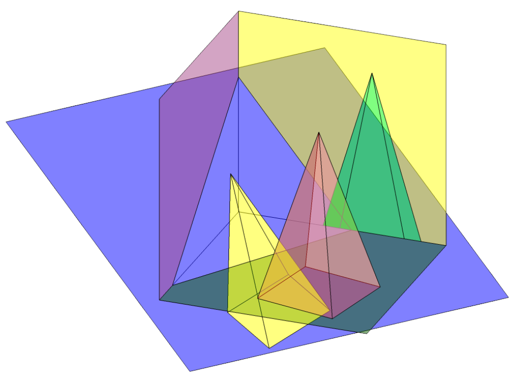
# Kapitola 1

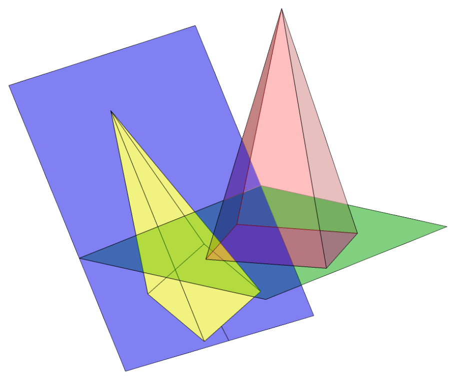
# Kolmá axonometrie

## 1.1 Základní pojmy

**Definice:** *Kolmé promítání na jednu hlavní axonometrickou průmětnu* $\Omega$ *a tři pomocné vzájemně kolmé průmětny (*$\pi(xy)$ *půdorysna,* $\nu(xz)$ *nárysna,* $\mu(yz)$ *bokorysna) nazýváme kolmá axonometrie.*



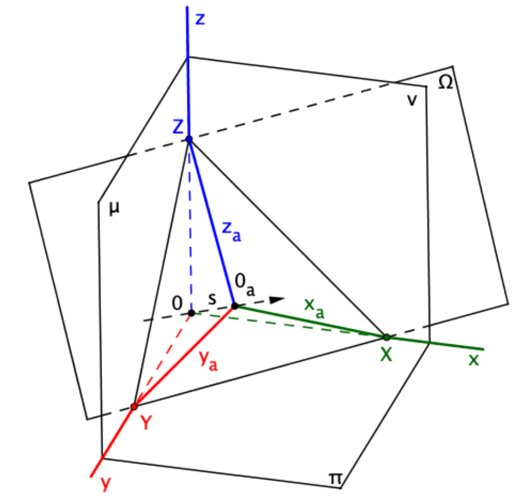
axonometrie - kolmé promítání na tři vzájemně kolmé pomocné průmětny a čtvrtou k nim kosou axonometrickou průmětnu



redukovaná axonometrie - kolmé promítání na dvě kosé průmětny (axonometrická a půdorysna)

jelikož máme tři pomocné roviny, tak jejich průsečnice s axonometrickou průmětnou vytváří tzv. axonometrický trojúhelník $XYZ$

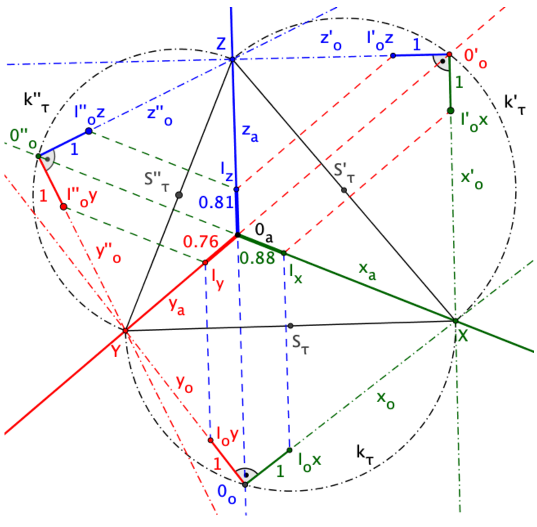
### 1.1.1 Axonometrický trojúhelník a osový kříž



$\Omega$ - axonometrická průmětna
$\pi(xy)$ - půdorysna, $\nu(xz)$ - nárysna, $\mu(yz)$ - bokorysna,
$x, y, z$ - souřadné osy
$\pi \cap \nu = x; \pi \cap \mu = y; \nu \cap \mu = z$
$x \cap y \cap z = O$ - počátek soustavy souřadné
$x_a, y_a, z_a$ - kolmé průměty souřadných os do $\Omega$
$x_a \cap y_a \cap z_a = O_a$ - počátek soustavy souřadné promítnutý do $\Omega$
$\triangle XYZ$ - axonometrický trojúhelník
$\Omega \nparallel \pi \Rightarrow \Omega \cap \pi = XY$
$\Omega \nparallel \nu \Rightarrow \Omega \cap \nu = XZ$
$\Omega \nparallel \mu \Rightarrow \Omega \cap \mu = YZ$
$X \in x_a \perp YZ, Y \in y_a \perp XZ,$
$Z \in z_a \perp XY$

