24 Geometria projectiva

24.2 Projectivitat2

24.2.1 Teorema de Pascal

Si en una cònica no buida es defineix un hexàgon, regular o no, en el què els seus vèrtexs A, B, C, D, E i F estan a la cònica, *unint els vèrtexs* de la forma que es veu en el gràfic, és a dir, *cadascun aparellat amb els seus oposats, els punts d'intersecció p1, p2 i p3 formen una línia recta: Pascal1*. Els vèrtexs dels hexàgon han de respectar l'ordre. Si a més *es prolonguen els costats de l'hexàgon de la manera que es veu a la figura 24.4, els punts X, Y i Z de la seva prolongació també estan en línia recta: Pascal2*. Es defineixen els punts f1 i f2 com focus de la cònica, i el punt P per dimensionar-la.

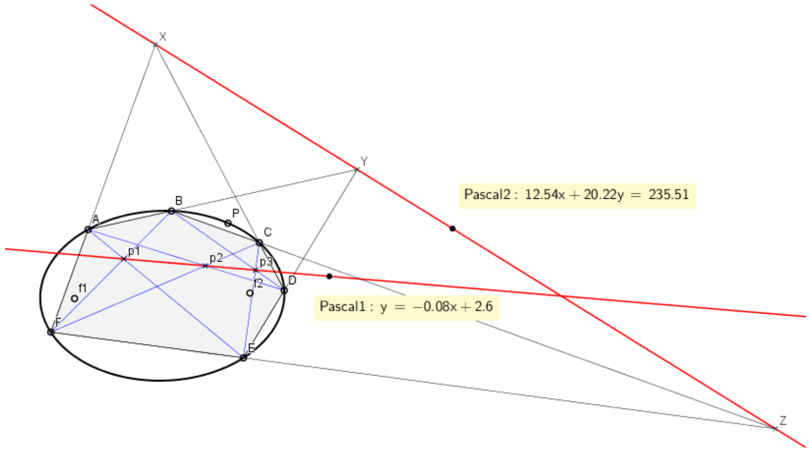

Fig. 24.4

24.2.2 Teorema de Pappus (Dualitat)

Les aplicacions que es donen en aquest capítol tenen com a finalitat una visió gràfica de la geometria projectiva sense preocupar-se de la demostració dels teoremes. Precisament, la utilització de GeoGebra permet visualitzar, en la majoria dels casos, els resultats dels teoremes gràficament. Farem una excepció en el teorema de Pappus, en què la demostració es farà a partir de la dualitat.

Uns exemples clàssics per observar la dualitat són els següents. Si dos punts determinen una recta, dues rectes determinen un punt (fig. 24.5). També es pot dir que si tres punts determinen un pla, tres plans es troben en un punt que queda igualment determinat.

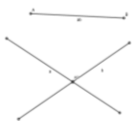

Fig. 24.5

Un teorema és vàlid si es pot demostrar. Però de la mateixa manera que la reciprocitat en la geometria eucliniana serveix per justificar un teorema, com es comprova fàcilment en el polígon funicular, en la geometria projectiva assumeix aquest paper la dualitat. D'aquesta manera reciprocitat i dualitat tenen el mateix objectiu. I concretament *en la geometria projectiva tot teorema ha de tenir el seu dual*.

Suposem dues rectes qualsevol coplanàries m i m' i tres punts en cadascuna d'elles: A, B i C a la recta m i A', B' i C' a la recta m'. El teorema de Pappus diu que si *creuem dos a dos els punts amb segments, la seva intersecció forma una recta p* (X,Y,Z). Fig. 24.6.

El procés gràfic desenvolupat per a l'obtenció del sistema dual és el següent.

