GEOMETRÍA ANALITICA

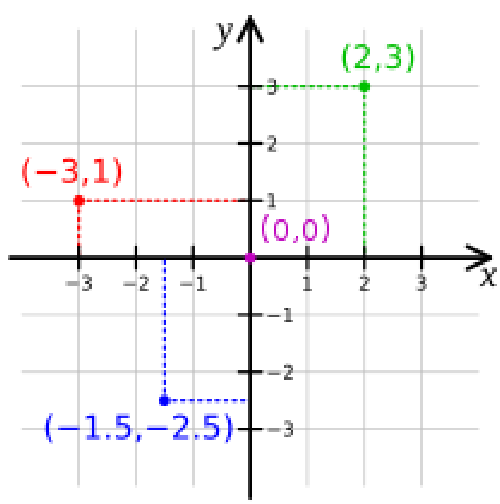
1.1 Sistemas de Coordenadas Rectangulares

Las coordenadas cartesianas o coordenadas rectangulares (plano cartesiano) son un tipo de coordenadas ortogonales usadas en espacios euclídeos, para la representación gráfica de una función, en geometría analítica, o del movimiento o posición en física, caracterizadas porque usa como referencia ejes ortogonales entre sí que se cortan en un punto origen. Las coordenadas cartesianas se definen así como la distancia al origen de las proyecciones ortogonales de un punto dado sobre cada uno de los ejes. La denominación de 'cartesiano' se introdujo en honor de René Descartes, quien lo utilizó de manera formal por primera vez.

Si el sistema en sí es un sistema bidimensional, se denomina plano cartesiano. El punto de corte de las rectas se hace coincidir con el punto cero de las rectas y se conoce como origen del sistema. Al eje horizontal o de las abscisas se le asigna los números enteros de las equis ("x"); y al eje vertical o de las ordenadas se le asignan los números enteros de las yes ("y"). Al cortarse las dos rectas, dividen al plano en cuatro regiones o zonas, que se conocen con el nombre de cuadrantes:

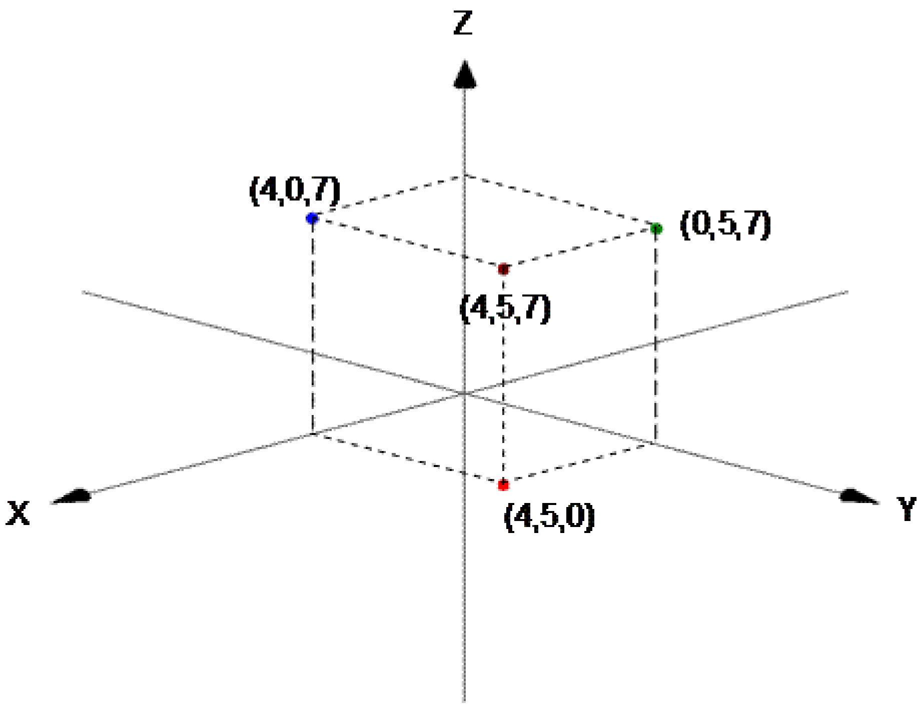
- Primer cuadrante "I": Región superior derecha
- Segundo cuadrante "II": Región superior izquierda
- Tercer cuadrante "III": Región inferior izquierda
- Cuarto cuadrante "IV": Región inferior derecha

El plano cartesiano se utiliza para asignarle una ubicación a cualquier punto en el plano. En la gráfica se indica el punto +2 en las abscisas y +3 en las ordenadas. El conjunto (2, 3) se denomina "par ordenado" y del mismo modo se pueden ubicar otros puntos.



Las coordenadas cartesianas se usaron un ejemplo para definir un sistema cartesiano o sistema de referencia respecto ya sea a un solo eje (línea recta), respecto a dos ejes (un plano) o respecto a tres ejes (en el espacio), perpendiculares entre sí (plano y espacio), que se cortan en un punto llamado origen de coordenadas. En el plano, las coordenadas cartesianas se denominan abscisa y ordenada. La abscisa es la coordenada horizontal y se representa habitualmente por la letra x, mientras que la ordenada es la coordenada vertical y se representa por la y.

Si tenemos un sistema de referencia formado por tres rectas perpendiculares entre sí (X, Y, Z) (terna ordenada), que se cortan en el origen (0, 0, 0), cada punto del espacio puede nombrarse mediante tres números: (x, y, z), denominados coordenadas del punto, que son las distancias ortogonales a los tres planos principales: los que contienen las parejas de ejes YZ, XZ e YX, respectivamente.



