Limieten van rijen

Karel Appeltans

5 februari 2020

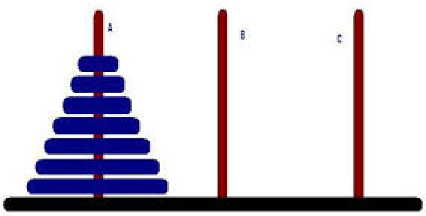
1 Herhaling: het begrip rij

1.1 Voorbeelden

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...
- 2, 5, 8, 11, 14, 17, ...
- 3, 9, 27, 81, ...
- 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,$\frac{1}{5}$,...
- 8, 17, -13, 22,...
- 0, $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{15}{16}$,...
- 2, 4, 8, 16,...
- 2, 4, 8, 16,...
- 2, 3, 5, 7, 11,...

1.2 Oefeningen

1. Handboek oef 8 blz. 313
   - 4, 7, 10, 13, ...
   - -2, 6, -18, 54, ...
   - $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9, ...
   - $\sqrt{3}$, $-\sqrt{6}$, $2\sqrt{3}$,$-2\sqrt{6}$,..
   - $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{17}$,...
   - $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, $\frac{5}{4}$,...
   - 2, 1, $\frac{8}{9}$, 1, $\frac{32}{25}$,...
2. Torens van Hanoi

   Geef een expliciet en een recursief voorschrift voor het aantal stappen
3. rij 2, 4, 8, 16, 31, ...

2 Limiet van een rij

2.1 Expliciet voorschrift

2.1.1 eindige limiet

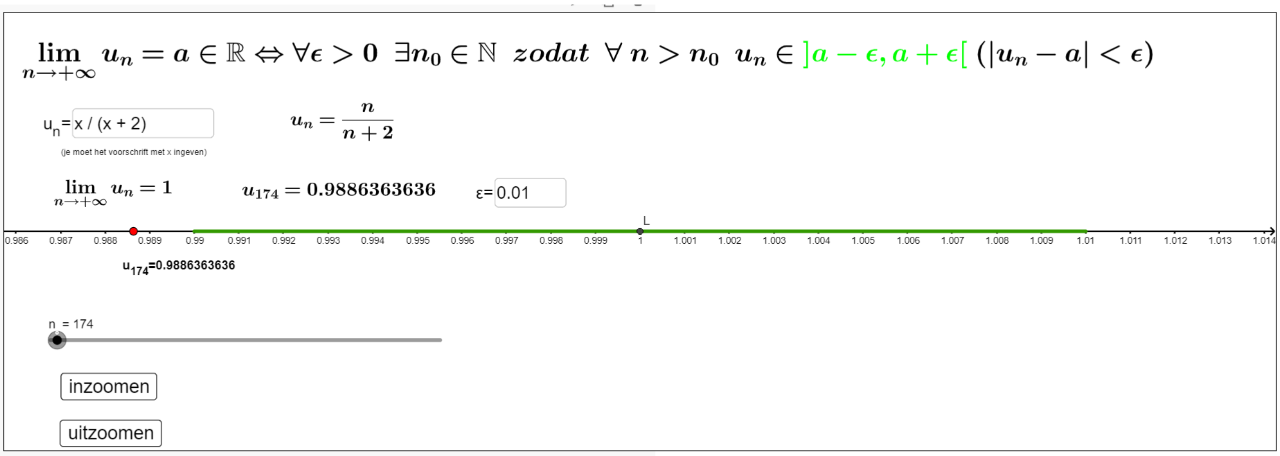
m.b.v. definitie

Definitie:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \quad zodat \quad \forall n > n_0 \quad u_n \in]a-\epsilon, a+\epsilon[$$

Oefeningen:

1. $t_n : 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
2. $t_n = \frac{2n+100}{n}$
3. $t_n = \frac{3n-4}{n+2}$
4. $t_n = 3 - (\frac{1}{2})^n$
5. $t_n = \frac{2n+8000}{n}$ Is $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 3$?



www.karelappeltans.be → discrete wiskunde → limiet van een rij expliciet voorschrift

m.b.v. rekenregels

Stelling
Als $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ en $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l'$ dan

1. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n + v_n = l + l'$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n.v_n = l.l'$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} k.u_n = k.l'$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{l'}$ als $v_n \neq 0$ en $l' \neq 0$

