt auch für rationale Exponenten.

Für $f(x) = x^r \quad r \in \mathbb{Q}\,;\ x > 0$ gilt:

$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

Beispiele: Berechne jeweils die Ableitung.

a) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\qquad f'(x) =$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} =$ $\qquad f'(x) =$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} =$ $\qquad f'(x) =$

d) $f(x) = \sqrt[4]{5x-1} =$ $\qquad f'(x) =$

e) $f(x) = a \cdot \sqrt[p]{x^q} =$ $\qquad f'(x) =$

Aufgabe 3: Bearbeite im Buch auf Seite 140 das Beispiel 1.

Verdecke zunächst die Lösungen und kontrolliere anschließend deine Ergebnisse.

5.2 Lerneinheit: Potenzfunktionen und ihre Ableitung - LÖSUNGEN

Beispiele

a) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ $\quad f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

Nachdifferenzieren nicht vergessen!

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ $\quad f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

d) $f(x) = \sqrt[4]{5x-1} = (5x-1)^{\frac{1}{4}}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{4}(5x-1)^{\frac{1}{4}-1} \cdot 5 = \frac{5}{4}(5x-1)^{-\frac{3}{4}} = \frac{5}{4 \cdot \sqrt[4]{(5x-1)^3}}$

e) $f(x) = a \cdot \sqrt[p]{x^q} = a \cdot x^{\frac{q}{p}}$ $\quad f'(x) = a \cdot \frac{q}{p} \cdot x^{\frac{q}{p}-1}$

Faktorregel

6. Lerneinheit: Kurvendiskussion Potenzfunktionen

Info: Heute üben und vertiefen wir die neuen Ableitungsregeln.

Zudem habt ihr die Möglichkeit Fragen zu den bisherigen Lerninhalten in einer **Videokonferenz** zu stellen. Hier die wichtigsten Infos (vgl. Ankündigung MS Teams):

- Los geht's um 12:30 Uhr.
- Die Teilnahme ist freiwillig.
- Bitte meldet Euch bis 11:00 Uhr an, ob Ihr an der Konferenz teilnehmen möchtet.

Aufgabe 1: Übertrage den folgenden Hefteintrag.

Hefteintrag

<u>Mehrfach verkettete Funktionen</u>

Betrachtet man eine Funktion als zweifache Verkettung, muss man die Kettenregel auch zweimal anwenden.

Beispiel 1: Die Funktion $f(x) = sin\sqrt{x^2+1}$ kann als Verkettung $f = u \circ v \circ w$ der Funktionen

$u(x) = \sin x$, $v(x) = \sqrt{x}$ und $w(x) = x^2 + 1$ betrachtet werden.

Es gilt: $u'(x) = \cos x$, $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ und $w'(x) = 2x$

Somit: $f'(x) = cos\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x$

Beispiel 2: Für die Funktion $g(x) = \sqrt{\sin(x^2+1)}$ gilt:

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin(x^2+1)}} \cdot \cos(x^2+1) \cdot 2x$

Aufgabe 2: Bearbeite im Buch auf Seite 142 die folgenden Aufgaben.

- Aufgabe **7 a, b, d, l, n**
- Aufgabe **11a, b**

6. Lerneinheit: Kurvendiskussion Potenzfunktionen - LÖSUNG

Lösung: Aufgabe **7**

a) $f'(x) = \frac{1}{3}(1+2x)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 = \frac{2}{3\cdot(1+2x)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$

b) $f'(x) = \frac{4}{5}(7x^2-x)^{-\frac{1}{5}} \cdot (14x-1) = \frac{4(14x-1)}{5(7x^2-x)^{\frac{1}{5}}}$

d) $f'(x) = \frac{1}{4}\sin(x)^{-\frac{3}{4}} \cdot \cos(x) = \frac{\cos(x)}{4\sin(x)^{\frac{3}{4}}}$

l) $f'(x) = 2\left(1+\sqrt{3x+2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot (3x+2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3\left(1+\sqrt{3x+2}\right)}{\sqrt{3x+2}}$

n) $f'(x) = -2\left(x^3-2\sqrt{x}\right)^{-3} \cdot \left(3x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{2\left(3x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\left(x^3-2\sqrt{x}\right)^3}$

Lösung: Aufgabe **11**

a) $f(x) = \sqrt{2x} - x^2$ $\quad D_{f\,max} = [0; +\infty[$

- Symmetrieverhalten: keine Symmetrie, da die Funktion nur in $\mathbb{R}_0^+$ definiert ist
- Nullstellen: $f(x) = 0$ $\quad x_1 = 0$ $\quad \sqrt{2x} - x^2 = 0$

