$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

De la invención de los logaritmos a la identidad de Euler

1614-1745

Autor: Pedro Roses Amat
Recursos Geogebra con la colaboración de Bernat Ancochea Millet
Consultar Libro y recursos Geogebra en https://ggbm.at/MHpePMvP

INDICE GENERAL

1 Introducción

Este libro es un recorrido por las matemáticas del siglo XVII siguiendo la pista de las contribuciones que permitieron a **Euler** en 1745 formular la identidad $e^{i\pi}$= -1**.** La identidad de Euler, además de ser increíblemente simple, pone en evidencia la unidad de las matemáticas relacionando campos que se creían en la época totalmente independientes. Los logaritmos y el cálculo infinitesimal que nos llevan al número $\boldsymbol{e}$, la geometría que nos aporta el número $\boldsymbol{\pi}$ y el primer número imaginario $\boldsymbol{i}$, que, en esa época, empieza a utilizarse para resolver ecuaciones en las que aparecen raíces cuadradas de números negativos.

Nuestro relato no pretende describir todos los avances de la época sino que se centra en las contribuciones que llevan a esta identidad sin ánimo de ser históricamente exhaustivos y nos sirve para sobrevolar este periodo y observar como se ponen, en este siglo, las bases de las matemáticas modernas. Vamos a intentar esta aproximación siendo fieles a la manera de hacer propia de la época, muy despreocupada del rigor con el que hoy se explican y enseñan las matemáticas, pero con grandes dosis de intuición e imaginación, asociadas a una capacidad de cálculo asombrosa si tenemos en cuenta los medios de los que disponían.

Para ponernos a la altura de estos genios, vamos a ayudarnos de las ilustraciones de Geogebra, geometría y álgebra, que nos dan la oportunidad de visualizar las funciones y las construcciones geométricas de manera que los conceptos abstractos tengan su correspondencia visual. Intentamos una presentación intuitiva de los problemas y hacerlos comprensibles para lectores con conocimientos matemáticos básicos utilizando palabras de uso natural, sin entrar en el lenguaje matemático preciso de los libros de texto.

1.1 Presentación de la época

Los matemáticos del siglo XVII son muy conocidos. Por orden cronológico **Descartes** es el primero de ellos. Contemporáneo suyo es **Fermat** pero la figura cumbre de esta época fue sin duda **Newton** con sus aportaciones a la física y a la matemática que han sido la base sobre la que se ha construido la ciencia hasta el siglo XX.

La revolución mas profunda del siglo es el progresivo intercambio de papeles entre la geometría y el álgebra que se inicia como consecuencia de las contribuciones de Descartes pero que no puede atribuirse solo a el, sino a toda esta generación de matemáticos para los que el álgebra y el cálculo infinitesimal recién descubierto se convierten en el enfoque mas efectivo de los problemas.

El álgebra se sustentaba, al inicio de siglo, en demostraciones geométricas, de manera que la validez de cualquier premisa resultaba subordinada a su confirmación por la geometría. Progresivamente los matemáticos abandonan la supeditación a la demostración geométrica y se atribuyen mas libertad para la demostración de sus propuestas. Recordemos que la geometría era, desde Euclides, un ejemplo del método científico construido sobre axiomas, postulados y demostraciones.

Como consecuencia de esta inversión de los roles, la construcción axiomática rigurosa de los nuevos avances se abandona, dando paso a la inducción a partir de casos particulares e ideas intuitivas, a evidencias geométricas y a razonamientos físicos. Muchas definiciones de la época son descritas en términos físicos y sin duda para Newton los requerimientos de la física fueron la inspiración de sus ideas fundamentales. Podemos decir, exagerando, que las matemáticas dejaron de ser una ciencia y se convirtieron en una vertiginosa sucesión de ideas geniales que se confirmaban porque eran útiles.

De hecho, las matemáticas de este siglo nos llegan en los libros de texto con la formulación rigurosa de conceptos que se fueron consolidando un siglo después por **Gauss** y **Cauchy.**

1.2 ¿Quién es Euler? (1707 y 1783)

El siglo XVIII es el siglo de la ilustración y de la enciclopedia de **Voltaire**, que acabara trágicamente con el cataclismo de la revolución Francesa y las guerras Napoleónicas. La música de su tiempo es la de Johan Emanuel Bach, hijo de Johan Sebastián Bach. Euler es de su edad pero 50 años mas joven que Mozart por lo que es seguro que no llegó a escuchar su música.