### 1.1.2 Otáčení pomocných průměten

souřadné osy **neleží** v axonometrické průmětně $\Omega$, pouze je do ní promítáme a tudíž dojde ke zkreslení **jednotek** na všech osách, pro práci se souřadnicemi musíme nejdříve otočením pomocných průměten do axionometrické najít otočené průměty os



půdorysnu otáčíme do axonometrické průmětny kolem $XY$:

$$x \perp y \wedge \begin{matrix} X \in x \\ Y \in y \end{matrix} \Longrightarrow x_o \perp y_o \wedge \begin{matrix} X \in x_o \\ Y \in y_o \end{matrix}$$

$$0 \in z \perp \pi \Rightarrow 0_o \in z_a$$

otočený počátek $0_o$ leží v průsečíku Thaletovy kružnice $k^\tau(XY)$ nad průměrem $XY$ a osy $z_a$

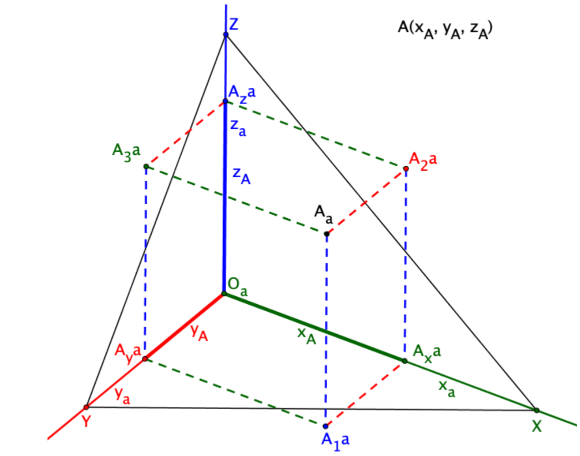
stejně otáčíme i zbývající průmětny - každá souřadná osa leží ve dvou pomocných průmětnách, ale nám stačí najít jenom jeden její otočený obraz v otočení libovolné průmětny

axonometrický trojúhelník $XYZ$ je vždy ostroúhlý, pokud je
- rovnoramenný, pak určuje tzv. dimetrii (na 2 osách jsou stejně zkreslené jednotky)
- rovnostranný, tak hovoříme o izometrii (na všech osách stejně zkreslená jednotka - pokud neřešíme metrickou úlohu[1] nebo nepracujeme s průmětem kružnice, můžeme použít jednotku bez zkreslení 1cm (obrázek kreslíme mírně zvětšený asi 1,25:1)
- axonometrický trojúhelník se zadává velikostmi stran $\triangle(XY, YZ, XZ)$

[1]hledání rozměrů objektů

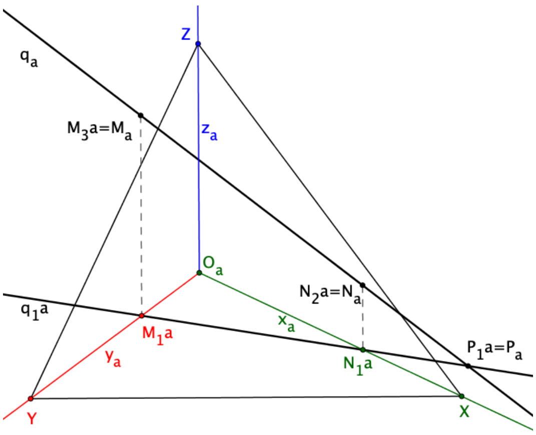
### 1.1.3 Zobrazení bodu

bod $A$ je jednoznačně určen dvojicí průmětů $A_a$ a $A_1$ (případně $A_2$ $A_3$) jejichž spojnice leží na ordinálách (směry rovnoběžné s osami kolmými k příslušným průmětnám $z_a \perp \pi$, $y_a \perp \nu$, $x_a \perp \mu$)




$A_xa$ - x-ová souřadnice
$A_ya$ - y-ová souřadnice
$A_za$ - z-ová souřadnice
$A_1a$ - axo. půdorys
$A_2a$ - axo. nárys
$A_3a$ - axo. bokorys
$A_a$ - axo. průmět bodu $A$ platí:
$A_aA_3a \parallel A_1aA_ya \parallel A_2aA_za \parallel x_a$
$A_aA_2a \parallel A_1aA_xa \parallel A_3aA_za \parallel y_a$
$A_aA_1a \parallel A_2aA_xa \parallel A_3aA_ya \parallel z_a$
$x_A, y_A, z_A$ - nanášíme **zkreslené**

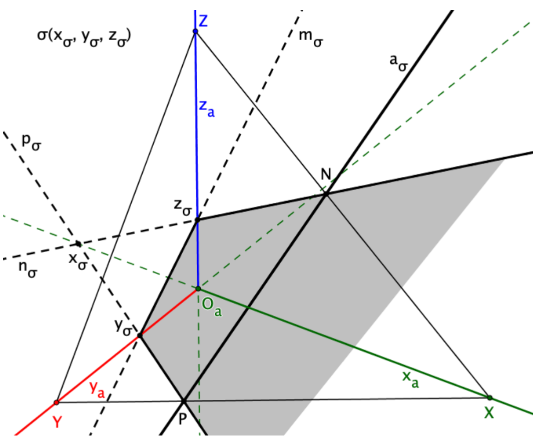
### 1.1.4 Zobrazení přímky




přímka je jednoznačně určena svým axonometrickým a např. prvním průmětem

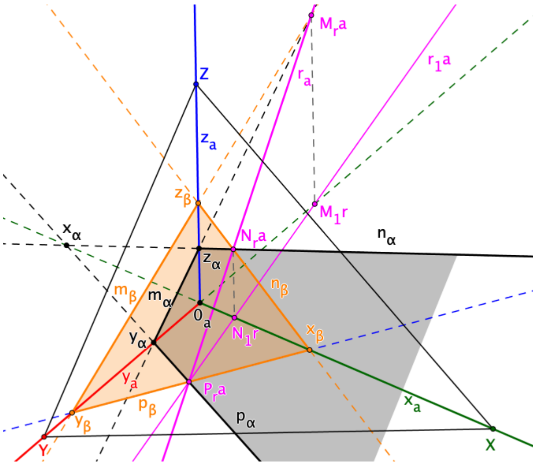
půdorysný stopník:
$q_a \cap q_1a = P_1a \equiv P_a$
nárysný stopník:
$x_a \cap q_1a = N_1a \xrightarrow{z_a} N_2a \equiv N_a \in q_a$
bokorysný stopník:
$y_a \cap q_1a = M_1a \xrightarrow{z_a} M_3a \equiv M_a \in q_a$

### 1.1.5 Zobrazení roviny




$p_\sigma$ - půdorysná stopa
$n_\sigma$ - nárysná stopa
$m_\sigma$ - bokorysná stopa
$a_\sigma$ - axonometrická stopa

### 1.1.6 Průsečnice dvou rovin

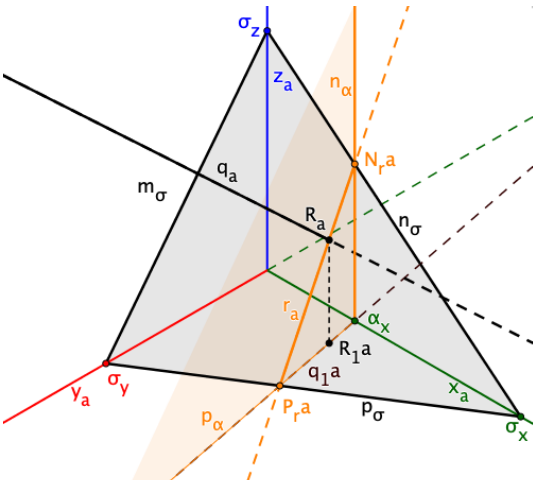



hledáme průsečíky příslušných stop, existují 3 průsečíky/stopníky, k určení průsečnice nám stačí ale libovolné dva

$p_\alpha \cap p_\beta = P_r a$ - půdorysný stopník
$n_\alpha \cap n_\beta = N_r a$ - nárysný stopník
$m_\alpha \cap m_\beta = M_r a$ - bokorysný stopník

$r_a = P_r a N_r a M_r a$ - axo. průmět
$r_1 a = P_1 r N_1 r M_1 r$ - půdorysný průmět

