| Taak: Exponentiële en logaritmische functies |
|---|

| | |
|---|---|
| **Virga Jessecollege** | **Toets WISKUNDE** |
| **Hasselt** | **leerkracht: Karel Appeltans** |
| **Datum:** | **schooljaar** |
| **Klas: VI** | **Studierichting:** |
| **Naam:.................................................** | **Aantal uren wiskunde: 6** |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | | 1. Soit la fonction $f$ de $R^+$ dans $R$ définie par $f(0)=0$ et $f(x)=x(\ln x)^2$ si $x>0$.<br>Soit $C$ la courbe déquation $y=f(x)$.<br>a) Vérifer que la fonction $f$ est continue en 0.<br>b) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ ; préciser les domaines de définition de $f'$ et $f''$.<br>c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $C$ au point d'abscisse $e$.<br>d) Etablir le tableau des variations de $f, f'$ et $f''$ contenant<br>• les racines de $f, f'$ et $f''$ (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale et $e \approx 2,72$)<br>• les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$<br>• les extrema de $f$, les domaines de croissance et de décroissance de $f$<br>• les points d'inflexion de $C$ et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de $C$.<br>e) Tracer soigneusement la courbe $C$ d'après les résultats du d) |
| 2 | | 4. The function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is given by<br>$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+3x)}{2x} & \text{if } x>0;\\ ax+b & \text{if } x\le 0.\end{cases}$<br>a) For which values of $a$ and $b$ is $f(x)$ continuous in 0?<br>b) For which values of $a$ and $b$ is $f(x)$ differentiable in 0? |
| 3 | | De functie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto f(x)=e^{\|x-2\|}$ bereikt in het punt $(a, f(a))$ een absoluut minimum. Bepaal $f(a)$.<br>(A) $f(a)=0$ (B) $f(a)=1$ (C) $f(a)=e$ (D) $f(a)=e^2$ |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | | On considère la fonction $f$ définie sur $\left]-2;1\right[$ par $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{1-x}\right)$.<br>a) Calculer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.<br>*Yvan Monka – Académie de Strasbourg – [www.maths-et-tiques.fr](http://www.maths-et-tiques.fr)*<br><br>b) Etudier la dérivabilité de la fonction $f$.<br>c) Déterminer le sens de variation de la fonction $f$.<br>d) Tracer sa courbe représentative. |
| 5 | | Soit la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par<br>$$f(x) = (2x+1)\ e^{-2x}$$<br>et $C$ la courbe d'équation $y = f(x)$ ($C$ est le graphe de $f$)<br>a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.<br>b) Déterminer une équation cartésienne<br>• de la tangente à $C$ au point d'abscisse 0.<br>• des asymptotes (éventuelles) de $C$.<br>c) Etablir le tableau des variations de $f, f'$ et $f''$ contenant<br>• les racines de $f, f'$ et $f''$ (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale)<br>• les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$.<br>• les extrema de $f$, les domaines de croissance et de décroissance de $f$.<br>• les points d'inflexion, les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de $f$.<br>d) Tracer soigneusement la courbe $C$ d'après les résultats du c)<br>e) Sans nouveau calcul, tracer le graphe de la fonction $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par<br>$$g(x) = f(\lvert x\rvert).$$ |

6

3. Soit la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \ln(x^2 - x + 1).$$

et $C$ la courbe d'équation $y = f(x)$ ($C$ est le graphe de $f$)

(a) Justifier que le domaine de $f$ est bien $\mathbb{R}$.

(b) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

(c) Déterminer une équation cartésienne
   - de la tangente à $C$ au point d'abscisse 1
   - des asymptotes (éventuelles) de $C$.

(d) Etablir le tableau des variations de $f$,$f'$ et $f''$ contenant
   - les racines de $f$,$f'$ et $f''$ (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale)
     Indication numérique : $\ln 2 \simeq 0{,}7$ et $\ln 3 \simeq 1{,}1$
   - les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$
   - les extrema de $f$, les domaines de croissance et de décroissance de $f$
   - les points d'inflexion et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de $f$.