  $\sqrt{2x} = x^2$ $\quad 2x = x^4$ $\quad 2 = x^3$

  $x_2 = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}3$

- Extrempunkte: $f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} - 2x = \frac{\sqrt{2}-4x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0$ $\quad \sqrt{2} - 4x^{\frac{3}{2}} = 0$ $\quad \sqrt{2} = 4x^{\frac{3}{2}}$

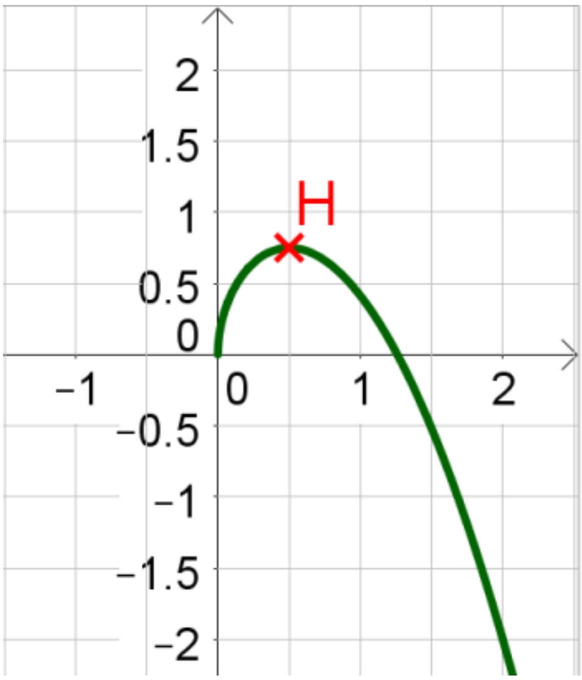
$2 = 16x^3$ $\quad \frac{1}{8} = x^3$ $\quad x = \frac{1}{2}$

- Monotonieverhalten:

x	$x < \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x$
$f'(x)$	+	0	−

Also ist der einzige Extrempunkt der Hochpunkt $H(\frac{1}{2}|\frac{3}{4})$.

G_f ist sms in $[0;\frac{1}{2}]$ und smf in $[\frac{1}{2}; +\infty[$.



b) $g(x) = \frac{1}{3}x \cdot \sqrt{16 - x^2}$

- $D_g = [-4; 4]$

- Symmetrieverhalten: $g(-x) = \frac{1}{3}(-x) \cdot \sqrt{16 - (-x)^2} = -\frac{1}{3}x \cdot \sqrt{16 - x^2} = -g(x)$
  => G_g punktsymmetrisch zum Ursprung

- Nullstellen: $g(x) = 0$ $\qquad \frac{1}{3}x \cdot \sqrt{16 - x^2} = 0$

  $x_1 = 0 \qquad x_2 = 4 \qquad x_3 = -4$

Wir müssen auf einen gemeinsamen Nenner erweitern.

- Extrempunkte: Ableitung mit der Produktregel und der Kettenregel

  $$g'(x) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{16 - x^2} + \frac{1}{3}x \cdot \frac{1}{2} \cdot (16 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{3} - \frac{x^2}{3 \cdot \sqrt{16-x^2}} = \frac{\left(\sqrt{16-x^2}\right)^2}{3\sqrt{16-x^2}} - \frac{x^2}{3 \cdot \sqrt{16-x^2}}$$

  $$= \frac{16-x^2}{3\sqrt{16-x^2}} - \frac{x^2}{3 \cdot \sqrt{16-x^2}} = \frac{16-x^2-x^2}{3 \cdot \sqrt{16-x^2}} = \frac{16-2x^2}{3 \cdot \sqrt{16-x^2}}$$

  $g'(x) = 0$
  $16 - 2x^2 = 0$
  $16 = 2x^2$
  $x^2 = 8$
  $x_1 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $x_2 = -2\sqrt{2}$

- Monotonieverhalten:

x	$x < -2\sqrt{2}$	$x = -2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}$	$x = 2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2} < x$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

  Hochpunkt $H(2\sqrt{2}/\frac{8}{3})$, Tiefpunkt $T(-2\sqrt{2}/-\frac{8}{3})$. Der Graph G_g ist smf in $[-4; -2\sqrt{2}]$ und in $[2\sqrt{2}; 4]$ und sms in $[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$.

- Graph: