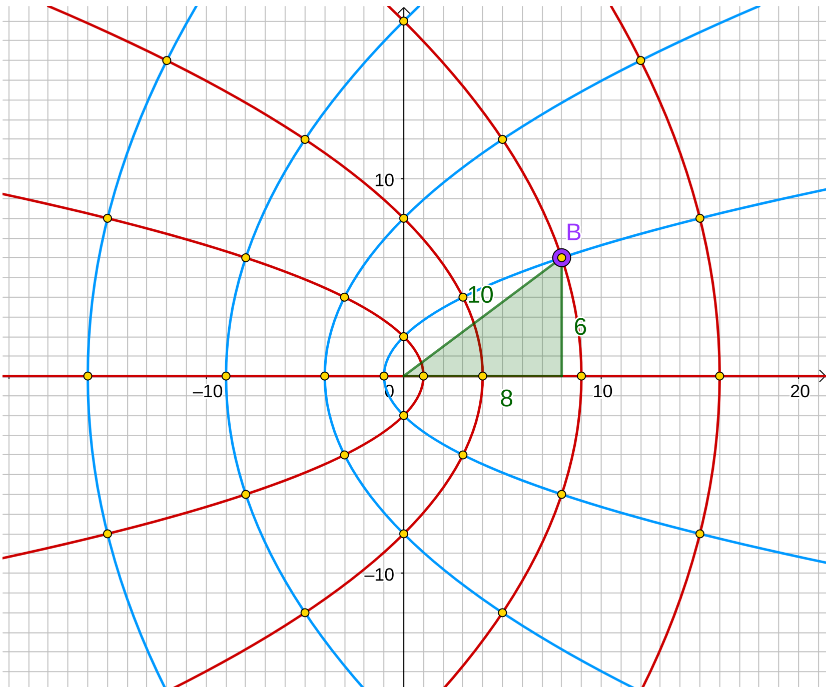
Vizualizace všech možných pýthagorejských trojic

Výpisky k vídeu

https://youtu.be/QJYmyhnaaek

Žán Pól Kastról



6. října 2021

1 Magor-fantastické vídeo

Nedávno jsem na TyTubovém kanále **3Blue1Brown** narazil na krástné vídeo o možnosti znázornění všech možných *pýtagorejských trojic* v souřadném systému:

https://youtu.be/QJYmyhnaaek

Zde jsou mé výpisky a odkazy na aplety v GeoGebře, ve kterých se pokusím základní myšlenky z vídea projít a pojmout je po-mocí středoškolských poznatků z analytické geometrie a komplexních čísel.

2 Pýthagorejská trojice

Každej blbec asi ví, že *pýthagorejská trojice*[1] ($\mathcal{PYTR}$) je trojice takových přirozených čísel a, b, c, pro která platí

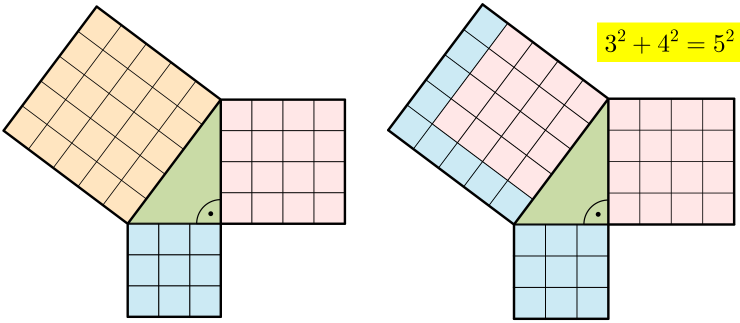
$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2} \tag{1}$$

Podle věty *obrácené* k Pýthagorově větě[2] tvoří tato tři čísla strany pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami a, b a s přeponou c.

Nejznámější $\mathcal{PYTR}$ je trojice $3, 4, 5$ (viz obr.1). Všechny možné přirozené k-násobky této trojice nám zřejmě vygenerují nekonečně mnoho dalších trojic $3k, 4k, 5k$:

$$\begin{aligned} &6, 8, 10 \\ &9, 12, 15 \\ &12, 16, 20 \end{aligned}$$

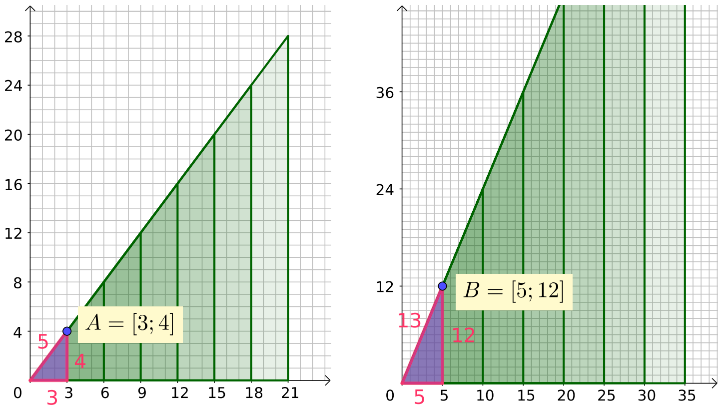
[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_triple
[2] https://www.geogebra.org/m/aCS3EXFD#material/Bb4uygQb



