

Limieten van rijen

Karel Appeltans

July 2, 2023

1 Het begrip rij

1.1 Voorbeelden

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...
- 2, 5, 8, 11, 14, 17, ...
- 3, 9, 27, 81, ...
- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$
- 8, 17, -13, 22, ...
- $0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \dots$
- 2, 4, 8, 16, ...
- 2, 4, 8, 16, ...
- 2, 3, 5, 7, 11, ...
- 24, -12, 6, -3, ...

1.2 RR en MR

Rekenkundige rij:

Voorbeeld:



t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
5	8	11	14	17	20	23	26	29	32

Wat valt op:



verschil : $v = t_2 - t_1 = 8 - 5 = 3$

of $t_2 = t_1 + 3$

☒ recursieve formule

$t_n = t_{n-1} + v$, met start t_1

☒ expliciete voorschrift



t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
5	8	11	14	17	20	23	26	29	32

$t_7 = t_1 + (7 - 1) \cdot 3$

$23 = 5 + (6) \cdot 3$

☒ expliciete formules

$t_n = t_1 + (n - 1)v$

$t_n = t_p + (n - p)v$

Figure 1: <https://www.geogebra.org/m/utbsf4p6>

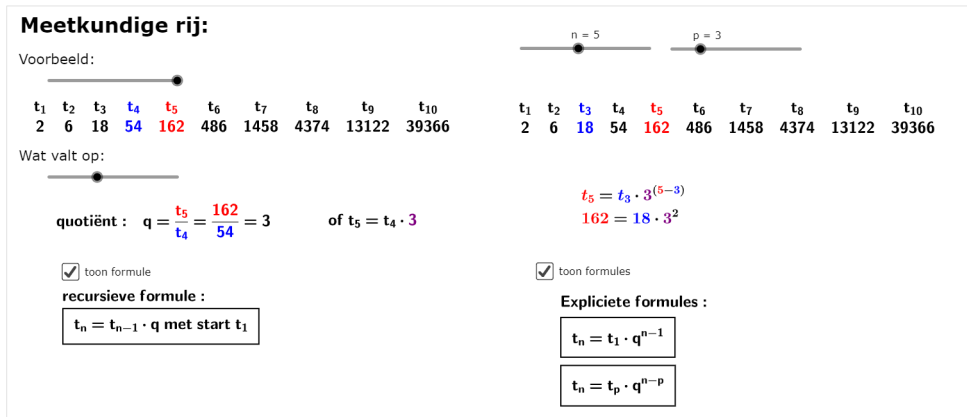


Figure 2: <https://www.geogebra.org/m/fbuwskxk>

1.3 expliciet voorschrift bij willekeurige rijen



Figure 3: <https://www.geogebra.org/m/ESeUy7pn>

1.4 Oefeningen

- Geef voor de volgende rijen telkens de twee eerstvolgende termen. Bepaal, indien mogelijk, een recursief en expliciet voorschrift

- 4, 7, 10, 13, ...
- -2, 6, -18, 54, ...
- $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, \dots$
- $\sqrt{3}, -\sqrt{6}, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{6}, \dots$
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \dots$
- $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \dots$
- 2, 1, $\frac{8}{9}, 1, \frac{32}{25}, \dots$

- Los op:

1. An arithmetic sequence begins 5, -3, -11, -19, -27, ...

Calculate t_{20} , the 20th term.

$t_{20} =$

Figure 4: <https://www.geogebra.org/m/utbsf4p6>

3. Los op:

1. A geometric sequence begins $192, -96, 48, \dots$

Calculate t_9 , the 9th term.

$t_9 =$

Check

Figure 5: <https://www.geogebra.org/m/fbuwskxk>

4. De termen van de rij u_n voldoen aan $u_1 = \frac{1}{3}$ en $3u_{n+1} - 6u_n - 1 = 0$

(a) Toon aan dat de rij $u_n + \frac{1}{3}$ een MR is

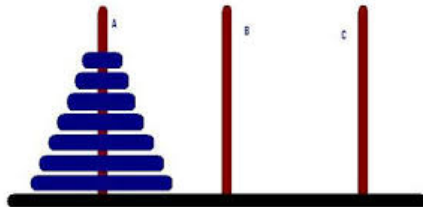
(b) Bepaal een expliciet voorschrift van deze MR

