

從歲月的童話談數學教育

關樹培



Believe in the limitless potential of human beings. When you expect the best from your students, you'll get it.

我相信人類無限浩瀚的潛能。教師對學生的期望總會默然成真。

— Karen Katafiasz



前言

同學們，你好！雖然過了一星期，但是堂上與你們熱烈討論的情況仍然在我腦海中徘徊，下課後，你們好幾位同學放棄趕搭校車，留下來詢問和討論有關分數除法的教與學。這份學習的熱忱教人欣悅，可惜上課的時間有限，未能盡言。怎樣才可以和你們詳談，分享教學心得呢？思來想去，終於鼓起勇氣寫作這篇文章，希望以數學教學的實例，引證我們討論過的理念，也藉以整理一己雜亂無章的思緒。



一位女孩子學數學的經歷

現在先從妙子學習分數除法的苦澀經歷談起罷！下面是她和二姐的對話。

二姐：「坐低啦！首先唸乘數表 聽^ㄟ。」

妙子：「我讀五年級 啦，妳當我白痴 咩！」

二姐：「如果妳識唸，點會錯咁多呀？」

妙子：「哩 D 分數除法。」

二姐：「！妳首先將分子分母顛倒，然後利用乘法來計算。學校妳先生無教妳 咩？」

妙子：「……………」

二姐：「咁妳點解會錯得？」

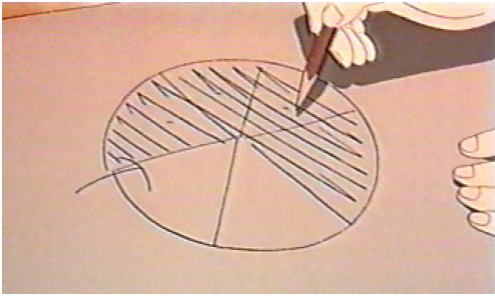
妙子：「分數同分數相除應該點做？」

二姐：「^ㄟ！」

妙子：「！好似呢條咁，三分之二個蘋果除以四分之，即三分之二個蘋果，四個人分食，每個人分倒幾多 唔？」

二姐：「⌘ ！」

妙子：「 」，咁樣，一、二、三、四、五、六，每人六分之一個囉！」



二姐：「唔 唔 唔 呀！咁 乘數 咋。」

妙子：「咁點解乘出來的答案細？」

二姐：「三分之二個蘋果用四分之一除，咁之話.....咩咁囉！因為妳成日唸住食呀，所以先正會攞錯。總之妳要記住乘數要顛倒先呀！」

來源：《歲月的童話》



小思

若果你是二姐，你會怎樣指導妙子呢？



關聯式理解

姑且撥開教學態度不談，二姐確曾向妙子說明計算的步驟：首先將分子分母顛倒，然後利用乘法來計算。但這般祇求算出答案，不求箇中理由的機械式運算不能夠滿足妙子的求知慾。不若我們一起來討論怎麼辦才能夠建立關聯式理解。

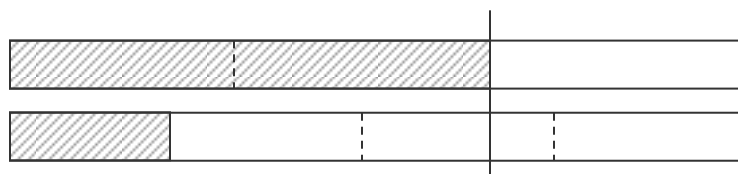
要明辨這道題的計算方法，可以透過摺紙，模擬或探索規律來加以說明。



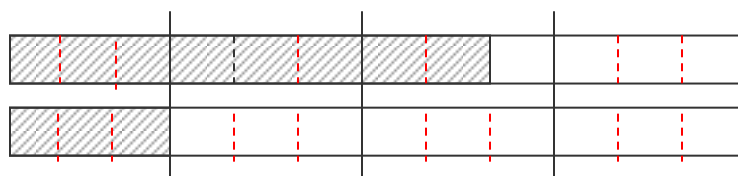
摺紙法

摺紙法的第一步，我們需要把 $\frac{2}{3} \div \frac{1}{4}$ 透過解碼過程 (decoding process) 將算式翻譯成一道摺紙的問題，譬如說：一條紙條的 $\frac{2}{3}$ 包含著多少條 $\frac{1}{4}$ 的紙條呢？(這是除法的包含概念) 只要把兩條有 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{1}{4}$ 摺紋的紙條排在一起，很容易估計到答

