Quotientenregel

Für alle x_0 ,bei denen sowohl die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$ als auch die Funktion $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, y = g(x)$ differenzierbar ist, ist auch die Quotientenfunktion $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $g(x) \neq 0$ an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt: $h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ mit $[g(x)]^2$.

Merkregel

$$\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: \left(\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}\right)' = \frac{\boldsymbol{f}' \cdot \boldsymbol{g} - \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}'}{\boldsymbol{g}^2}$$

Beweis: Quotientenregel

Die Quotienentenregel kann durch Anwendung der Produktregel abgeleitet werden.

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad |\cdot g(x)$$

$$f(x) = g(x) \cdot f(x) \qquad \textit{Produktregel}$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) \qquad \textit{Umformen}$$

$$g(x) \cdot h'(x) = f'(x) - g'(x) \cdot h(x) \qquad \textit{Einsetzen für } h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$g(x) \cdot h'(x) = f'(x) \cdot g'(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$g(x) \cdot h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g(x)} \qquad |: g(x)$$

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)} \qquad \blacksquare$$