(e) Tracer soigneusement la courbe $C$ d'après les résultats du 3d.

(f) Sans nouveau calcul, tracer le graphe de la fonction $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$g(x) = |f(|x|)|.$$

7

1. Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ pour tout $x > 0$ tel que $x \neq 1$.

a) Que vaut la limite de $f$
   - lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ? Justifier.
   - lorsque $x$ tend vers 1 par valeurs $> 1$ ? Justifier.

b) Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de cette dérivée première.

c) Calculer $f''(x)$ et étudier le signe de cette dérivée seconde.

d) Combien le graphe de $f$ possède-t-il de points de maximum? de points de minimum? de points d'inflexion? Justifier et calculer leurs coordonnées.

e) Esquisser le graphe de $f$, en indiquant les différents points qui apparaissent dans les réponses aux questions précédentes.

8

1. Soit la fonction $f$ de $R^+$ dans $R$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x(\ln x)^2$ si $x > 0$.
   Soit $C$ la courbe déquation $y = f(x)$.

   a) Vérifer que la fonction $f$ est continue en 0.

   b) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ ; préciser les domaines de définition de $f'$ et $f''$.

   c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $C$ au point d'abscisse $e$.

   d) Etablir le tableau des variations de $f, f'$ et $f''$ contenant

   - les racines de $f, f'$ et $f''$ (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale et $e \approx 2,72$)
   - les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$
   - les extrema de $f$, les domaines de croissance et de décroissance de $f$
   - les points d'inflexion de $C$ et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de $C$.

   e) Tracer soigneusement la courbe $C$ d'après les résultats du d)

9

$f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2e^x - 3}{e^x + 1}$

1) Pourquoi les droites $d$ et $\Delta$ d'équation respectives $y = 2$ et $y = -3$ sont-elles asymptotes à $\mathscr{C}_f$ ?
2) Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de $f$.
3) Tracer $d$, $\Delta$ et $\mathscr{C}_f$
4) La courbe semble avoir un point de symétrie. Démontrer cette conjecture.

10

Soit $f(x) = \ln \dfrac{x-1}{x+1}$

**a) Déterminer le domaine de définition de la fonction réelle $f$**
**b) Déterminer les asymptotes de la courbe $C$ d'équation $y = f(x)$ et préciser leur nature.**
**c) Déterminer les zéros de $f$.**
**d) Calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier son signe.**
**e) Déterminer les points de minimum et les points de maximum de $f$**
**f) Esquisser le graphe $C$ de la fonction $f$.**
**g) $C$ admet-il un centre de symétrie ? Justifier.**

11

1. Soit la fonction $f$ de $R$ dans $R$ définie par $f(x) = (x+1)^2\, e^{-x}$ .
   Soit $C$ la courbe déquation $y = f(x)$.

   a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ ; préciser les domaines de définition de $f'$ et $f''$.

   b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $C$ au point d'abscisse 1.

   c) Etablir le tableau des variations de $f, f'$ et $f''$ contenant

   - les racines de $f, f'$ et $f''$ (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale)
   - les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$
   - les extrema de $f$, les domaines de croissance et de décroissance de $f$
   - les points d'inflexion de $C$ et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de $C$.

   d) Tracer soigneusement la courbe $C$ d'après les résultats du c)

| | | |
|---|---|---|
| 12 | | 3. Soient la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par<br>$$f(x) = x\, e^{-x^2}$$<br>et $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = f(x)$ ($\mathcal{C}$ est le graphe de $f$ ).<br>(a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$<br>(b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $-1$<br>(c) Etablir le tableau des variations de $f$,$f'$ et $f''$ contenant<br>– les racines de $f$ , $f'$ et $f''$ (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale)<br>– les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$<br>– les extréma de $f$, les domaines de croissance et de décroissance de $f$<br>– les points d'inflexion de $f$ et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de $f$<br>(d) Tracer soigneusement la courbe $\mathcal{C}$ d'après les résultats du 3c.<br>(e) Sans nouveau calcul, tracer le graphe de la fonction $g$ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) définie par<br>$$g(x) = f(\|x\|)$$ |
| 13 | | 3. Etudiez la fonction :<br>$$y = \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1}$$<br>(a) donnez le domaine de définition et les caractéristiques générales (parité, périodicité, etc ...)<br>(b) recherchez les points remarquables et donnez leur nature<br>(c) tracez un graphe soigné de la courbe en y indiquant les éléments précédemment trouvés. |

