

1. Derivada

Definição de Derivada: A derivada de uma função $f(x)$ em relação à variável x é a função f' cujo valor em x é:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

desde que o limite exista. A **derivada** da função f no ponto a é representada por $f'(a)$ ou por $\frac{df}{dx}(a)$

Usando a definição de derivada como um limite vamos então determinar a derivada da seguinte função

$$f(x) = x^2.$$

Solução:

Primeiramente vamos determinar $f(x+h)$. Como fazemos isso? Basta apenas substituir o x por $x+h$. Tenta ai!

$$f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

Agora substituindo e calculando o limite temos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = 2x$$

Vejam agora algumas propriedades de algumas funções todas decorrentes da definição de derivada como um limite.

propriedade 1 – Derivada de uma Constante: Seja c uma constante e $f(x)=c$ para todo x do domínio, então $f'(x)=0$

Exemplo 1 – Seja $f(x) = 8$, então:

$f'(x)=0$ ou usando outra nomenclatura temos:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(8) = 0.$$

propriedade 2 – Seja n um número inteiro maior do que zero e $f(x) = x^n$, então: $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Exemplo 2: Calcule a derivada de $f(x) = x^3$

Solução: $f'(x)=3x^{3-1} = 3x^2$

Propriedade 3 – Seja $f(x)$ uma função e c uma constante, então $g(x)=cf(x)$ então se existir a $f'(x)$, vale a igualdade:

$$g'(x) = c f'(x)$$

Propriedade 4 – (Regra da Derivada da Soma)

Seja f e g funções deriváveis de x , então a soma das duas $f + g$ é derivável em qualquer ponto onde ambas são deriváveis. E vale a igualdade:

$$(f + g)' = f' + g'$$

Exemplo 3 – Determine a derivada de $f(x) = x^4 + 12x - x^3$

Solução: Sendo, $g(x) = x^4$; $h(x) = 12x$ e $T(x) = -x^3$

As respectivas derivadas são:

$$g'(x) = 4x^3, h'(x) = 12 \text{ e } T'(x) = -3x^2$$

Dessa forma:

$$f(x) = g(x) + h(x) + T(x)$$

E a derivada de $f(x)$ será:

$$f'(x) = 4x^3 + 12 - 3x^2$$