Bewijs van 1.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall\frac{\epsilon}{2} > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}_0 \quad zodat \quad \forall n > n_1 \quad u_n \in]l-\epsilon, l+\epsilon[\quad of \quad l - \frac{\epsilon}{2} < u_n < l + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = l' \Leftrightarrow \forall\frac{\epsilon}{2} > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N}_0 \quad zodat \quad \forall n > n_2 \quad v_n \in]l'-\epsilon, l'+\epsilon[\quad of \quad l' - \frac{\epsilon}{2} < v_n < l' + \frac{\epsilon}{2}$$

Neem nu $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ dan geldt voor alle $n > n_0$:

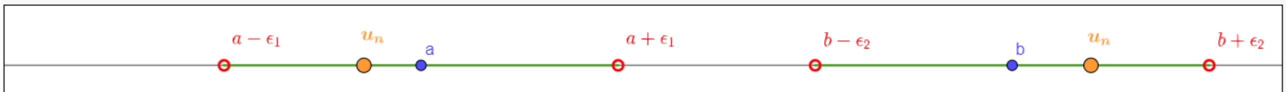
$$l + l' - \epsilon < u_n + v_n < l + l' < l + l' + \epsilon$$

Wat de definitie is van $\lim\limits_{n\to\infty} u_n + v_n = l + l'$

Basiselementen: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0, \, p \in \mathbb{N}_0$
Toepassen: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n-3}{2n+1}$
Oefeningen:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n}{5n^4-n^2}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{2\sqrt{n}+11}$

Stelling: een eindige limiet van een rij is uniek
Bewijs:



TB: De eindige limiet van een rij is uniek

Bewijs uit het ongerijmde

Veronderstel dat er toch twee limieten bestaan:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \text{ en } \lim_{n\to+\infty} u_n = b$$

De definitie van limiet geeft dan:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon_1 > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \text{ zodat } \forall\, n > n_1 \text{ geldt : } a-\epsilon_1 < u_n < a+\epsilon_1$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = b \Leftrightarrow \forall \epsilon_2 > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \text{ zodat } \forall\, n > n_2 \text{ geldt : } b-\epsilon_2 < u_n < b+\epsilon_2$$

$Kies\ nu: \epsilon_1 + \epsilon_2 < |b-a|$ Dit is de dus minder dan de afstand tusen a en b

De limieten gelden voor alle $\epsilon_1 > 0$ en $\epsilon_2 > 0$, dus ook voor deze waarde, deze keuze heeft als gevolg dat er geen overlap in de omgevingenis

$Kies\ nu: n_0 = max\{n_1, n_2\}$, dan geldt $\forall\, n > n_0$ **dat u_n in beide intervallen moet liggen**

Dat kan niet: Een getal kan maar op één plaats op de getallenas liggen.
Dus de veronderstelling is fout.. Dus er bestaat maar één limiet

20 / 20 2 s

www.karelappeltans.be → discrete wiskunde → limiet van een rij expliciet voorschrift

2.1.2 oneindige limiet

m.b.v. definitie

Voorbeeld: $\lim\limits_{n\to\infty} n^2$
Voorbeeld: $\lim\limits_{n\to\infty} -3n+5$
Voorbeeld: $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n$
Definitie:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall r > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \quad zodat \quad \forall n > n_0 \quad u_n > r$$
$$\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall r > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \quad zodat \quad \forall n > n_0 \quad u_n < -r$$

m.b.v. rekenregels

som: $u_n + v_n$

		$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$	
		$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$+\infty$	$+\infty$	/
	$-\infty$	/	$-\infty$
	l	$+\infty$	$-\infty$

product: $u_n.v_n$

		$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$	
		$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
	0	/	/
	$l,,l>0$	$+\infty$	$-\infty$
	$l, l<0$	18	$+\infty$

omgekeerde: $\frac{1}{u_n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{u_n}$
$+\infty$	0
$-\infty$	0
$l, l \neq 0$	$\frac{1}{l}$
0_+	$+\infty$
0_-	$-\infty$

