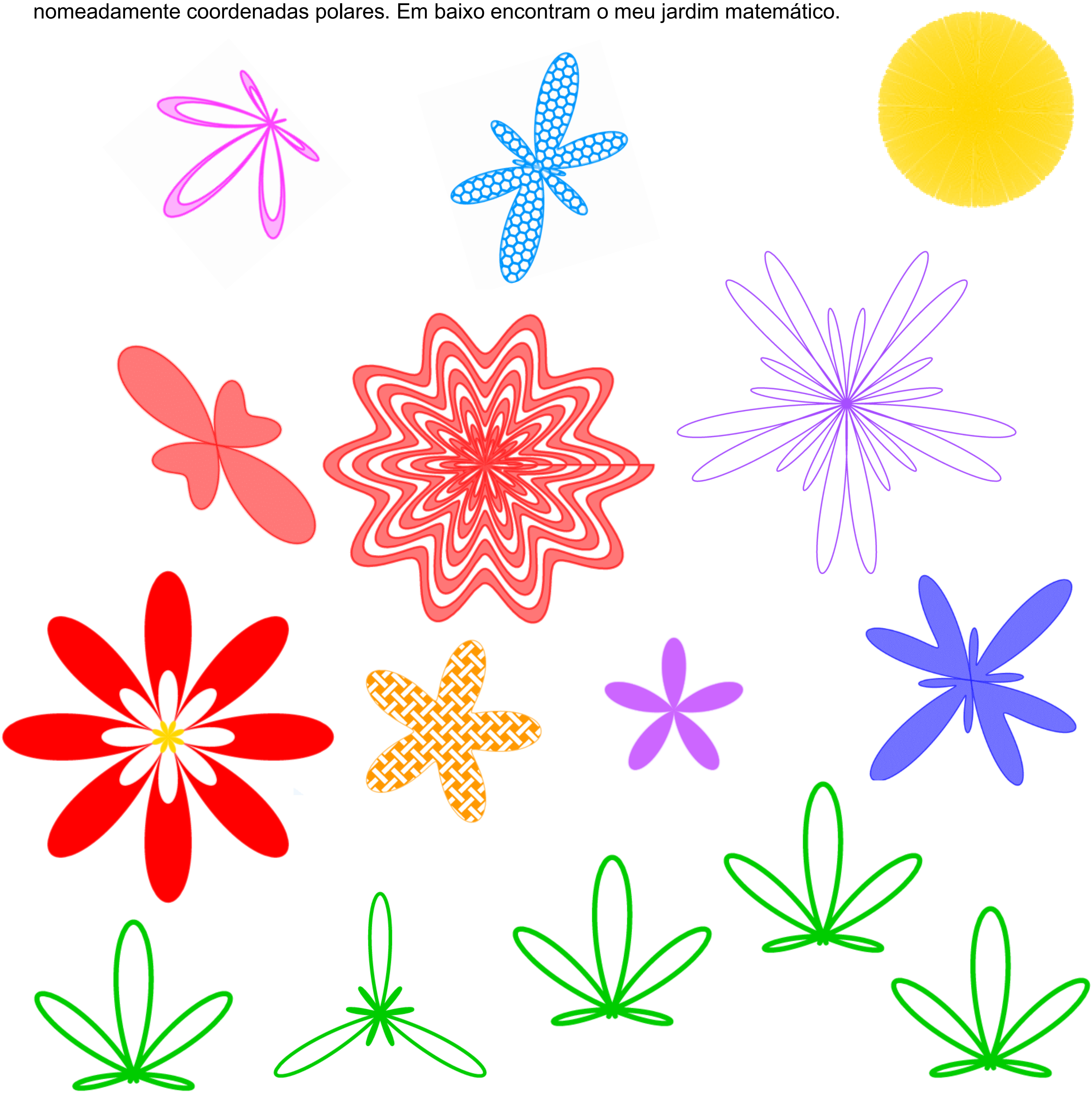
Matemática B

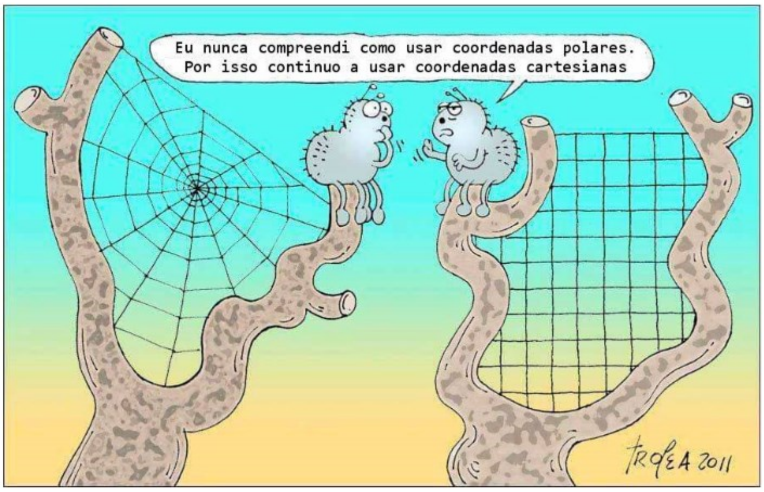
11.º ano de escolaridade

Trabalho a pares – Jardim Matemático

Existem inúmeras maneiras de criar arte: Pintura; escultura; graffiti; etc. Com esta atividade o vosso desafio é criar arte com a matemática. Pretendo que cada par de alunos construa um **jardim matemático** em que as flores e as criaturas que o habitam são criados utilizando expressões matemáticas, nomeadamente coordenadas polares. Em baixo encontram o meu jardim matemático.



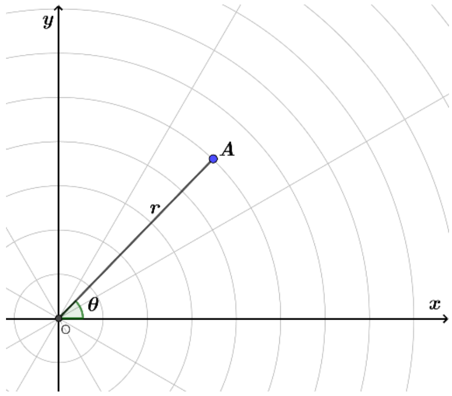
Antes de começarem o vosso trabalho vamos estudar um pouco as coordenadas polares.



Coordenadas Polares

Existem diversos sistemas de localização de pontos no plano. O mais usual é o sistema de coordenadas cartesianas, onde os pontos são marcados através da sua abcissa e da sua ordenada. Este sistema é muitas vezes designado por sistema de coordenadas retangulares, dada a forma como os pontos são nele localizados.

Um outro sistema de localização é o **sistema de coordenadas polares.** Neste sistema, os pontos são localizados através de dois parâmetros: a **distância** do ponto à origem do sistema de eixos e a amplitude do **ângulo (positivamente orientado)** formado entre o semieixo positivo das abcissas e o segmento de reta que une o ponto à origem do referencial.
Assim, as coordenadas polares de um ponto A são $(r\,,\theta)$, onde r representa a distância do ponto à origem do referencial e θ o ângulo a ele associado.

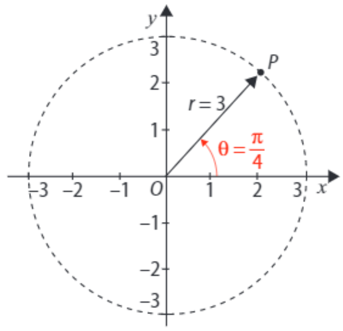


Existe uma ligação entre as coordenadas de um ponto escritas na forma polar e na forma cartesiana.
Já tínhamos visto que podíamos exprimir as coordenadas cartesianas de A recorrendo às razões trigonométricas:

$$A(r\cos\theta\ ,r\sin\theta)$$

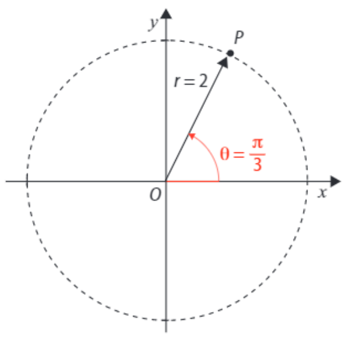
Exemplos

1. Na figura está representado o ponto P de coordenadas polares $P\left(3\,,\frac{\pi}{4}\right)$ e de coordenadas cartesianas $P\left(3\cos\frac{\pi}{4}\,,3\sin\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\,,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

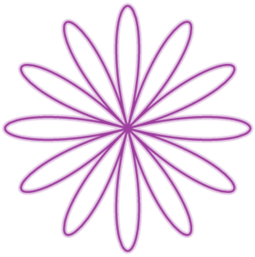


2. Na figura está representado o ponto P de coordenadas polares $P\left(2\,,\frac{\pi}{3}\right)$ e de coordenadas cartesianas

$$P\left(2\cos\frac{\pi}{3}\,,2\sin\frac{\pi}{3}\right)=\left(2\times\frac{1}{2}\,,2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(1\,,\sqrt{3}\right).$$

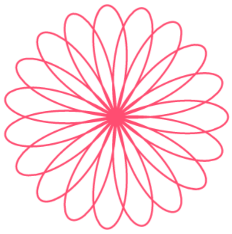


Desenhando com as coordenadas polares



Parte 1 - Investiga

Utilizando as coordenadas polares podemos obter desenhos. Um desses desenhos é uma **flor** cuja expressão é dada por $\boldsymbol{r = a\cos(b\theta)}$



Utilizando o **Geogebra Classic online investigam** a influência dos parâmetros $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ no formato da flor. Começam por dar um valor a $\boldsymbol{a}$ e um valor a $\boldsymbol{b}$ (um número inteiro maior do que 2).

1. Agora mantêm o valor de $\boldsymbol{b}$ e vão alterando o valor de $\boldsymbol{a}$. O que observam?
2. Agora mantêm o valor de $\boldsymbol{a}$ e vão alterando o valor de $\boldsymbol{b}$ (números inteiros maiores do que 2). O que observam?
3. Agora mantêm o valor de $\boldsymbol{a}$ e vão alterando o valor de $\boldsymbol{b}$, mas agora têm que atribuir valores não inteiros. O que observam? A flor está completa? Quando introduzem a expressão no Geogebra, o programa converte para uma expressão do tipo $r = \mathrm{Curva}\big((3\cos(3.8\,\theta)\,;\theta), \theta, 0{,}2\pi\big)$, aumentam o valor de 2π até a flor fechar. Porque são necessárias mais voltas até a flor fechar?

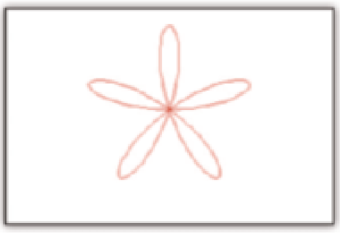
Elabora em Word (ou num processador de texto) um relatório onde consta a vossa primeira flor e a sua expressão e para cada uma das alíneas anteriores:

- As flores que obtiveram e as respetivas expressões;
- As conclusões que tiraram.