(a) (b)

Obr. 1: Nejjednodušší $\mathcal{PYTR}$

https://www.geogebra.org/m/pxeh92yq



(a) $(3, 4, 5)$ (b) $(5, 12, 13)$

Obr. 2: Primitivní trojice a jejich násobky

https://www.geogebra.org/m/a9nrbwua

⋮

Tyto trojice představují množinu vzájemně podobných trojúhelníků (obr.2a)

Trojice $3, 4, 5$ je tvořena *nesoudělnými* čísly a říkáme jí *trojice primitivní*. Její násobky již primitivní samozřejmě nejsou.

Vedle základní trojice $3, 4, 5$ existuje nekonečně mnoho dalších primitivních trojic. (Např. $5, 12, 13$ – viz obr.2b) Přitom primitivních trojic s hodnotami do sta je 16 (obr.3):

$$\begin{array}{llll}
(3,4,5) & (5,12,13) & (8,15,17) & (7,24,25) \\
(20,21,29) & (12,35,37) & (9,40,41) & (28,45,53) \\
(11,60,61) & (16,63,65) & (33,56,65) & (48,55,73) \\
(13,84,85) & (36,77,85) & (39,80,89) & (65,72,97)
\end{array}$$

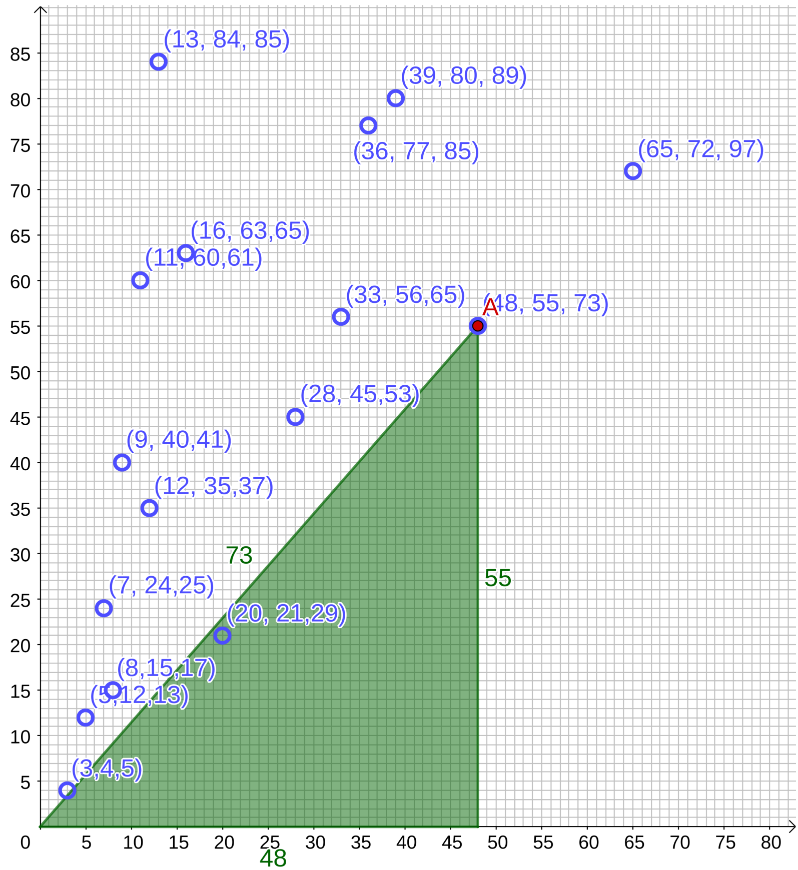
3 Trik s komplexními čísly

Vzniká otázka, jak lze systematicky hledat další $\mathcal{PYTR}$, tedy trojice přirozených čísel, která splňují rovnici (1).

Pojďme otázku hledání takovýchto čísel přeformulovat geometricky. Vezmeme-li jednotkovou mřížku v souřadném systému, představují uzlové body mřížky ty body v rovině, jejichž obě souřadnice jsou přirozená čísla.

> Hledat $\mathcal{PYTR}$ znamená hledat ty mřížkové body, jejichž vzdálenost od počátku souřadného systému je přirozené číslo.

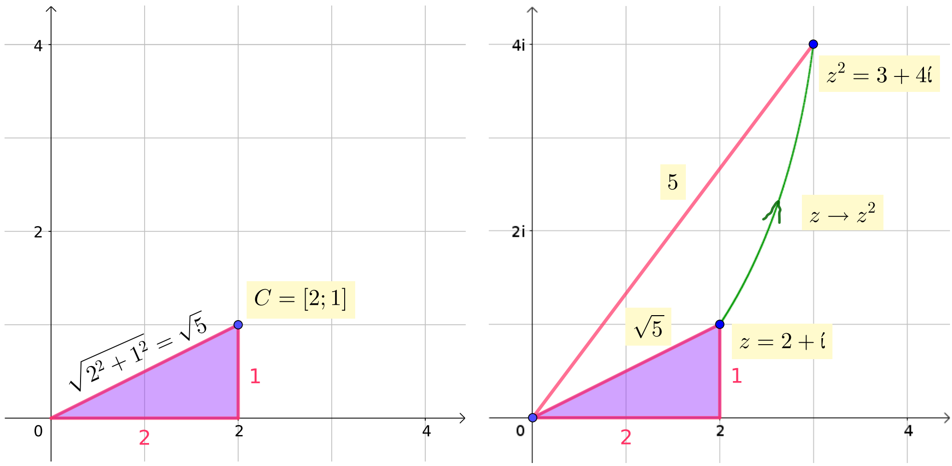
Například bod A (obr.2a) o souřadnicích $[3; 4]$ je od počátku vzdálen 5 jednotek. Nebo bod $B = [5; 12]$ (obr.2b) je od počátku vzdálen 13 jednotek.



Obr. 3: Primitivních trojic s hodnotami do sta je 16.

https://www.geogebra.org/m/cfbsfegd

Samozřejmě pro většinu mřížkových bodů, jako je $[2;1]$, není vzdálenost od počátku přirozené číslo (obr.4a). Ale je to alespoň druhá odmocnina z přirozeného čísla, v tomto případě $2^2 + 1^2 = 5$. Takže vzdálenost tohoto bodu od počátku je $\sqrt{5}$.



(a) $(2, 1, \sqrt{5})$ (b) $(3, 4, 5)$

Obr. 4: Nalezení $\mathcal{PYTR}$ = umocnění komplexního čísla na druhou mocninu.

https://www.geogebra.org/m/n88bgdjx

Nyní uděláme **grandiosní trik** – budeme chápat naši rovinu s jednotkovou mřížkou jakožto *komplexní rovinu* – jednotlivým bodům mřížky budou odpovídat komplexní čísla s přirozenými souřadnicemi a my tato koplexní čísla začneme umocňovat na druhou mocninu a uvidíme, co dostaneme!

Ukážeme si to nejprve na konkrétních příkladech:

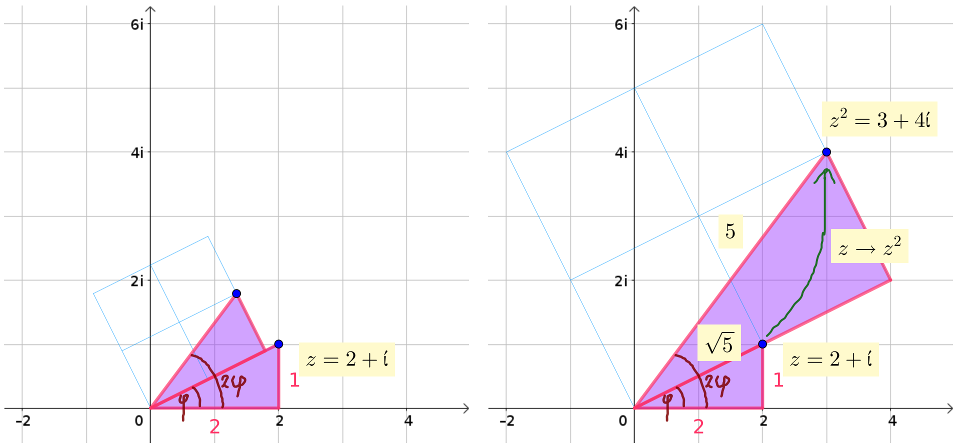
Například bod $C = [2;1]$ z obrázku 4a se nyní stane komplexním číslem $z = 2 + i$ (obr.4b). Nyní číslo z umocníme na druhou:

$$z^2 = (2+i)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot i + i^2 = 4 + 4i - 1 = z^2 = 3 + 4i$$

Dostali jsme komplexní číslo, které leží v mřížkovém bodě $[3;4]$ a jehož absolutní hodnota je

$$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Vzdálenost tohoto čísla od počátku je tedy přirozené číslo a my jsme umocněním čísla $2 + i$ získali pýthagorejsou trojici $(3, 4, 5)$!