5. Gegeven is de RR $u_n : 3, 1, -1, \dots$ en de MR $v_n : 32, 16, 8, \dots$. Bepaal een expliciet voorschrift van de rij $w_n = u_n + v_n$. (A: $w_n = 5 - 2n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}$)

6. De 2de, 8ste en 44ste term van een RR (met $u_1 = 1$ en v positief) vormen een MR. Bepaal de waarde van v . (antw. $v = 5$)

7. De 3de term van een MR is $\frac{81}{64}$ en de 5de term $\frac{729}{1024}$. Bepaal de 1ste term en het quotiënt.

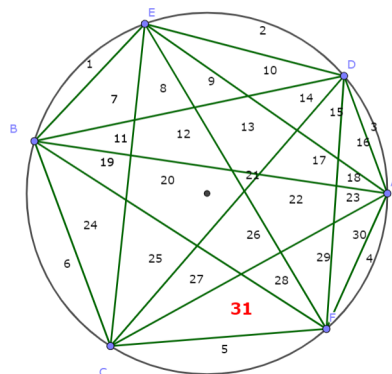
8. Torens van Hanoi



Geef een expliciet en een recursief voorschrift voor het aantal stappen

9. rij 2, 4, 8, 16, 31, ...

$b = 6$



☒ Expliciet voorschrift

$$t_n = \frac{1}{24} (n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$$

1 2 4 8 16 31 57 99 163 256

Figure 6: <https://www.geogebra.org/m/dggkrssv>

2 Limiet van een rij met expliciet voorschrift

2.1 eindige limiet

2.1.1 m.b.v. definitie

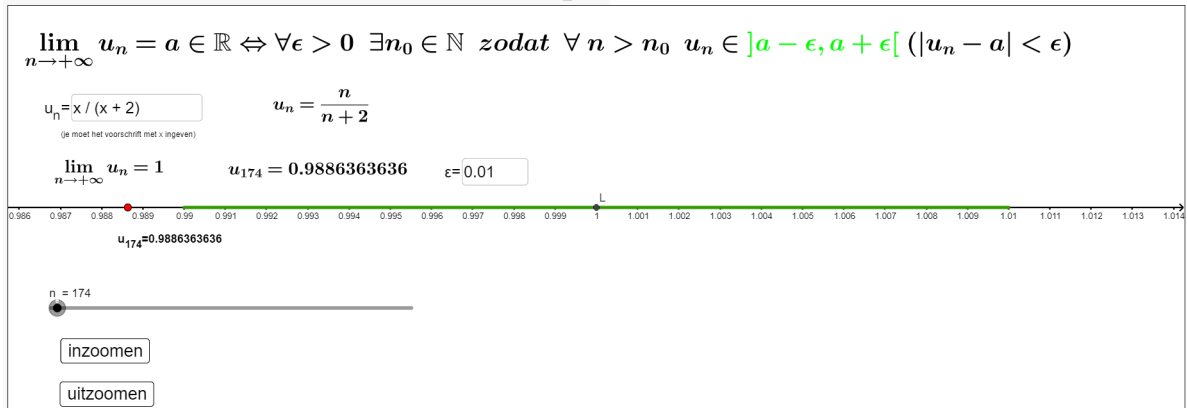


Figure 7: <https://www.geogebra.org/m/ESeUy7pn>

Oefeningen

1. $t_n : 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$
2. $t_n = \frac{2n+100}{n}$
3. $t_n = \frac{-3n+4}{n+2}$
4. $t_n = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$
5. $t_n = \frac{6n+500}{-2n+156}$
6. $t_n = \frac{2n+8000}{n}$ Is $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 3$?

2.1.2 m.b.v. rekenregels

Stelling 1:

Als $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l'$ dan

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n + v_n = l + l'$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot v_n = l \cdot l'$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} k \cdot u_n = k \cdot l'$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{l'}$ als $v_n \neq 0$ en $l' \neq 0$

Bewijs van 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall \frac{\epsilon}{2} > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ zodat } \forall n > n_1 \ u_n \in]l - \epsilon, l + \epsilon[\text{ of } l - \frac{\epsilon}{2} < u_n < l + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l' \Leftrightarrow \forall \frac{\epsilon}{2} > 0 \exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ zodat } \forall n > n_2 \ v_n \in]l' - \epsilon, l' + \epsilon[\text{ of } l' - \frac{\epsilon}{2} < v_n < l' + \frac{\epsilon}{2}$$

Neem nu $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ dan geldt voor alle $n > n_0$:

$$l + l' - \epsilon < u_n + v_n < l + l' + \epsilon$$

Wat de definitie is van $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n + v_n = l + l'$

Stelling 2:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0, p \in \mathbb{Q}_0^+$$

Toepassen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-3}{2n+1}$$

Oefeningen

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2n}{5n^4-n^2}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}-1}{2\sqrt{n+11}}$

Stelling 3: Een eindige limiet van een rij is uniek

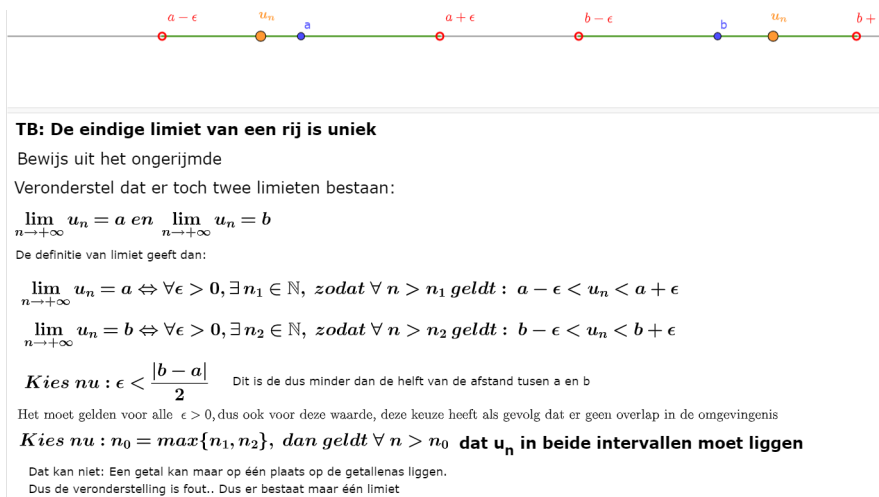


Figure 8: <https://www.geogebra.org/m/ESeUy7pn>

2.2 oneindige limiet

2.2.1 m.b.v. definitie

voorbeelden

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} -3n + 5$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n$

Definitie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall r > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \quad \text{zodat} \quad \forall n > n_0 \quad u_n > r$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall r > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \quad \text{zodat} \quad \forall n > n_0 \quad u_n < -r$$

2.2.2 m.b.v. rekenregels

som: $u_n + v_n$

		$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$	
		$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$	$+\infty$	$+\infty$	$/$
	$-\infty$	$/$	$-\infty$
	l	$+\infty$	$-\infty$

product: $u_n \cdot v_n$

		$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$	
		$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
	0	$/$	$/$
	$l, l > 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$l, l < 0$	$-\infty$	$+\infty$

omgekeerde: $\frac{1}{u_n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n}$
$+\infty$	0
$-\infty$	0
$l, l \neq 0$	$\frac{1}{l}$
0_+	$+\infty$
0_-	$-\infty$

quotient $\frac{u_n}{v_n}$

		$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$				
		$+\infty$	$-\infty$	0_+	0_-	$l', l' \neq 0$
$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$	$+\infty$	$/$	$/$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
	$-\infty$	$/$	$/$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
	0	0	0	$/$	$/$	0
	$l, l > 0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{l}{l'}$
	$l, l < 0$	0	0	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{l}{l'}$

oefeningen

1. Bewijs: $+\infty + \infty = +\infty$
2. Verklaar $(+\infty) + (-\infty)$ is een onbepaalde vorm
3. Verklaar $\frac{+\infty}{-\infty}$ is een onbepaalde vorm
4. Toon aan m.b.v. de rekenregels

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - n = +\infty$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 5n - 7}{2n^3 + 1} = \frac{3}{2}$$

5. Bereken m.b.v. de rekenregels:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} n^5 - n^4 + n^7$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$$

3 limiet van een rij met lineair recursief voorschrift

3.1 grafisch en algebraïsche oplossing

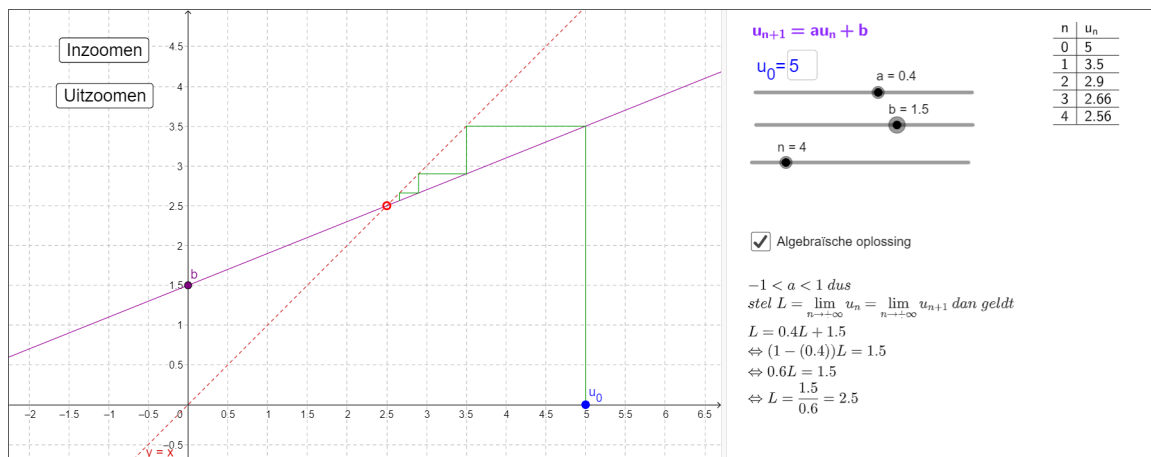


Figure 9: <https://www.geogebra.org/m/rxceutzj>

3.2 oefeningen

- LV Appeltans Boomteelt heeft een perceel bomen. Elk jaar wordt 20% gerooid en worden er 1000 nieuwe boompjes geplant. Het eerste jaar worden er 4000 boompjes geplant. Op lange termijn bekeken, hoeveel bomen bevinden zich er op het perceel?
- Mijn schoonvader gaat op consultatie bij dr. Bart Appeltans voor een ontstoken galblaas. Er moet onmiddellijk met medicatie begonnen worden: eerst een dosis van 50 mg en vervolgens elke drie uur een dosis van 25 mg. Het lichaam zal dit medicament ook afbreken: elke drie uur wordt 40% afgebroken. Het medicament is pas effectief als op lange termijn meer dan 60 mg. in het lichaam aanwezig blijft.
 - Zal de voorgeschreven dosis volstaan?
 - Welke begindosis moet er minimaal voorgeschreven worden om de 60 mg- grens te halen?
 - Welke hoeveelheid moet er minimaal om de drie uur gegeven worden om de 60 mg- grens te halen?
 - Wat is het maximale afbraak-% om de 60 mg- grens te behouden?
- Sinds enkele jaren mag er van president Poetin geen Limburgs fruit meer ingevoerd worden in Rusland. Belorta fruitveilingen en zijn directeur, P.Appeltans, hebben echter een smokkelroute opgezet. In een pakhuis wordt al het fruit verzameld. Helaas wordt per dag 60% onderschept door de Russische douane. Hoeveel ton fruit bevat op termijn het pakhuis, als elke dag 1500 kg vertrekt en de eerste lading niet onderschept wordt. Geef een grafische en algebraïsche oplossing.
- Gegeven is volgende rij met recursief voorschrift $u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$ met $u_1 = 0$ en $u_2 = 1$
 - Geef de eerste 4 termen van deze rij.
 - Geef een recursief voorschrift van de vorm $u_{n+1} = a \cdot u_n + b$ voor deze rij.

- (c) Bepaal grafisch en algebraïsch de limiet van deze rij.
5. Een watervolume van $2200m^3$ wordt verdeeld over twee bassins A en B. Via een pompsysteem wordt elke dag 10% van A naar B gepompt en 15% van B naar A. Bij de start van het systeem bevindt zich 800 l in bassin A en 1400 l in bassin B
- (a) Toon aan dat de hoeveelheid water in bassin A in functie van het aantal dagen gegeven wordt door $a_n = \frac{3}{4}a_{n-1} + 330$
- (b) Bepaal grafisch en algebraïsch de uiteindelijke hoeveelheid water in bassin A en B
6. Bepaal de limiet van de recursieve rij $u_{n+1} = p \cdot u_n + q$ als $u_0 = 12, u_1 = 15$ en $u_2 = 16$

4 Algemene technieken

4.1 insluitstelling

Beschouw drie rijen s_n , y_n en z_n . Veronderstel dat er een $k \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat

$$x_n \leq y_n \leq z_n \text{ voor alle } n \geq k.$$

Veronderstel bovendien dat x_n en z_n een limiet hebben en dat beide limieten gelijk zijn. Dan heeft ook de "middelste" rij y_n een limiet en bovendien is

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} y_n = \lim_{x \rightarrow \infty} z_n$$

oefeningen

1. Bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n}$
2. Bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$
3. Bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sin(n)}{2n - \cos(n)}$

4.2 stijgende en dalende rijen

Beschouw een stijgende rij x_n . Dan heeft deze rij altijd een limiet. Bovendien is deze limiet eindig als en slechts als de rij naar boven begrensd is (d.w.z. als er een $M \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat $x_n \leq M$ voor alle $n \in \mathbb{N}$)

Oefening

Formuleer nu de tweelingversie van deze stelling voor dalende rijen.

Meetkundige reeksen

Meetkundige rij: $t_1 = 2$ $q = 0.5$

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}
2	1	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.03125	0.01563	0.00781	0.00391	0.00195

Meetkundige reeks:

$n = 4$

$$s_4 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 3.75$$

s_1	s_2	s_3	s_4
2	3	3.5	3.75

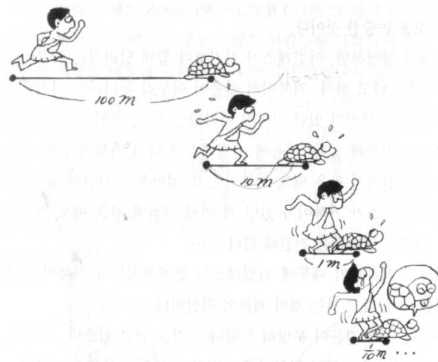
$n = 100$ $s_{100} = 4$

$$\text{als } -1 < q < 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{t_1}{1 - q}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{2}{1 - (0.5)} = 4$$

Figure 13: <https://www.geogebra.org/m/bsergwde>

5.3 paradox van Zeno



Voorsprong Schildpad

Achilles loopt...x sneller dan de schildpad

stap = 5

A 100

S

A 50

S

A 25

S

Als Achilles aangekomen is waar de schildpad vertrokken is, is de schildpad 50 m verder

Achilles moet dus een afstand van $100 + 50 + 25 + 12.5 + 6.25 + \dots$ meter overbruggen om de schildpad in te halen

☒ Toon oplossing

Dit is een som van een MR met $q = 0.5$, dus $|q| < 1$
Dus dit geeft:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{100}{1 - 0.5} = 200$$

Dus Achilles haalt de schildpad in na 200 m

<https://www.geogebra.org/m/parg6hnh> <https://www.geogebra.org/m/parg6hnh>

5.4 algemene formule

Gegeven meetkundige rij u_n met quotiënt q , met $|q| < 1$

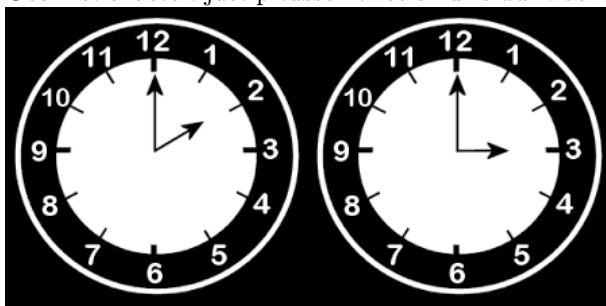
$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{u_1}{1 - q}$$

5.5 oefeningen

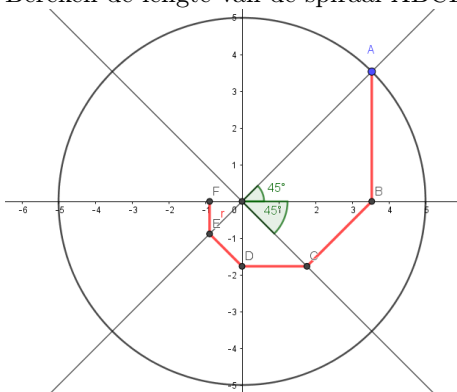
1. De algemene term van een RR wordt gegeven door $t_n = 3n + 7$. Bepaal de som van de eerste 50 termen. (A. 4175)
2. Gegeven is een RR met $u_4 = 7$ en $u_9 = 22$. Vanaf welke term zal de som van deze RR meer dan 10000 bedragen? (A. $n = 83$)
3. Gegeven is een MR met $t_3 = 144$ en $t_6 = 486$. Vanaf welke term zal de som van deze MR meer dan $8 \cdot 10^{18}$ bedragen? (A. $n = 96$)
4. Een grote theaterzaal heeft 18 zitplaatsen op de 1ste rij, 31 zitplaatsen op de 2de rij, 44 op de 3de rij. De laatste rij 746 plaatsen
 - (a) Bepaal het aantal rijen van deze immens grote theaterzaal
 - (b) Bepaal het totaal aantal zitplaatsen
5. Bekijk onderstaande figuren, gebouwd met vierkante tegels



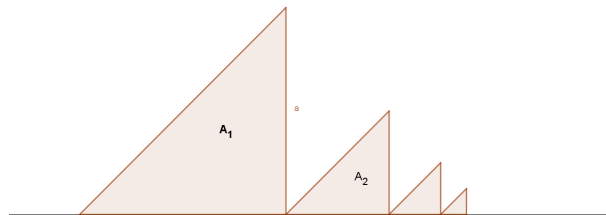
- (a) Hoeveel tegels zijn er nodig voor de 4de en 5de figuur?
 - (b) Hoeveel tegels zijn er nodig voor de n-de figuur?
 - (c) Is er een figuur die met exact 593 tegels gemaakt kan worden? Verklaar jullie antwoord.
 - (d) Hoeveel tegels zijn er in totaal nodig voor de eerste 57 figuren?
6. paradox van Zeno: Na hoeveel meter zal Achilles de schildpad inhalen bij een voorsprong van 400 meter en als Achilles 8 keer sneller loopt?
 7. Geef het exacte tijdstip tussen twee en drie uur waarop de grote wijzer de kleine wijzer inhaalt



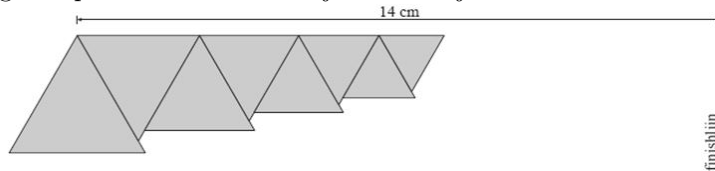
8. Bereken de lengte van de spiraal ABCDEF... als dit patroon zich blijft herhalen:



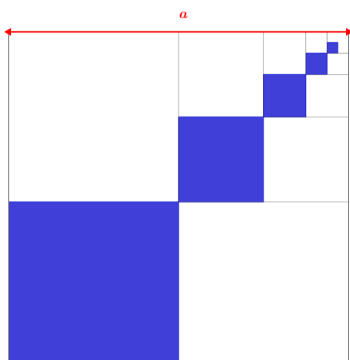
9. Een zijde van een gelijkzijdige driehoek is 12 cm. Als je de middens van de zijden met elkaar verbindt, verkrijg je een ingeschreven gelijkzijdige driehoek. In deze driehoek verbind je weer de middens van de zijden met elkaar. Dit geeft een volgende ingeschreven gelijkzijdige driehoek. En zo doe je maar verder zonder ophouden.
- (a) Bepaal de som van de omtrekken van alle driehoeken (A. 72 cm.)
- (b) Bepaal de som van de oppervlakte van alle driehoeken (A. $48\sqrt{3}cm^2$)
10. Je begint met een driehoek A_1 . Deze is rechthoekig en gelijkbenig; de gelijke benen hebben lengte a . Tegen A_1 komt driehoek A_2 ; deze heeft dezelfde vorm als A_1 , maar zijn afmetingen zijn maar de helft. Op dezelfde manier heeft A_3 zijden die maar half zo lang zijn als die van A_2 , enz.... Dit wordt doorgetrokken tot in het oneindige. Er ontstaat een soort zaagtandfiguur. Bereken de totale oppervlakte van deze figuur. (A. $\frac{2a^2}{3}$)