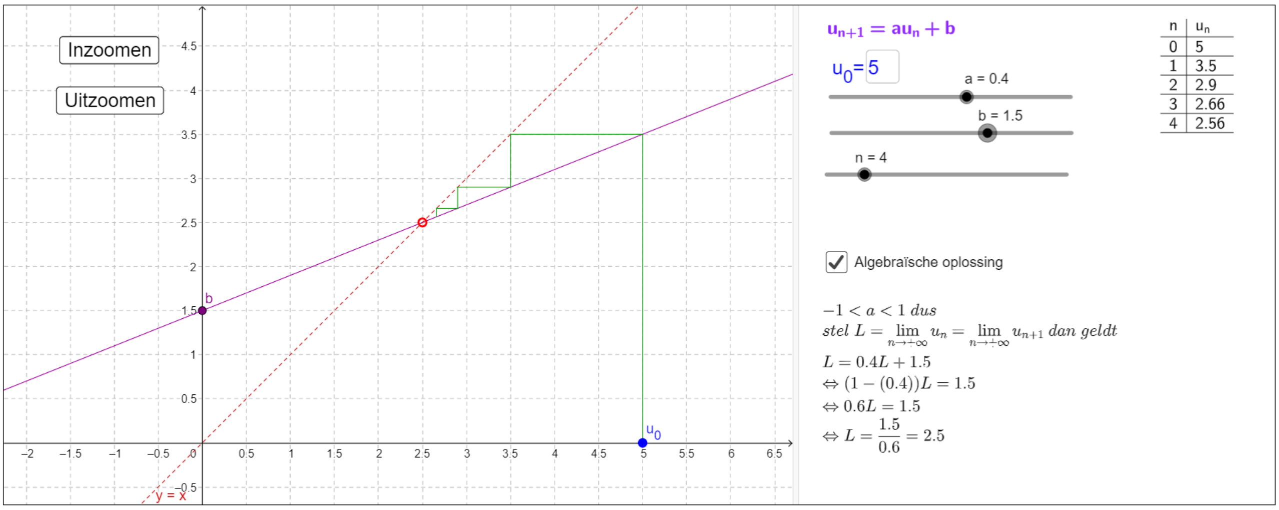
quotient $\frac{u_n}{v_n}$

		$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$				
		$+\infty$	$-\infty$	0_+	0_-	$l', l' \neq 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$+\infty$	/	/	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
	$-\infty$	/	/	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
	0	0	0	/	/	0
	$l, l > 0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{l}{l'}$
	$l, l < 0$	0	0	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{l}{l'}$

praktijk

2.2 Recursief voorschrift

2.2.1 grafisch



www.karelappeltans.be → discrete wiskunde → limiet van een rij recursief voorschrift

2.2.2 oefeningen

1. LV Appeltans Boomteelt heeft een perceel bomen. Elk jaar wordt 20% gerooid en worden er 1000 nieuwe boompjes gepland. Het eerste jaar worden er 4000 boompjes gepland. Op lange termijn bekeken,hoeveel bomen bevinden zich er op het perceel?

2. Mijn schoonvader gaat op consultatie bij dr. Bart Appeltans voor een ontstoken galblaas. Er moet onmiddellijk met medicatie begonnen worden: eerst een dosis van 50 mg en vervolgens elke drie uur een dosis van 25 mg. Het lichaam zal dit medicament ook afbreken: elke drie uur wordt 40% afgebroken. Het medicament is pas effectief als op lange termijn meer dan 60% in het lichaam aanwezig blijft.

   (a) Zal de voorgeschreven dosis volstaan?

   (b) Welke begindosis moet er minimaal voorgeschreven worden om de 60%- grens te halen?

   (c) Welke hoeveelheid moet er minimaal om de drie uur gegeven worden om de 60%- grens te halen?

   (d) Wat is het maximale afbraak-% om de 60%- grens te behouden?

3. Sinds enkele jaren mag er van president Poetin geen Limburgs fruit meer ingevoerd worden in Rusland. Belorta fruitveilingenen en zijn direceur, P.Appeltans, hebben echter een smokkelroute opgezet. In een pakhuis wordt al het fruit verzameld. Helaas wordt per dag 60% onderschept door de Russische douane. Hoeveel ton fruit bevat op termijn het pakhuis, als elke dag 1500 kg vertrekt en de eerste lading niet onderschept wordt. Geef een grafische en algebraïsche oplossing.