(a) Rotace na dvojnásobný argument

(b) Natažení na druhou mocninu

Obr. 5: Umocnění komplexního čísla na druhou mocninu = rotace + natažení.

https://www.geogebra.org/m/btwqghmu

Můžeme se na to dívat také více geometricky a pracovat s číslem $2+i$ v *goniometrickém* tvaru:

$$z = \sqrt{5}(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

Zde $\sqrt{5}$ je absolutní hodnota tohoto čísla a φ je jeho *argument*. Umocnit číslo v goniometrickém tvaru na druhou mocninu znamená zdvojnásobit jeho argument (obr.5a) a umocnit jeho absolutní hodnotu (obr.5b):

$$z^2 = 5(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$$

Rotace na dvojnásobný argument a následné natažení umocněním abs. hodnoty způsobí, že se modrý bod ocitne opět v mřížkovém bodě, takže jeho souřadnice budou opět celé (obr.5b).

Dále protože původní číslo z mělo absolutní hodnotu odmocninu z přirozeného čísla ($\sqrt{5}$), jeho druhá mocnina má zaručeně absolutní hodnotu přirozenou (číslo 5).

Získáme tedy dozajista pýthagorejskou trojici.

Pojďme na další dva konkrétní příklady: Vezměme třeba bod $[3; 2]$. Jemu odpovídá komplexní číslo $3 + 2i$. Zdálenost od počátku je $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, takže máme trojici $(3, 2, \sqrt{13})$, která není $\mathcal{PYTR}$. Opět umocníme:

$$(3 + 2i)^2 = 3^2 + 12i + 4i^2 = 5 + 12i$$

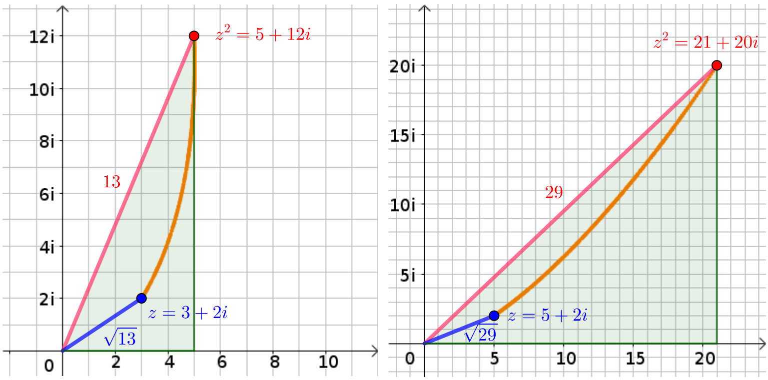
Dostáváme tedy bod $[5; 12]$, jehož vzdálenost od počátku je $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ a vznikla nám $\mathcal{PYTR}$ $(5, 12, 13)$ (obr.6a).

Podobně pro bod $[5, 2]$ máme

$$(5 + 2i)^2 = 21 + 20i$$

Dostáváme tedy bod $[5; 12]$, jehož vzdálenost od počátku je $\sqrt{21^2 + 20^2} = 29$ a vznikla nám $\mathcal{PYTR}$ $(20, 21, 29)$ (obr.6b).

Speciální případy: Víme, že umocněním na druhou se argument komplexního čísla zdvojnásobí. Na základě toho snadno vyvodíme následující skutečnosti.



(a) (5,12,13) (b) (20,21,29)

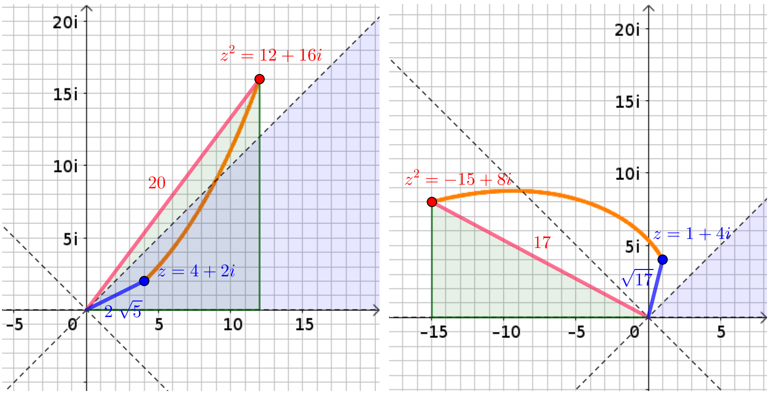
Obr. 6: Další příklady nalezení $\mathcal{PYTR}$

https://www.geogebra.org/m/jhvc7fjt

Leží-li výchozí bod uvnitř první poloviny I. kvadrantu, tedy pokud jeho argument φ je z intervalu $(0°, 45°)$ (modrý klín v obr.7a), leží jeho druhá mocnina uvnitř druhé poloviny I. kvadrantu, tedy jeho argument φ je z intervalu $(45°, 90°)$ a dostáváme vždy „normální“ pýthagorejskou trojici – viz předcházející příklady.