1.2 Distancia entre Dos Puntos

Por haberlo estudiado, sabemos que el **Plano Cartesiano** se usa como un sistema de referencia para localizar puntos en un plano. Otra de las utilidades de dominar los conceptos sobre el Plano cartesiano radica en que, a partir de la ubicación de las coordenadas de dos puntos es posible calcular la distancia entre ellos. Cuando los puntos se encuentran ubicados sobre el eje **x** (de las abscisas) o en una recta paralela a este eje, la distancia entre los puntos corresponde al valor absoluto de la diferencia de sus abscisas $(x_2 - x_1)$.

Ejemplo:

La distancia entre los puntos (–4, 0) y (5, 0) es 5 – (–4) = 5 +4 = 9 unidades. Cuando los puntos se encuentran ubicados sobre el eje **y** (de las ordenadas) o en una recta paralela a este eje, la distancia entre los puntos corresponde al valor absoluto de la diferencia de sus ordenadas. Ahora, si los puntos se encuentran en cualquier lugar del sistema de coordenadas, la distancia queda determinada por la relación:

$$\mathbf{d} = \sqrt{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 + (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1)^2} \quad (1)$$

Para demostrar esta relación se deben ubicar los puntos $\mathbf{P_1(x_1, y_1)}$ y $\mathbf{P_2(x_2, y_2)}$ en el sistema de coordenadas, luego formar un triángulo rectángulo de hipotenusa $\mathbf{P_1P_2}$ y emplear el Teorema de Pitágoras.

Ejemplo:

Calcula la distancia entre los puntos $\mathbf{P_1(7, 5)}$ y $\mathbf{P_2(4, 1)}$

$$\mathbf{d} = \sqrt{(4 - 7)^2 + (1 - 5)^2}$$

$$\mathbf{d} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

$$\mathbf{d} = \sqrt{9 + 16}$$

$$\mathbf{d} = \sqrt{25}$$

$$\mathbf{d} = 5 \textbf{ unidades}$$

Demostración

Sean $\mathbf{P_1\ (x_1, y_1)}$ y $\mathbf{P_2\ (x_2, y_2)}$ dos puntos en el plano.

La distancia entre los puntos $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$ denotada por $\mathbf{d} = |\mathbf{P_1P_2}|$ esta dada por:

$$\mathbf{d} = |\mathbf{P_1P_2}| = \sqrt{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 + (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1)^2} \quad (1)$$

En la **Figura 1** hemos localizado los puntos $\mathbf{P_1\ (x_1, y_1)}$ y $\mathbf{P_2\ (x_2, y_2)}$ así como también el segmento de recta $\overline{\mathbf{P_1P_2}}$

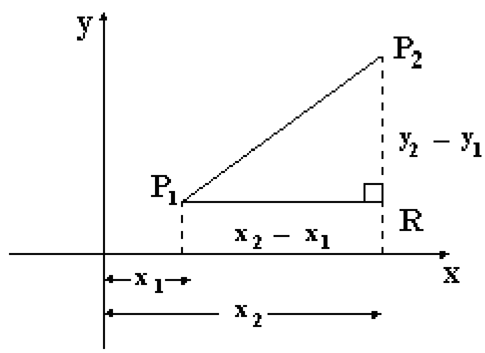


Figura 1. Aplicación del Teorema de Pitágoras en la Distancia entre dos Puntos.

Al trazar por el punto **P_1** una paralela al eje **x** (abscisas) y por **P_2** una paralela al eje **y** (ordenadas), éstas se interceptan en el punto **R**, determinado el triángulo rectángulo **P_1RP_2** y en el cual podemos aplicar el Teorema de Pitágoras:

$$\overset{c^2}{\left(\overline{P_1P_2}\right)^2} = \overset{a^2}{\left(\overline{P_1R}\right)^2} + \overset{b^2}{\left(\overline{RP_2}\right)^2}$$

$$\left(\overline{P_1P_2}\right)^2 = \left|P_1P_2\right|^2$$

Pero: $\overline{P_1R} = x_2 - x_1$; y $\overline{RP_2} = y_2 - y_1$

Luego, $\left|P_1P_2\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$\mathbf{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

En la fórmula (1) se observa que la distancia entre dos puntos es siempre un valor positivo.

El orden en el cual se restan las coordenadas de los puntos **P_1** y **P_2** no afecta el valor de la distancia.

En el caso del espacio, tomando las coordenadas del punto **A** serán:

$$A = (x_A,\ y_A,\ z_A)$$

y el **B**:

$$B = (x_B,\ y_B,\ z_B)$$

La distancia entre los puntos **A** y **B** será:

$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Ejercicios: Para Resolver

a) Grafique los siguientes puntos:

1. (2,3), (4,5), (0,2), (-1,-3)
2. (1,4), (-3,0), (-4,2), (-1,-1)
3. (-1/2,-2), (0,0), (-1,4/3), (3,3)
4. (0,0.8), (-2,0), (1.2,-1.2), (-2,2)

b) Determine el cuadrante en el que está el punto si (a,b) está en el cuadrante I.

1. (-5,6)
2. (5,-7)
3. (-11,-4)
4. (4,3)
5. (-2,1)
6. (-3,-1)
7. (3,3)
8. (6,-7)

c) Calcula la distancia entre los puntos

1. $P_1(6,1)$ y $P_2(3, 2)$

2. $P_1(-2, 6)$ y $P_2(-3, 1)$

3. $P_1(-3, 7)$ y $P_2(-2, 9)$

4. $P_1(2, 5)$ y $P_2(8, 4)$