11. We maken een figuur die uit oneindig veel gelijkzijdige driehoeken bestaat. We beginnen met een gelijkzijdige driehoek met zijde 3. Rechtsboven plakken we er een gelijkzijdige driehoek aan met zijde 2,7 cm, dan een beetje met zijde 2,43. Enz. Na elke keer plakken komt de figuur dichter bij de finishlijn. We plakken oneindig vaak. Onderzoek m.b.v. een berekening of deze figuur op den duur de finishlijn overschrijdt.



12. Een rij vierkanten



Meetkundige reeks

Een vierkant met zijde a wordt in 4 gelijke vierkanten verdeeld.
Een van deze vierkanten wordt blauw ingekleurd.
Een ander deelvierkant wordt opnieuw in 4 gelijke deelvierkanten ingedeeld.
Hiervan wordt opnieuw één blauw ingekleurd en een ander opnieuw in vieren ingedeeld, waarvan één blauw wordt ingekleurd, enz.

aantal blauwe vierkanten

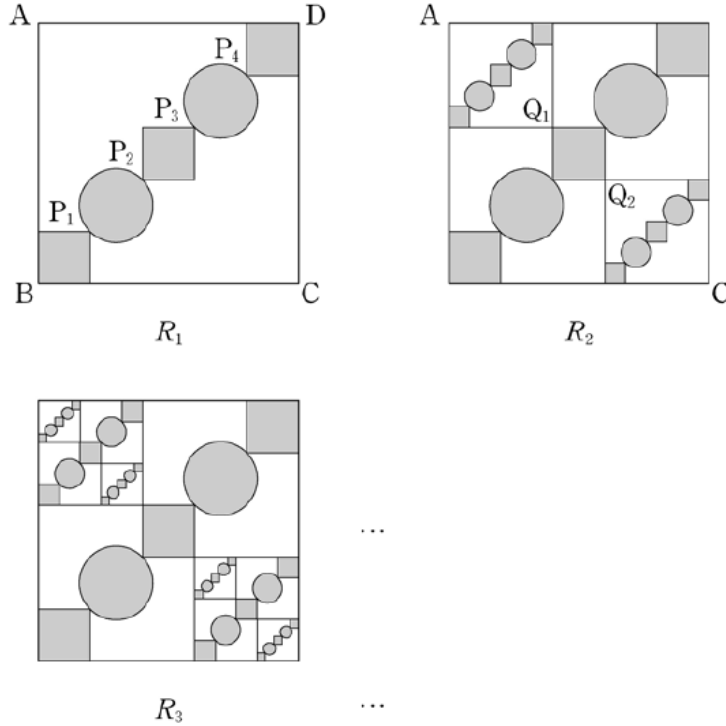
Bepaal de totaal ingekleurde blauwe opp in functie van zijde a

oplossing

Figure 14: <https://www.geogebra.org/m/parg6hnn>

13. Als $-\pi < x < \pi$ voor welke waarde(n) van x geldt dan dat $1 + |\cos x| + \cos^2 x + |\cos^3 x| + \dots = 2$
14. Een oefening uit een examen van Zuid-Korea: Bepaal de totale oppervlakte van alle gekleurde vierkanten en cirkels, als het patroon zoals te zien bij R_2 en R_3 zich steeds blijft herhalen. Het vierkant ABCD heeft een zijde van 5 cm.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{24}{17}(\pi+3)$ ② $\frac{25}{17}(\pi+3)$ ③ $\frac{26}{17}(\pi+3)$
 ④ $\frac{24}{17}(2\pi+1)$ ⑤ $\frac{25}{17}(2\pi+1)$

15. Schrijf 0,26262626... als een breuk

16. Schrijf 1,1333333... als een breuk

17. Hoeveel oplossingen voor x met $-90 < x < 90$ heeft volgende oneindige som:
 $\frac{1}{\tan(x)} + \frac{1}{\tan^2(x)} + \frac{1}{\tan^3(x)} + \dots$

6 taken

1. RR en MR
2. Limiet van een rij