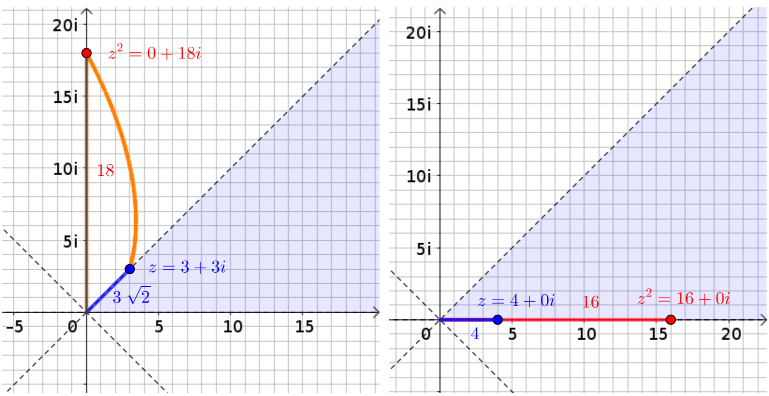
Pokud leží výchozí bod mimo modrý klín a neleží na souřadných osách ani na osách kvadrantů, má jeho druhá mocnina jednu nebo obě souřadnice sice záporné, ale to nám nevadí, pač absolutní hodnoty těchto souřadnic spolu se vzdáleností od počátku tvoří opět $\mathcal{PYTR}$ (viz obr.7b).

Pokud však leží výchozí bod na osách x, y nebo na osách kvadrantů, zdegeneruje zelený pýthagorejský trojúhelník v úsečku, takže pýthagorejská trojice nevznikne (viz obr.8). Stále však platí – např. v obr.8a rovnost $18^2 = 0^2 + 18^2$, respektive v obr.8b rovnost $16^2 = 16^2 + 0^2$.



(a) z uvnitř modrého klínu (b) z vně modrého klínu

Obr. 7: Poloha druhé mocniny v závislosti na poloze výchozího bodu.



(a) z na ose kvadrantu (b) z na souřadné ose

Obr. 8: Degenerovaný trojúhelník.

Pojďme vzít umocnění obecně: Vezměme **libovolný mřížkový bod** $[u; v]$, jemuž odpovídá komplexní číslo $z = u + vi$. Souřadnice u, v jsou zřejmě celá čísla. Prdněmež toto číslo na druhou mocninu:

$$z^2 = (u + vi)^2 = u^2 + 2uvi + (vi)^2 = u^2 + 2uvi - v^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$$

Umocněním jsme dostali bod $[u^2 - v^2; 2uv]$. Protože u, v byla celá čísla, jsou i souřadnice tohoto bodu celá čísla.

A jaká je jeho vzdálenost od počátku?

$$\begin{aligned} |u^2 - v^2 + 2uvi| &= \sqrt{(u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2} \\ &= \sqrt{u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2} \\ &= \sqrt{u^4 + 2u^2v^2 + v^4} \\ &= \sqrt{(u^2 + v^2)^2} = \underline{\underline{u^2 + v^2}} \end{aligned}$$

Protože u, v byla celá čísla, je také $u^2 + v^2$ celé a dostali jsme zaručeně pýthagorejskou trojici – až na zmíněné speciální případy, kdy zelený trojúhelník zdegeneroval.

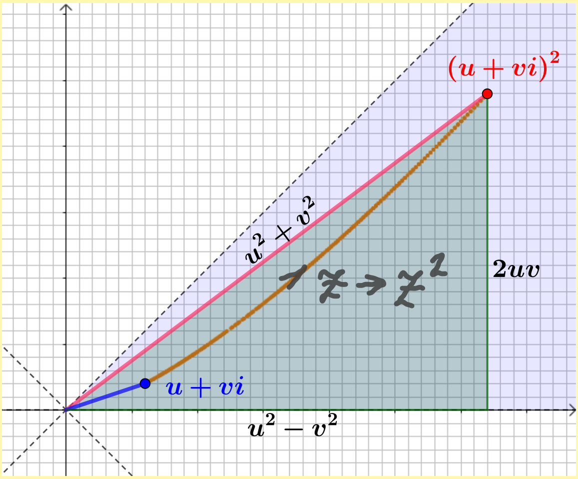
Pokud budeme brát jen body z vnitřku modrého klínu v obr. 7a vyhneme se tím těmto zdegenerovaným případům i situaci, kdy má druhá mocnina některou souřadnici zápornou.

Pro to stačí požadovat

$$u > v > 0$$

Tímto zobecněním jsme se přesvědčili, že:

> Vezmeme-li libovovolný bod $[u, v]$ jednotkové mřížky, kde $u > v > 0$ a umocníme-li na druhou mocninu příslušné komplexní číslo $(u + vi)$, dostaneme na betón **pýthagorejskou trojici** a, b, c
>
> $$a = u^2 - v^2; \quad b = 2uv; \quad c = u^2 + v^2 \tag{2}$$



https://www.geogebra.org/m/kanntrqc

Tyto tři vztahy jsou tedy vlastně generátory pýthagorejských trojic a říká se jim **Eukleidovské formule.**[3]

4 Parabolická mřížka

Existuje v rozložení pýthagorejských trojic, které jsme získali umocňováním komplexních čísel v komplexní rovině nějaký řád?

