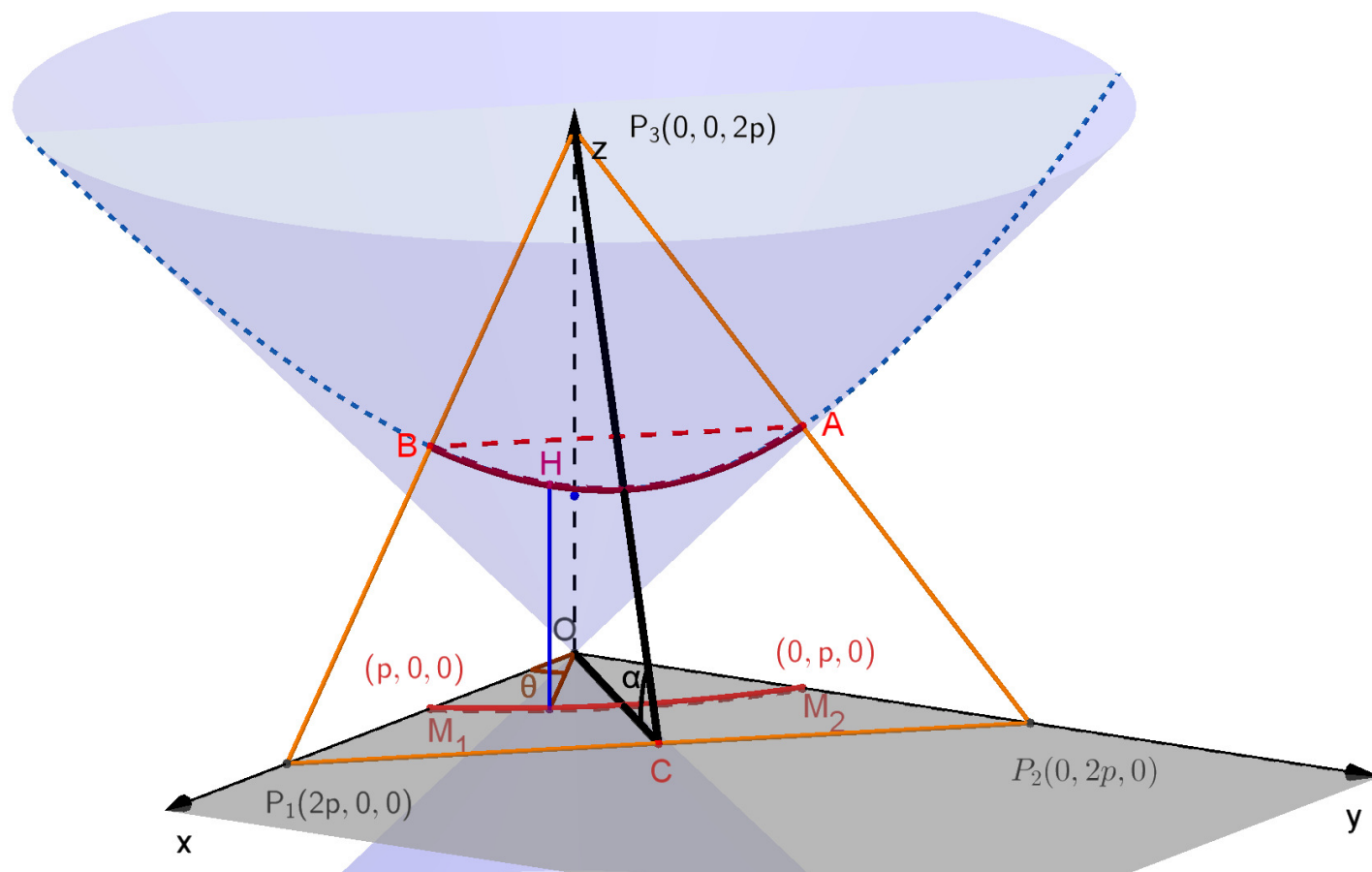




Calculul integralei

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + \cos(\theta) + \sin(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta)}$$

În figura din pagina anterioară se pot observa:

- arcul hiperbolei obținute prin intersectarea conului de ecuație $z^2 = x^2 + y^2$ cu planul de ecuație $x + y + z = 1$, care este delimitat de planele (xOz) și (yOz), și
- proiecția acestui arc pe planul (xOy).

Ecuatiile parametrice ale celor două arce, în funcție de parametrul θ sunt:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & \begin{cases} x = \frac{2p \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta) + \sin(\theta)} \\ y = \frac{2p \sin(\theta)}{1 + \cos(\theta) + \sin(\theta)} \\ z = \frac{2p}{1 + \cos(\theta) + \sin(\theta)} \end{cases}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \blacksquare \quad & \begin{cases} x = \frac{2p \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta) + \sin(\theta)} \\ y = \frac{2p \sin(\theta)}{1 + \cos(\theta) + \sin(\theta)} \\ z = 0 \end{cases}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Dacă $P(x, y) \in \widetilde{M_1 M_2} \rightarrow \rho = OP = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2p}{1 + \cos(\theta) + \sin(\theta)}$

Aria suprafeței delimitate de arcul de curbă $\widetilde{M_1 M_2}$, segmentul $[OM_1]$ și segmentul $[OM_2]$ se poate calcula astfel:

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2}{2} d\theta = 2p^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 + \cos(\theta) + \sin(\theta))^2} = p^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + \cos(\theta) + \sin(\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta)} \quad (1).$$

Suprafața menționată anterior reprezintă proiecția suprafeței delimitate de arcul de hiperbolă $\widetilde{BA}$, segmentul $[P_3 B]$ și segmentul $[P_3 A]$.

Între ariile celor două suprafețe există relația $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \cos(\alpha)$, unde α reprezintă măsura unghiului format de planele $(P_1 P_2 P_3)$ și (xOy).

$$\cos(\alpha) = \frac{\frac{2p\sqrt{2}}{2}}{\frac{2p\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (2)$$

Ținând cont de rezultatul prezentat în documentul PDF, *Calcul de arii*, se poate scrie

$$\mathcal{A}_2 = \left(\frac{3}{2} - 2\ln 2\right)p^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(p\sqrt{2})^2 \quad (3)$$

Din relațiile (1), (2) și (3) se obține

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + \cos(\theta) + \sin(\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta)} = \left(\frac{3}{2} - 2\ln 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{6}}{3} \ln 2$$