### 1.1.7 Průsečík přímky a roviny



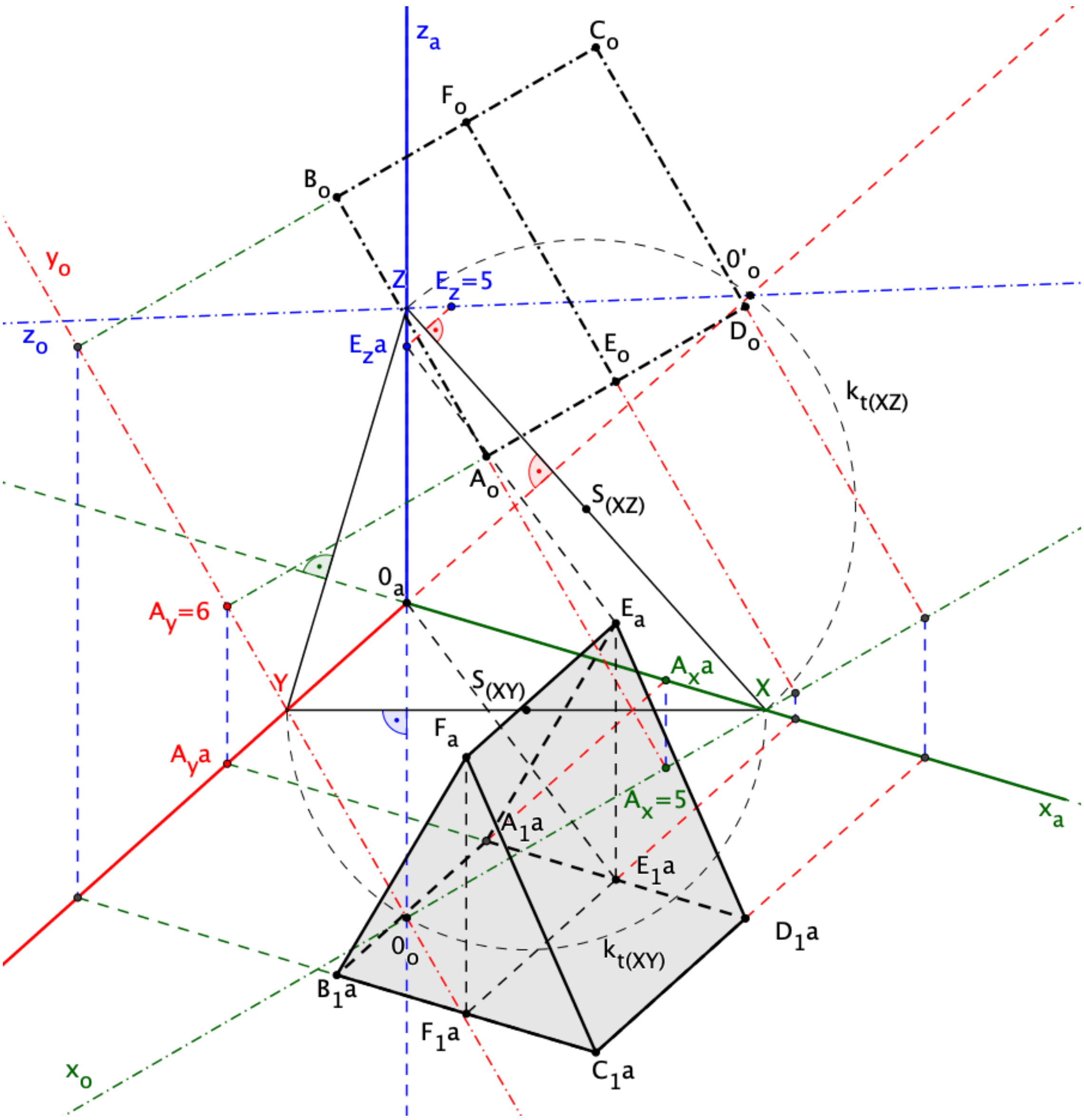

přímkou $q$ proložíme pomocnou rovinu $\alpha$ kolmou např. k $\pi$:
$p_\alpha \equiv q_1 a; \quad p_\alpha \cap x_a = \alpha_x$
$\alpha_x \in n_\alpha \parallel z_a$

najdeme průsečnici $r$ rovin $\sigma$ a $\alpha$:
$p_\sigma \cap p_\alpha = P_r \equiv P_1 a$
$n_\sigma \cap n_\alpha = N_r \xrightarrow{z_a} N_1 a \in q_1 a$
$r_a = P_r a N_r a, r_1 a \equiv q_1 a$

přímky $q$ a $r$ jsou různoběžné, jejich průsečík je hledaný průsečík přímky $q$ a roviny $\sigma$:
$q_a \cap r_a = R_a \xrightarrow{z_a} R_1 a \in q_1 a$

## 1.2 Konstrukce tělesa

### 1.2.1 Odvozením souřadnic




Pro zjednodušení tělesa stavíme na půdorysnu. Nejprve otočíme půdorysnu $\pi(xy)$ a nárysnu $\nu(xz)$ do axonometrické průmětny $\Omega(XYZ)$, nejen abychom odvodili zkreslení jednotek na souřadných osách, ale i podstava hranolu leží v půdorysně, můžeme ji tedy v otočení $\pi_o(x_o y_o) \in \Omega$ rovnou sestrojit jako čtverec ve skutečné velikosti. Pro návrat do prvních průmětů můžeme využít buď afinitu $\mathcal{A}$ nebo odvození souřednic. Vrcholy $E, F$ doplníme pomocí souřadnic.

1. otočení půdorysny $\pi(xy)$ do axonometrické průmětny $\Omega$:
   $S_{(XY)}$ - střed úsečky $XY$, $k_\tau(XY)$ - Thaletova kružnice nad průměrem $XY$ se středem $S_{(XY)}$
   $k_\tau(XY) \cap z_a = 0_o$ - pro odvození souřadnic vybíráme obvykle bod ležící mimo $\triangle XYZ$
   $$\begin{matrix} x_o = 0_o X \\ y_o = 0_o Y \end{matrix} \quad \wedge \quad x_o \perp y_o!$$

2. stejně otočíme nárysnu $\nu(xz)$ do axonometrické průmětny $\Omega$

3. protože čtvercová podstava $ABCD$ leží v půdorysně, můžeme rovnou sestrojit její otočený obraz $A_oB_oC_oD_o$:

a) naneseme skutečné souřadnice bodu $A$ na příslušné otočené osy a sestrojíme $A_o$ (protože jsou $x_o \perp y_o$ pracujeme s klasickou kartézkou soustavou souřadnou)

b) sestrojíme čtverec $A_oB_oC_oD_o$ ve skutečné velikosti a tvaru

c) bod $A_1a$ odvozením souřadnic:

$$\begin{array}{lcl} A_x \xrightarrow{z_a} A_xa \in x_a & \Longrightarrow & A_1aA_xa \parallel y_a \\ A_y \xrightarrow{z_a} A_ya \in y_a & & A_1aA_ya \parallel x_a \end{array}$$

d) z otočení můžeme zbývající body vrátit buď pomocí afinity $\mathcal{A}(XY,\ A_o \longrightarrow A_1a)$ nebo opět odvozením jejich souřadnic (na obrázku je použito odvození souřadnic)

4. zkreslení $z-$kóty bodu $E$:
$z_o$ jsme našli v otočení nárysny $\nu(xz)$ do axo. průmětny $\Omega$ s osou otáčení $XZ$ musí tedy platit:

$$\begin{array}{rcl} E_z \xrightarrow{y_a} E_za \in z_a & \wedge & E_zE_za \perp XZ \\ |E_za0_a| = |E_aE_1a| & \wedge & E_za0_a \parallel E_aE_1a \end{array}$$

5. bod $F_a$ odvodíme pomocí rovnoběžnosti

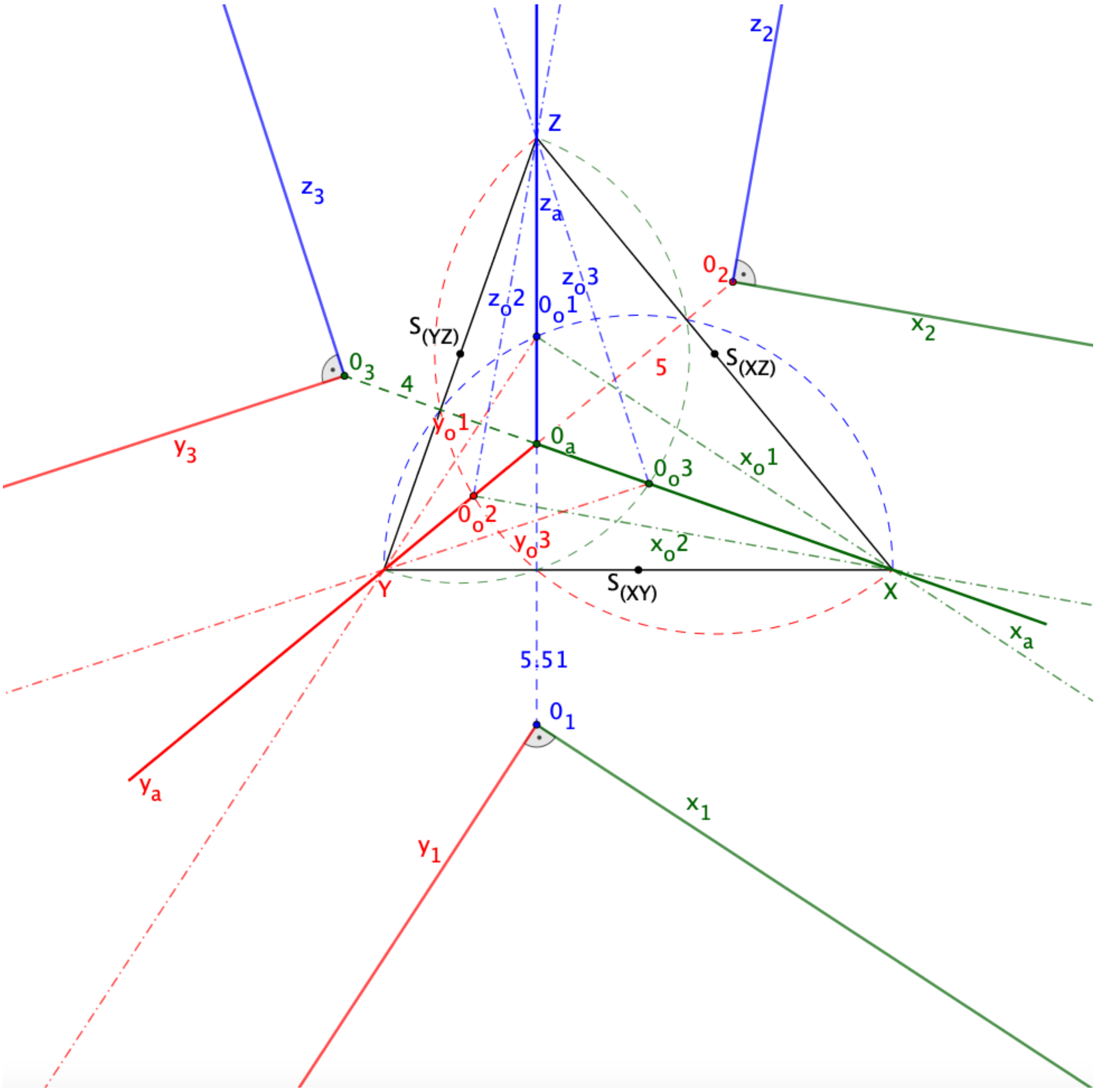
6. pokud není uvedeno jinak, v kolmé axonometrii při stanovování viditelnosti vždy vycházíme z „nadhledu“:

a) rovnou můžeme vytáhnout obrys tělesa $B_1aC_1aD_1aE_aF_a$

b) hrana $E_aF_a$ je ve výšce $E_z > 0$ a proto $\triangle B_1aC_1aF_a$ zastiňuje vrchol podstavy $A_1a(A_z = 0)$

### 1.2.2 Zářezová metoda

jedná se o relativně snadný způsob, jak z konstrukčně jednoduchých půdorysných a nárysných (bokorysných) průmětů z Mongeovy projekce sestrojit jeden názorný „prostorový“ průmět tělesa




1. otočení půdorysny $\pi(xy)$ do axonometrické průmětny $\Omega$:

a) $S_{(XY)}$ - střed úsečky $XY$, $k_\tau(XY)$ - Thaletova kružnice nad průměrem $XY$ se středem $S_{(XY)}$
$k_\tau(XY) \cap z_a = 0_o1$ - vybíráme bod ležící uvnitř $\triangle XYZ$

$$\begin{matrix} x_o1 = 0_o1X \\ y_o1 = 0_o1Y \end{matrix} \quad \wedge \quad x_o1 \perp y_o1!$$

b) otočené osy $x_o1, y_o1$ **vysuneme** ve směru osy $z_a$:
- na $z_a$ zvolíme libovolný bod $0_1$ ve vhodné[2] vzdálenosti od $0_a$, kterým vedeme rovnoběžky $x_1, y_1$ s otočenými osami $x_o1, y_o1$

[2]vysunuté průměty nesmí překrývat axonometrický průmět

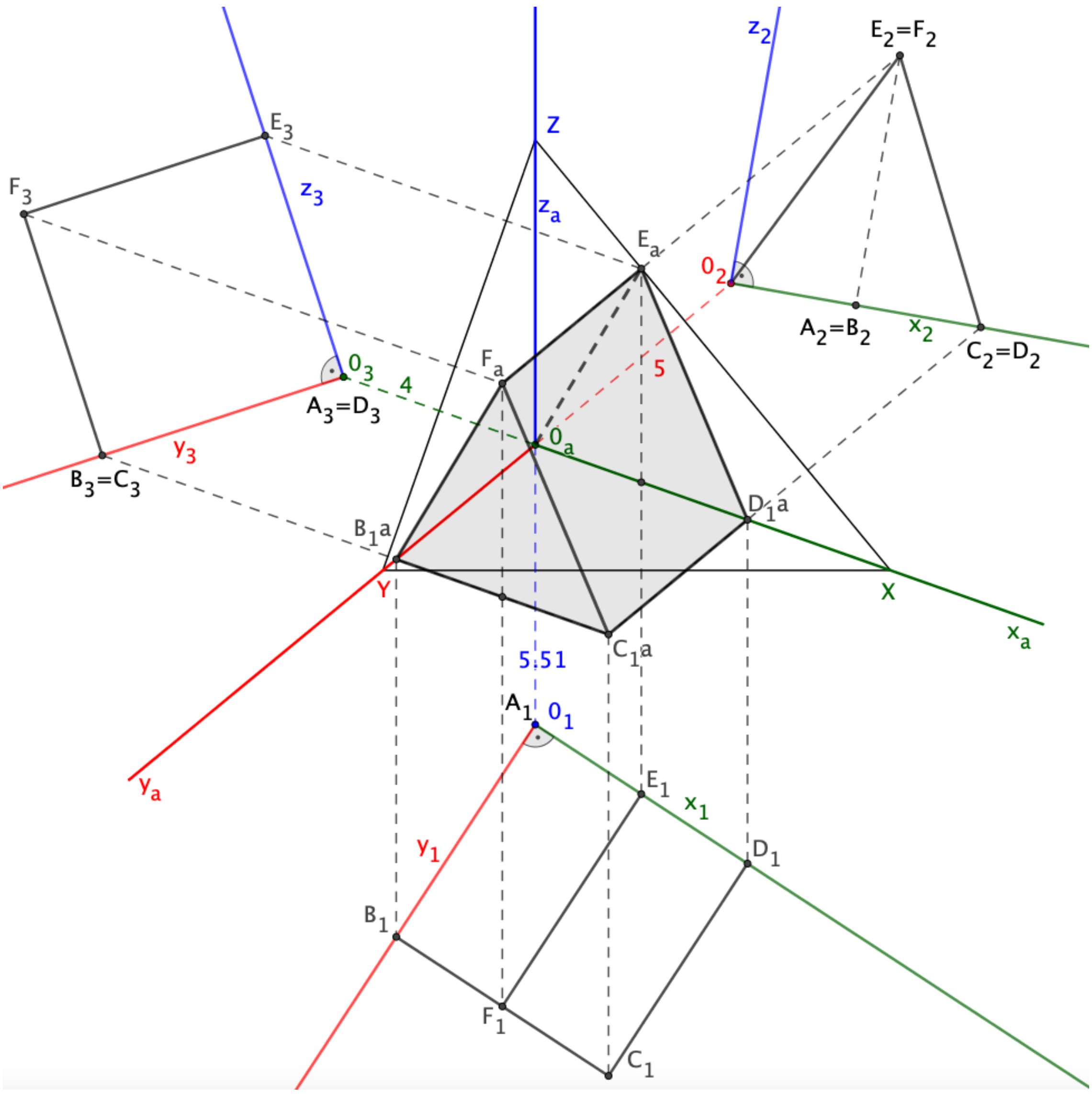
2. otočení nárysny $\nu(xy)$ do axonometrické průmětny $\Omega$:

a) $S_{(XZ)}$ - střed úsečky $XZ$, $k_\tau(XZ)$ - Thaletova kružnice nad průměrem $XZ$ se středem $S_{(XZ)}$
$k_\tau(XZ) \cap z_a = 0_o2$ - vybíráme bod ležící uvnitř $\triangle XYZ$