V obrázku 9a jsou žlutě vyznačeny všechny druhé mocniny odpovídající mřížkovým bodům v šedém čtverci.

V apletu v GeoGebře (odkaz pod obrázkem) si s tím můžeme pohrát a zjistíme, druhé mocniny leží na křivkách, které by mohly být parabolami (obr.9b a 9c).

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_triple#Generating_a_triple

Pohybuje-li se z po *vodorovné* mřížkové přímce (rovnoběžné s osou x), pohybuje se z^2 po *modré* křivce. Pohybuje-li se z po *svislé* mřížkové přímce (rovnoběžné s osou y), pohybuje se z^2 po *zelené* křivce.

Znamená to, že se umocněním bodů v komplexní rovině na druhou mocninu změní lineární mřížka na mřížku zakřivenou a mřížkové body nyní sedí v průsečíku modrých a zelených křivek.

Snadno se přesvědčíme o tom, že tyto křivky jsou opravdu parabolami. Vezmeme libovolný mřížkový bod $M[u, v]$, který reprezentuje číslo $z = u + vi$. Výše jsme si již odvodili, že $z^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$. Tomuto číslu odpovídá bod $M' = [u^2 - v^2; 2uv]$.

Představme si nejprve, že necháme bod M cestovat po mřížkové přímce p rovnoběžné s osou x (obr.10a). Jeho $y-$ová souřadnice v je **konstantní** a $x-$ová souřadnice u je proměnný **parametr**. Po jaké křivce se potom pohybuje bod M'? Pro jeho souřadnice platí

$$x = u^2 - v^2 \tag{3}$$
$$y = 2uv \tag{4}$$

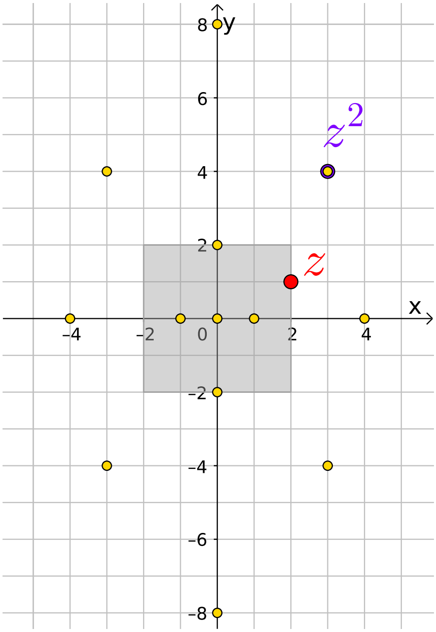
To jsou parametrické rovnice hledané křivky. Vyloučíme parametr u tak, že ho vyjádříme z rovnice (4) a dosadíme do rovnice (3):

$$u = \frac{y}{2v} \qquad \rightarrow \qquad \begin{aligned} x &= \frac{y^2}{4v^2} - v^2 \\ 4v^2x &= y^2 - 4v^4 \\ y^2 &= 4v^2x + 4v^4 \end{aligned}$$

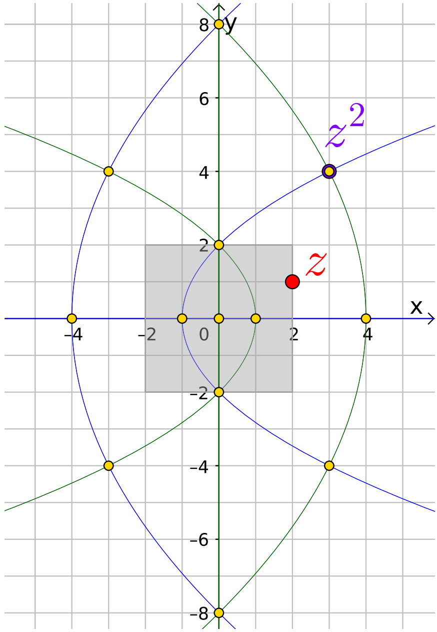
Odtud máme

$$\boxed{y^2 = 4v^2(x + v^2)} \tag{5}$$

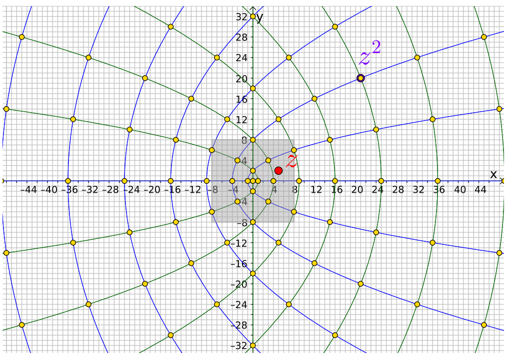
To je vskutku rovnice modré paraboly z obr.10a. Zde $v = 1$, takže rovnice má tvar $y^2 = 4(x + 1)$.