案是介乎 2 與 3 之間。如果妙子看到這一點，她一定會發現自己的錯誤！

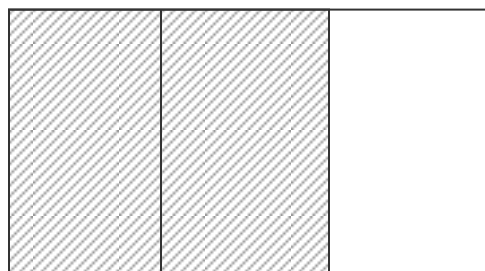


但準確的答案是多少呢？我們便要作進一步思考了。每段的大小不同是難以比較的，故此我們再把每份細分，使他們的長短相等。(即通分母) 如此一來，答案

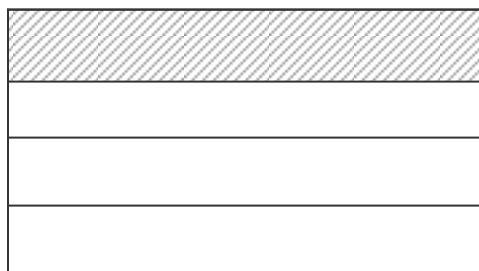


$2\frac{2}{3}$ 不是活現在我們眼前嗎？

不用紙條，這種想法可以用另一種形式在一張紙上摺出來。先考慮兩個分

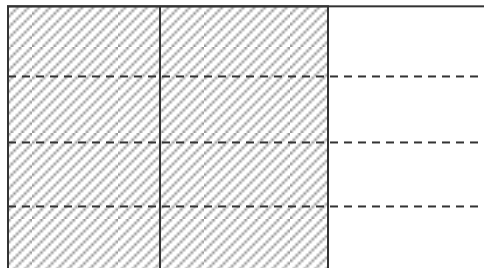


一張紙的三分之二

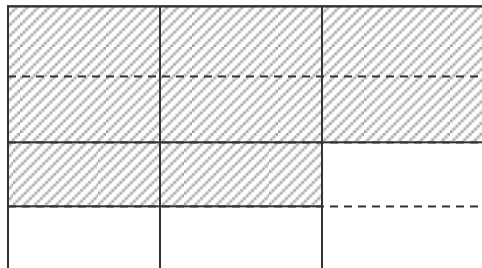


一張紙的四分之一

數在紙張上的表達形式，再以相同方法在同一張紙上摺，然後重組陰影部份成為 $\frac{1}{4}$ 的橫行，我們便輕而易舉地見到 $2\frac{2}{3}$ 的答案了。



直行是三分之二，橫行是四分之一。



重組陰影格子



小思

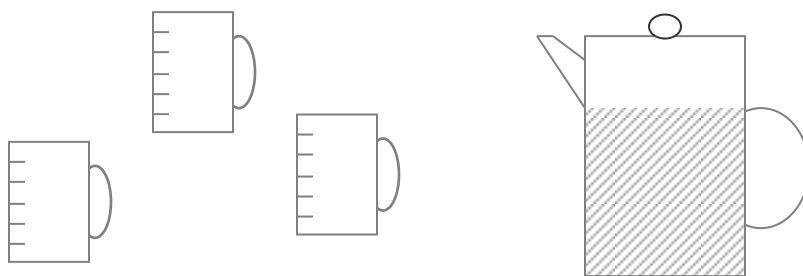
1. 何謂編碼 (encoding process) 和解碼過程？
2. 我們可以運用除法的均分概念作解碼嗎？為甚麼？



實物模擬

若果上面每一格以數粒代表，則摺紙張的過程可以轉化為砌數粒或積木的活動了。你也來試試看吧！

我已忘記了這位教師的名字，她提供了更為適合小學生的模擬實況 (情境)：一瓶容量為一公升的茶壺裏尚餘 $\frac{2}{3}$ 升的茶，現在把茶倒進容量為 $\frac{1}{4}$ 公升的茶杯內 (可能啤酒杯更合乎真實情境)，可以盛多少杯呢？比起上題，這樣的解碼就更生活化，而且可以具體地透過倒茶的過程求得結果。



見過她的數題，再擬一題便相對容易。這是我擬的情境：學校的畢業典禮快到了，小愷協助班主任范老師紮文憑。紮文憑的絲帶每條長 $\frac{1}{4}$ 米。現在范老師的桌上尚餘絲帶 $\frac{2}{3}$ 米，問小愷還可以裁出多少段絲帶作紮文憑之用呢？(合理的

答案是 2 段，而不是 $2\frac{2}{3}$ 段！)



小思

1. 你喜歡那一題？是甚麼原因？
2. 你也自擬一道合適在課室裏作模擬活動的數題吧！
3. 「編碼是科學的，解碼卻是藝術。」你同意嗎？為甚麼？



規律探索

透過倒茶的模擬可以獲得特定數題的解答，卻不可以單獨找出方法來。教師需要改變茶的多少和杯的容量，傾倒和量度求得答案，且將資料表列出來，再指導學生歸納出計算的方法。

	茶量	杯的容量	可倒多少杯
1	$\frac{2}{3}$ 升	$\frac{1}{4}$ 升	$2\frac{2}{3}$
2			
3			
4			
5			

許多教師會暫且擱置 $\frac{2}{3} \div \frac{1}{4} = 2\frac{2}{3}$ 這道題，而先把她簡化成 $\frac{2}{3} \div 4 = ?$ (分數除以整數) 去與學生討論。由於 $\frac{2}{3} \div 4 = \frac{2}{3} \div \frac{4}{1} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$ 較容易解釋和令學生明白，故於推論得「顛倒分子分母，然後依乘法計算」的策略後，再提問學生計算 $\frac{2}{3} \div \frac{1}{4} = ?$ 的方法，大部份的孩子都相信先前的方法可推展到分數除以分數的數題上去。