Pappus	Dual
Recta m	Punt M
Punts A, B i C de la recta m	Rectes a, b i c radials d'M
Recta m'	Punt M'
Punts A', B' i C' de la recta m'	Rectes a', b' i c' radials d'M'
Recta a entre punts A, B'	Punt A entre rectes a, b'
Recta b entre punts A, C'	Punt B entre rectes a, c'
Recta c entre punts B, A'	Punt C entre rectes b, a'
Recta d entre punts B, C'	Punt D entre rectes b, c'
Recta e entre punts C, A'	Punt E entre rectes c, a'
Recta f entre punts C, B'	Punt F entre rectes c, b'
Rectes d i f. Punt Z	Punts D i F. Recta z
Rectes b i e. Punt Y	punts B i E. Recta y
Rectes a i c. punt X	Punts A i C. recta x
Recta p. (Punts X, Y , Z)	Punt O

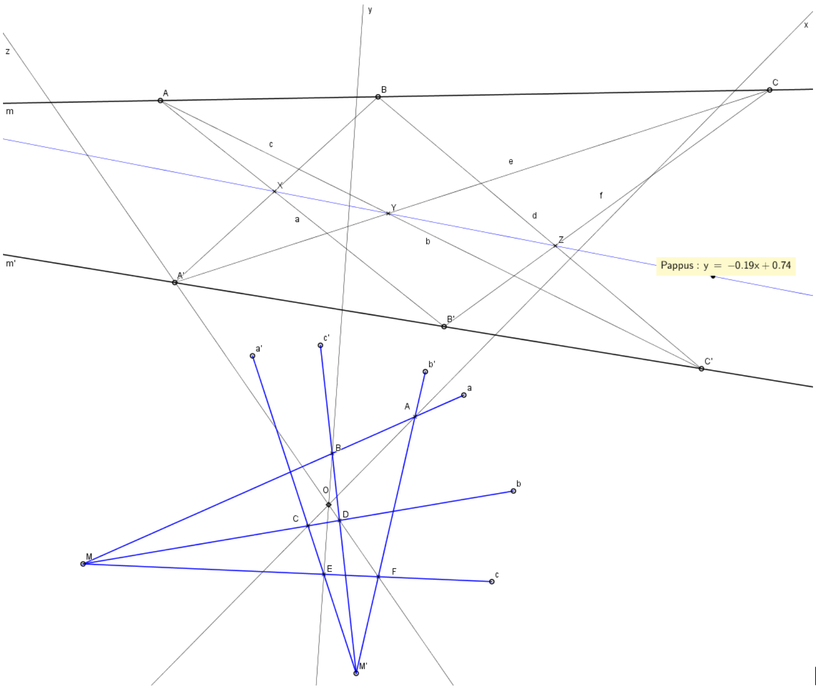

Fig. 24.6

24.2.3 Homologia

Disposem de dos plans qualsevol π i π' (pla de projecció) no paral·leles amb una intersecció de nom Eix i que serà el lloc geomètric dels punts dobles. El triangle ABC es troba en el pla π. *Des del punt P*, punt propi, *projectem,* amb feixos de rectes projectives, *el triangle ABC en el pla π' obtenint el triangle A'B'C' homòleg del triangle ABC* (fig. 24.7). Si es perllonguen les línies que formen el triangle ABC fins trobar l'Eix, i de la mateixa manera en el triangle A'B'C', aquestes es troben en l'Eix en els punts ab, ac i bc que són punts dobles (Desargues). *Les línies B'ab, C'ac i C'bc són també homòlogues de les Bab, Cac i Cbc respectivament*. En definitiva, s'ha dibuixat en 3D el teorema de Desargues.

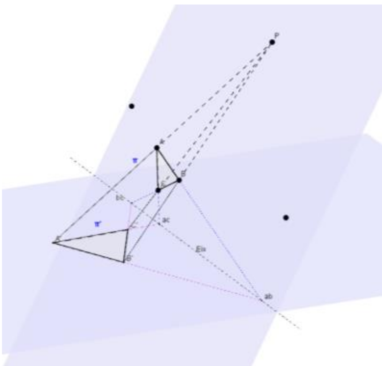

Fig. 24.7