(a) Je-li z v mřížkovém bodě šedého čtverce, kam padne z^2?



(b) Body z^2 leží na parabolách, vodorovné přímky → modré paraboly, svislé přímky → zelené paraboly.



(c) Větší čtverec.

Obr. 9: Transformace lineární mřížky na parabolickou.

https://www.geogebra.org/m/wnm3h6mv

Představme si nyní, že necháme bod M cestovat po mřížkové přímce q rovnoběžné s osou y (obr.10b). Jeho $x-$ová souřadnice u je **konstantní** a $y-$ová souřadnice v je proměnný **parametr**. Po jaké křivce se potom pohybuje bod M'? Pro jeho souřadnice platí

$$x = u^2 - v^2 \tag{6}$$
$$y = 2uv \tag{7}$$

To jsou opět parametrické rovnice hledané křivky. Vyloučíme parametr v tak, že ho vyjádříme z rovnice (7) a dosadíme do rovnice (6):

$$v = \frac{y}{2u} \qquad \to \qquad \begin{aligned} x &= u^2 - \frac{y^2}{4u^2} \\ 4u^2x &= 4u^4 - y^2 \\ y^2 &= 4u^4 - 4u^2x \end{aligned}$$

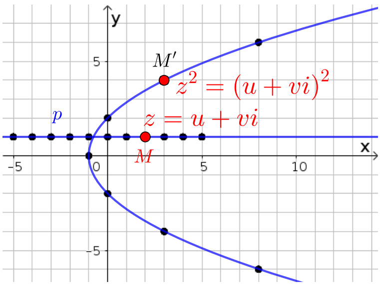
Odtud máme

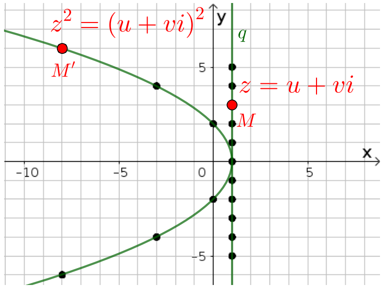
$$\boxed{y^2 = -4u^2(x - u^2)} \tag{8}$$

To je vskutku rovnice zelené paraboly z obr.10b. Zde $u = 1$, takže rovnice má tvar $y^2 = -4(x - 1)$.

Závěr: Zjistili jsme, že *pýthagorejské* trojice získané pomocí umocnění komplexního čísla $u+vi$ s celými souřadnicemi (Eukleidova formule (2)) se dají krástně vizualizovat pomocí parabolické mřížky.

Lineární mřížka se umocněním na druhou mocninu změní na mřížku *parabolickou*, jejímiž mřížkovými body jsou body z^2 (obr.11).





(a) přímka p rovnoběžná s osou x (b) přímka q rovnoběžná s osou y

Obr. 10: Jak se v důsledku umocnění komplexních bodů zobrazí mřížkové čáry rovnoběžné s osou x a y?

a) `https://www.geogebra.org/m/znkbnxum`

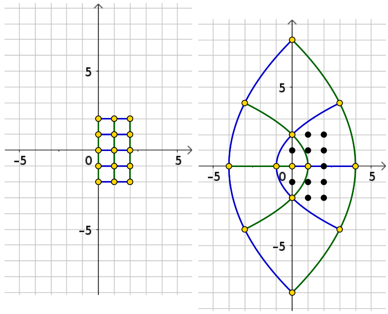
b) `https://www.geogebra.org/m/jn84qdxf`

Každý mřížkový bod z jednotkové mřížky se umocněním na druhou stane bodem z^2, jehož souřadnice spolu se vzdáleností od počátku určují nějakou **pýthagorejskou trojici**! (obr.12)

5 Dostali jsme umocněním všechny myslitelné $\mathcal{PYTR}$?

Trikem s umocněním jsme dostali nekonečně mnoho $\mathcal{PYTR}$. Vzniká otázka, zda to jsou **všechny možné** trojice. Snadno se přesvědčíme, že v naší parabolické mřížce některé $\mathcal{PYTR}$ bohužel chybí!