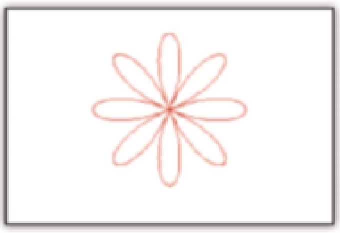
Parte 2 - Cria o teu próprio Jardim Matemático

Trocando as expressões obtemos outros desenhos. Em baixo estão alguns exemplos e as respetivas expressões, *retirados do manual A4 (Ensino profissional) da Porto Editora*:

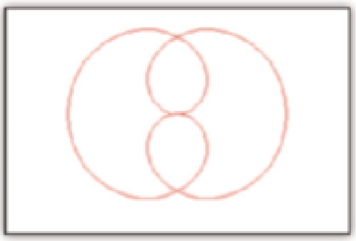
$r = \sin(5\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$



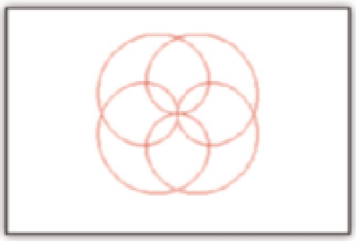
$r = 2\cos(4\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$



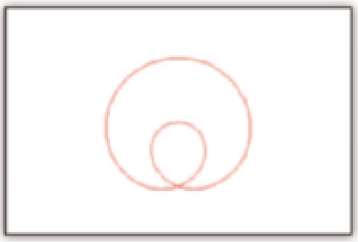
$r = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $\theta \in [0, 4\pi]$



$r = \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)$, $\theta \in [0, 4\pi]$



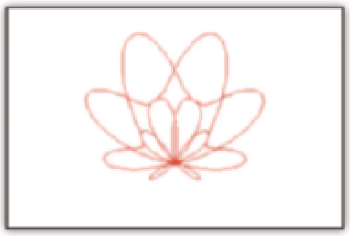
$r = 1 + 3\sin\theta,\ \theta \in [0, 2\pi]$



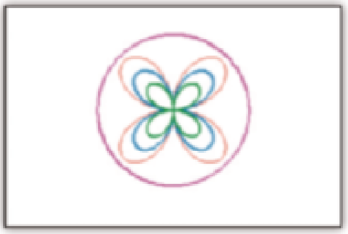
$r = \frac{\theta}{5},\ \theta \in [0, 16\pi]$

$r = \theta \sin\theta,\ \theta \in [0, 14\pi]$

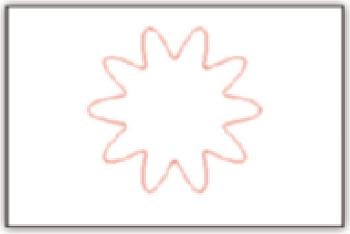
$r = \sin(\theta) + \sin^3\left(\frac{5\theta}{2}\right),\ \theta \in [0, 4\pi]$



$r_1 = 2\sin(2\theta),\ r_2 = 1{,}5\sin(2\theta),$
$r_3 = \sin(2\theta),\ r_4 = 2{,}2,\ \theta \in [0, 2\pi]$



$r = 2 + \frac{1}{2}\cos(10\theta),\ \theta \in [0, 2\pi]$



- Criam agora o vosso próprio jardim brincando com as expressões anteriores, mudando os seus parâmetros.
- O que acontece quando somamos a expressão da espiral com a expressão de uma flor?
- Experimentam somar ou multiplicar várias expressões e inventa as tuas próprias expressões.

Surpreendem-me com um jardim matemático mágico e colorido. Cada vez que obtêm uma flor ou imagem que vos agrada copiam-na e colam-na numa folha de word e vão compondo o vosso jardim. **No relatório têm que incluir as expressões dos desenhos que compõem o vosso jardim.**

Enviem o relatório e o jardim matemático para o meu email: vlopes@aepaa.pt

Nota: Para escolher a cor e a forma de preenchimento clicam com o botão direito do rato sobre a expressão que se encontra do lado esquerdo e escolham configurações.

No menu COR dá para escolher a cor e no menu ESTILO a forma de preenchimento e a grossura da linha.

Critérios de classificação – Peso 1,5

- Correção e clareza dos raciocínios matemáticos no relatório– **60 pontos**
- Criatividade e inovação nos desenhos do jardim – **100 pontos**
- Autonomia/ coloboração no trabalho – **20 pontos**
- Apresentação e organização do trabalho escrito e do jardim – **20 pontos**