| | | |
|---|---|---|
| 14 | | (a) Let $$f(x) = \frac{-2}{1+e^{4x}}.$$ i. Find all asymptotes of the graph of $f(x)$.<br>ii. Determine the interval on which $f(x)$ is decreasing.<br>iii. Determine the interval on which $f(x)$ is increasing.<br>iv. Find all point(s) of inflection for the graph of $f(x)$.<br>v. Sketch the graph of $f(x)$. |
| 15 | | Consider the function $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ defined by $$f(x) = \ln\left(1 + \sqrt{x}\right).$$ a) Prove that $f$ is one-to-one.<br>b) Calculate the inverse function $f^{-1}(x)$ and specify its domain. |
| 16 | | The function $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ is defined by $$f(x) = x^2 - 2x^2 \ln x.$$ a) Calculate $\lim_{x\to 0+} f(x)$ and $\lim_{x\to\infty} f(x)$.<br>b) Find the extreme values of $f$ and classify them as local or absolute.<br>c) Calculate the inflection point(s) of the curve $y = f(x)$. |
| 17 | | . Consider the function $f : (0, e] \to \mathbb{R}$ defined by $$f(x) = x^2 \ln(x).$$ a) Find the absolute extreme values of $f$ on $(0, e]$.<br>b) Calculate the inflection point(s) of the curve $y = f(x)$ on $(0, e)$. |

| | | |
|---|---|---|
| 18 | | De functie $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door $$f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}.$$ a) Bepaal het maximum en het minimum van $f$ op $[-1, 2]$.<br>b) Bepaal het buigpunt van de grafiek van $f$ op $[-1, 2]$. |
| 19 | | 3. Gegeven is de functie $f : D_f \to \mathbb{R}$ door $f(x) = \ln(6 + x - x^2)$.<br>a) Wat is het natuurlijke domein $D_f$ van $f$?<br>[Dus: bepaal alle $x$ waarvoor het gegeven functievoorschrift betekenis heeft.]<br>b) Bepaal de extreme waarde(n) van $f$ op $D_f$.<br>c) We beperken ons nu tot het open interval $(1, 2)$. Toon aan dat $f$ hier een inverse functie $f^{-1}$ heeft en bepaal het functievoorschrift van $f^{-1}(x)$. |
| 20 | | 1. De functie $f : D_f \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door $$f(x) = \ln(2x - x^2).$$ a) Wat is het domein van $f$?<br>[Dus: bepaal alle $x$ waarvoor de gegeven formule betekenis heeft.]<br>b) Bepaal de extreme waarde(n) van $f$ op het in a) bedoelde interval. |
| 21 | | 24. Let $y = -2\ln(x^2 + 3) + 8$<br>a) Find all the intercepts.<br>b) Find all the critical points and classify each as a local maximum, minimum, or neither.<br>c) Find all the inflection points. |
| 22 | | 10. Consider the function $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}$. Which of the following are true?<br>(a) $f$ has a horizontal asymptote.<br>(b) $f$ has two critical points.<br>(c) $f$ has a point of inflection.<br>(d) $f$ has a vertical asymptote.<br>(e) (b), (c), and (d)<br>(f) (a), (c), and (d)<br>(g) (a),(b), (c), and (d) |
| 23 | | f(x)= $\left(x^3 - 6x^2 + 12x - 12\right) e^x$ Bepaal het verloop |

| | | |
|---|---|---|
| 24 | | Let $f(x) = \dfrac{1}{(1+e^x)^2}$ . <br> Bepaal het verloop |
| 25 | | $f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}}$ Bepaal het verloop |
| 26 | | $f(x) = \log(2^x + 1)$ Bepaal het verloop |
| 27 | | |