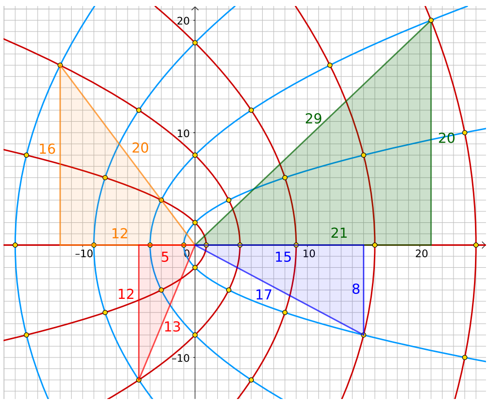
Například zde není číslo $6 + 8i$ (obr.13a), jemuž odpovídá trojice



(a) Před umocněním (b) Po umocnění

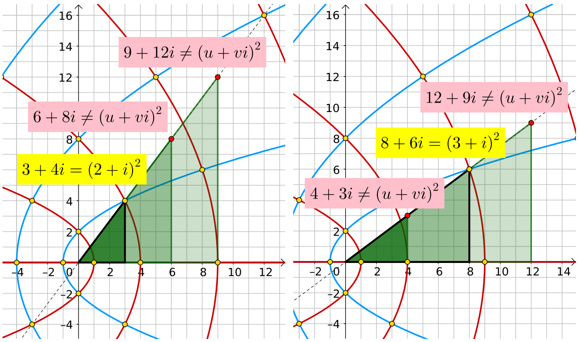
Obr. 11: Umocněním se lineární mřížka změní na parabolickou.

https://www.geogebra.org/m/cjamdu73



Obr. 12: Mřížkové body v parabolické mřížce určují nekonečně mnoho *pýthagorejských trojic* (ale ne všechny!).

https://www.geogebra.org/m/uuvpskxu



(a) popis (b) popis

Obr. 13: Některé $\mathcal{PYTR}$ v parabolické mřížce nejsou!

$(6, 8, 10)$. Tento bod jsme nedostali proto, že neexistují žádná celá čísla u, i, pro která by platilo, že $(u + vi)^2 = 6 + 8i$. (Umíš to dokázat?)

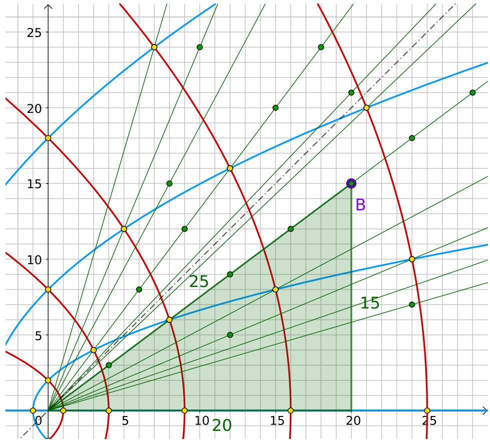
Podobně zde není ani číslo $9 + 12i$ (obr.13a), jemuž odpovídá trojice $(9, 12, 15)$.

Nicméně tyto dvě chybějící trojice nejsou něčím novým, pač jsou to jen násobky primitivní trojice $(3, 4, 5)$, kterou v našem schématu máme.

Stejně tak v našem schématu chybí čísla $4 + 3i$ a $12 + 9i$, které představují trojice $(4, 3, 5)$ a $(12, 9, 15)$[4]. Tyto trojice však dostaneme tak, že trojici $(8, 6, 10)$, která je dána v našem schématu číslem $8 + 6i$, vydělíme dvěma, případně vynásobíme číslem $\frac{3}{2}$ (viz obr.13b).

Ve skutečnosti, z důvodů, které vysvětlíme později, každá *pýthagorovská trojice*, která v našem schématu chybí, je jen nějakým násobkem jiné trojice, která se v něm vyskytuje!

[4]Víme, že $z^2 = (u^2 + v^2) + (2uv)i$, takže y–ová souřadnice druhé mocniny $2uv$, je vždy číslo **sudé**. Obě čísla, která jsme uvažovali, však mají y–ovou souřadnici lichou, proto v našem schématu nemohou být.



Obr. 14: Už jsou všechny!

https://www.geogebra.org/m/fz7wevww

To můžeme znázornit graficky pomocí polopřímek, které vedeme z počátku všemi možnými body parabolické mřížky a vyneseme na ně všechny možné přirozené násobky příslušné primitivní $\mathcal{PYTR}$ (viz obr.14).

Tím do našeho schématu přidáme všechny možné $\mathcal{PYTR}$, které ve schématu původně chyběly. V obrázku 14 jsme se omezili jen na první kvadrant a vykreslili jsme jen několik z nekonečně mnoha polopřímek, které ve skutečnosti mají počátkem procházet.

Představíme-li si, že jsme parabolickou mřížku opravdu doplnili o nekonečně mnoho polopřímek s vyznačenými chybějícími trojicemi, dostáváme schéma, ve kterém existuje každý pravoúhlý trojúhelník, který jsme kdy viděli nebo kdy uvidíme a který má délky stran vyjádřené přirozenými čísly.

V následující sekci ukážeme, že tomu tak opravdu je.

6 Důkaz úplnosti našeho schématu