小思

1. 歸納法是數學證明嗎？為什麼？
2. 數學歸納法是歸納抑是演繹法呢？
3. 甚麼是類比法？比較她與演繹、歸納的異同。
4. 你還想出其他推導分數除法的策略嗎？



教師的抉擇

每次討論至此，同學總愛查問那一個方法最適合小學生。我卻反問同學每種方法的優點及缺點。

摺紙法的材料簡單、易做；而且「8 (2×4)小格可以組成多少列3格為一列的橫行？(即 $\frac{2 \times 4}{3 \times 1}$)」呼之欲出，但要解釋清楚，教師的指導顯得非常重要，需要細緻的安排。模擬法於三種方法中最為具體，但不能獨立演繹出算法來，而且解碼的過程需具靈感和心思，才可以設計出既生活化，又容易在課室裏施行的活動來。探索規律是小學生的強項，要留意的是歸納法雖然是發現的開端，卻非嚴謹的數學證明。敏銳的觀察力和豐富的聯想力固然重要，但我們也得掌握適當的時機讓學生欣賞嚴謹的數學證明及其能力。

影響教學的因素又何止於此，作為教師的我們還要考慮以何種模式在課室裏進行教學：老師講述？學生發現？分組討論？實踐活動？數學解難？探究？其中的選擇又與客觀存在的因素互為相聯，舉例說時間問題、秩序問題、教具的齊備多寡、學生的成熟程度和根基的鞏固程度等等都是。

況且有效的數學教師會將教學看成一個連續的過程。備課時會作整個單元(而非每課)的考慮。他們關注問題包括如何由淺入深、怎麼由已知帶出未知、每個重點之間的關係等。凡此種種，詳細留待編寫單元進度及數學課教案時再談好了。



小思

1. 分數除法可以跟乘法一樣(即分子除以分子，分母除以分母)計算嗎？
2. 為甚麼教師需要掌握各式各樣的教學方法？
3. 說出指導學生學習數學的備課方法。



既科學又藝術

或許這是教學迷人、叫人沉醉的地方。在大原則之下，我們會因時、因地、因事、因人而作變化及調整。這樣的經驗領著我們不斷地成長。數學教學有一個可跟從的大框架，卻沒有不易的法門。她既是科學，亦是藝術！

結束前，與你們分享一些數學家的名句，你有同感嗎？

Discovery and learning From the very beginning of his education, the child should experience the joy of discovery.

– Alfred North Whitehead

The laws of Nature are written in the language of mathematics ... the symbols are triangles, circles and other geometrical figures, without whose help it is impossible to comprehend a single word.

– Galileo Galilei

Imagination is more important than knowledge.

– Albert Einstein

It is impossible to be a mathematician without being a poet in soul.

– Sofia Kovalevskaya

The mathematician's best work is art, a high perfect art, as daring as the most secret dreams of imagination, clear and limpid. Mathematical genius and artistic genius touch one another.

– Gosta Mittag-Leffler

Besides language and music, mathematics is one of the primary manifestations of the free creative power of the human mind.

– Hermann Weyl

Life is good for only two things, discovering mathematics and teaching mathematics.

– Simeon Poisson

Mathematicians do not study objects, but relations among objects; they are indifferent to the replacement of objects by others as long as the relations don't change. Matter is not important, only form interests them.

– Henri Poincaré



小思

1. 選你最喜歡的名句與同學討論及分享。
2. 數學像
3. 研習數學的本質對數學的教與學有甚麼作用？
4. 於數學課程裏，另選一課題，作一分析，然後與同學分享心得。



參考資料

1. 宮崎駿 (1991)：《歲月的童話》，香港，亞洲影帶出版社。
2. 理察·史金 (1995)：《小學數學教育 – 智性學習》，香港，香港公開進修學院出版社。
3. 胡光銑(1999)：《小學數學教案》，北京，北京師範大學出版社。
4. Burns, M. (1988) *A Collection of Maths Lessons for the primary classroom v.1* Sausalito, Calif.: Math Solutions Publications.
5. Burns, M., Humphreys, C. (1988) *A Collection of Maths Lessons for the primary classroom v.2&3* Sausalito, Calif.: Math Solutions Publications.
6. Math Archives <http://archives.math.utk.edu/index.html>
7. The Math Forum <http://mathforum.com/>
8. Smile Program Mathematics Program <http://www.iit.edu/~smile/mathinde.html>
9. Quotations for Every Mathematics Class
<http://www.nctm.org/mt/1998/10/quotations.html>
10. Mathematical Quotation Server
<http://math.furman.edu/~mwoodard/mquot.html>