4. Gegeven is volgende rij met recursief voorschrift $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ met $a_1 = 0$ en $a_2 = 1$
   (a) Geef de eerste 4 termen van deze rij
   (b) Geef een recursief voorschrift voor deze rij
   (c) Bepaal grafisch en algebraísch de limiet van deze rij

5. Een watervolume van $2200m^3$ wordt verdeeld over twee bassins A en B. Via een pompsysteem wordt elke dag 10% van A naar B gepompt en 15% van B naar A. Bij de start van het systeem bevindt zich 800 l in bassin A en 1400 l in bassin B
   (a) Toon aan dat de hoeveelheid water in bassin A in functie van het aantal dagen gegeven wordt door $a_n = \frac{3}{4}a_{n-1} + 330$
   (b) Bepaal grafisch en algebraísch de uiteindelijke hoeveelheid water in bassin A en B

6. Bepaal de limiet van de recursieve rij $u_{n+1} = p \cdot u_n + q$ als $u_0 = 12, u_1 = 15$ en $u_2 = 16$

2.3 Algemene technieken

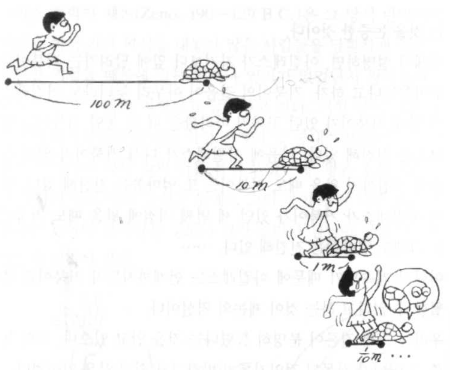
Oefeningen

1. Bereken $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$

2. Bereken $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot e^{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$

3 Limiet van meetkundige reeks

3.1 paradox van Zeno

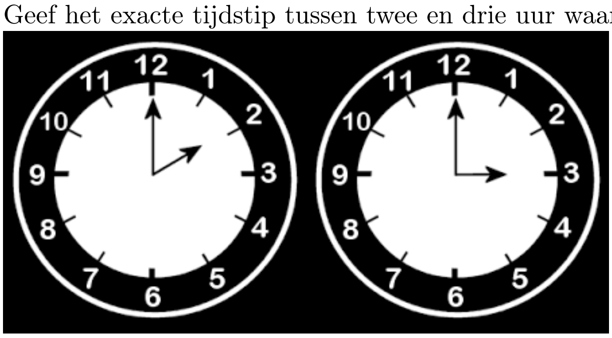


3.2 algemene formule

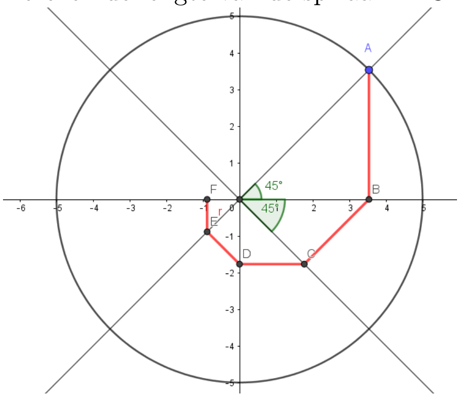
3.3 oefeningen

1. paradox van Zeno: Na hoeveel meter zal Achilles de schildpad inhalen bij een voorsprong van 400 meter en als Achilles 8 keer sneller loopt?

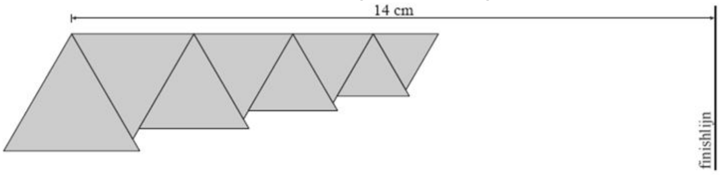
2. Geef het exacte tijdstip tussen twee en drie uur waarop de grote wijzer de kleine wijzer inhaalt



3. Bereken de lengte van de spiraal ABCDEF... als dit patroon zich blijft herhalen:



4. We maken een figuur die uit oneindig veel gelijkzijdige driehoeken bestaat. We beginnen met een gelijkzijdige driehoek met zijde 3. Rechtsboven plakken we er een gelijkzijdige driehoek aan met zijde 2,7 cm, dan eentje met zijde2,43 Enz. Na elke keer plakken komt de figuur dichter bij de finishlijn. We plakken oneindig vaak. Onderzoek m.b.v. een berekening of deze figuur op den duur de finishlijn overschrijdt.



5. Schrijf 0,26262626... als een breuk

6. Schrijf 1,1333333... als een breuk

4 taken

1. Limiet van een rij