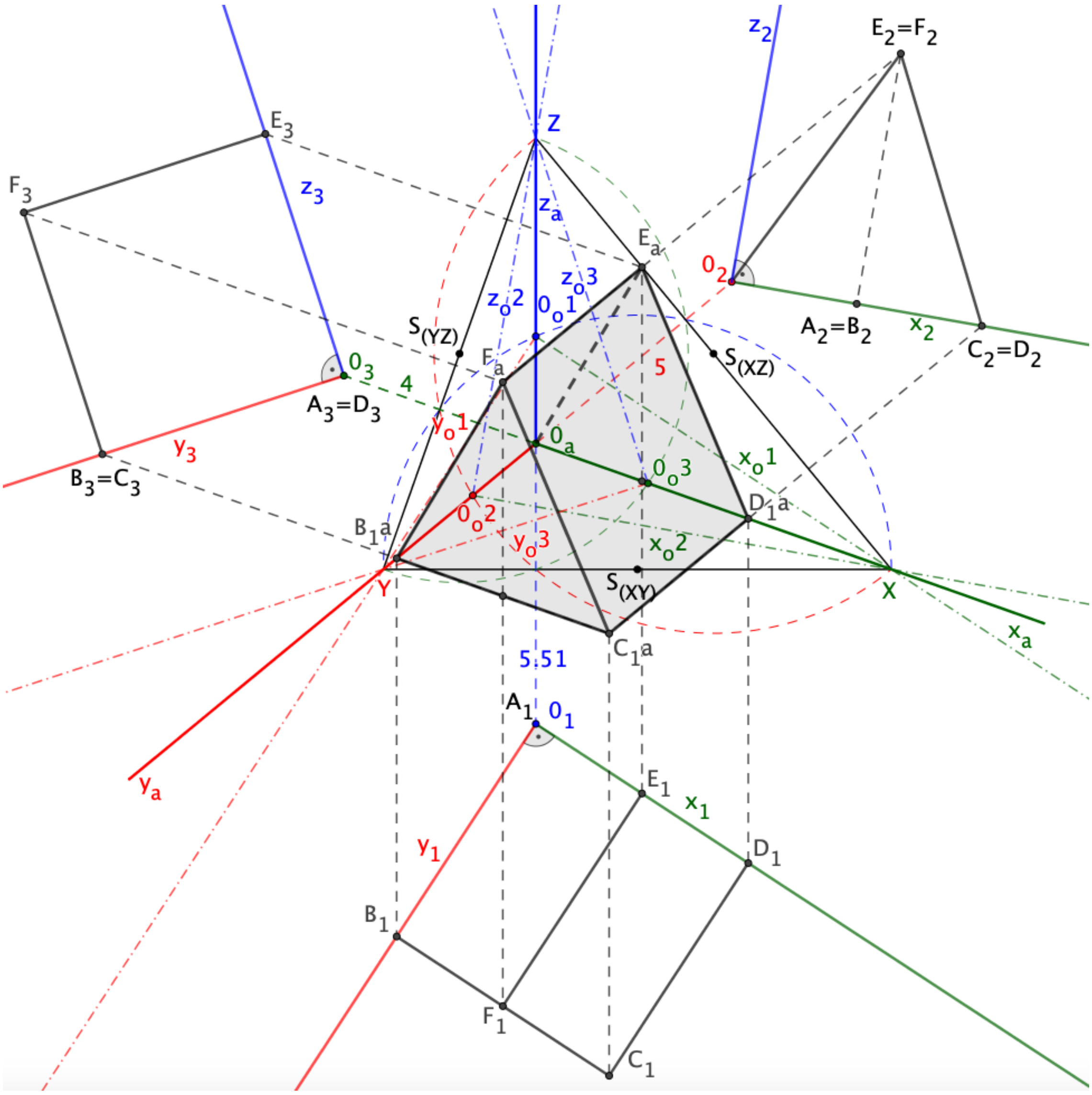
$$\begin{array}{l} x_o2 = 0_o2X \\ z_o2 = 0_o2Z \end{array} \quad \wedge \quad x_o2 \perp z_o2!$$

b) otočené osy $x_o2, z_o2$ **vysuneme** ve směru osy $y_a$:
- na $y_a$ zvolíme libovolný bod $0_2$ ve vhodné vzdálenosti od $0_a$, kterým vedeme rovnoběžky $x_2, z_2$ s otočenými osami $x_o2, z_o2$

3. otočení bokorysny $\mu(yz)$ do axonometrické průmětny $\Omega$:
sestrojujeme pouze pro složitá tělesa, kdy nám nestačí půdorysný a nárysný průmět, ale obecně nám ke konstrukci axonometrického průmětu zářezovou metodou stačí libovolná dvojice pomocných průmětů




do vysunutých souřadných soustav vykreslíme příslušné průměty a jednotlivé body odvodíme pomocí paprsků rovnoběžných se směry vysunutí


$z_2$
$E_2=F_2$
$E_3$
$F_3$
$z_3$
Z
$z_a$
$E_a$
$0_2$
$z_o3$
$z_o2$
$0_o1$
$A_2=B_2$
$x_2$
$C_2=D_2$
$S_{(YZ)}$
$F_a$
$S_{(XZ)}$
$0_3$
4
5
$A_3=D_3$
$y_o1$
$0_a$
$y_3$
$0_o3$
$x_o1$
$B_3=C_3$
$0_o2$
$D_1a$
$B_1a$
$y_o3$
$x_o2$
Y
$S_{(XY)}$
X
$x_a$
$C_1a$
5.51
$A_1$
$0_1$
$y_a$
$E_1$
$x_1$
$y_1$
$D_1$
$B_1$
$F_1$
$C_1$