Euler es un personaje clave en la historia de las matemáticas por su capacidad de sistematización de las aportaciones de los genios que le precedieron, Descartes, Fermat, Newton, Leibniz y de aportar en todos los campos ideas fecundas y originales. La matemáticas del siglo XVII nos llegan interpretadas y sintetizadas a través de Euler. Euler cogió el cálculo diferencial de Leibniz y las fluxiones de Newton y las integró en una rama mas general de la matemática que ha recibido desde entonces el nombre de análisis, es decir el estudio de los procesos infinitos.

Sus textos son los primeros que utilizan el lenguaje y la notación moderna, dando forma a la matemáticas "clásicas".

Euler fué el primero en usar la letra **e** para la base de los logaritmos naturales en su libro de *Mechanica* de 1731, en el que presenta la mecánica de Newton de forma analítica. Euler adopta el símbolo **π** y la difusión de sus obras consolida su uso universal. La introducción de **i** como símbolo de la unidad imaginaria es mas tardía ya que Euler usa la **i** por primera vez en 1777 en un manuscrito hacia finales de su vida para designar la unidad imaginaria. El impulso definitivo del uso de este símbolo se debe finalmente a Gauss en su obra clásica *Disquisitiones arithmeticae* de 1801.

La identidad $\boldsymbol{e^{i\pi} = -1}$, que es la protagonista de nuestro libro, relaciona tres números a los que Euler puso "nombre", pero en su versión original no tenia ese aspecto exactamente ya que la unidad imaginaria aparecía como $\sqrt{-1}$. La belleza que generalmente se atribuye a esta fórmula no se fundamenta pues en su grafismo, es una forma de belleza que no estamos acostumbrados a reconocer y valorar pero que nos descubre la profunda armonía de las matemáticas.

1.3 Una advertencia final

Sócrates le decía a Agatón en el banquete:

> *Estaría bien, Agatón, que la sabiduría fuera cosa de tal naturaleza que, al ponernos en contacto unos con otros, fluyera desde el más sabio al más ignorante de nosotros, como fluye el agua en las copas, a través de un hilo de lana, de la más llena a la mas vacía.*

Viendo como otro pinta no nos haremos pintores, solo nos podremos contagiar de su pasión creativa, de la ilusión por adquirir su habilidad. Del mismo modo, para el aprendizaje de las matemáticas, es una gran error creer que leyendo un texto y su primera comprensión podemos prescindir del esfuerzo personal imprescindible para dominar la materia.

2 La invención de los logaritmos

2.1 Las tablas de Logaritmos

Nuestro relato comienza con la invención de los logaritmos. Sus inventores tenían la intención de crear una tabla de multiplicar para facilitar la mecánica del cálculo, principalmente para los astrónomos.

Napier se dio cuenta que una función exponencial a^x nos presenta dos series de números. Los exponentes, que forman una serie aritmética y el resultado de a^x que es una serie geométrica de razón a.

Hagamos una tabla con una columna para cada una de las series, para el caso en el que a= 2

2^x	x
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
……..	n

Para multiplicar dos números de la primera columna, buscamos su correspondiente en la segunda y los sumamos. Buscando en la segunda columna el número suma, obtenemos el resultado de la multiplicación en la primer columna. Hemos creado una tabla de logaritmos que sirve para multiplicar números.

Razonando de forma mas general, la aritmética elemental nos enseña que:

$$a^{x+y} = a^x . a^y$$

Si tenemos un número cualquiera N podemos calcular la x para que a^x=N. Lo mismo para S, obtenemos un valor a^y=S . Luego sustituyendo:

$$a^{x+y} = a^x . a^y = N.S$$

Si tenemos una tabla de dos columnas ya calculada de los valores de N=a^x, con N en la primera columna y el valor de x en la segunda, para multiplicar N*S hacemos como en el ejemplo anterior, buscamos en la primera columna el número N y obtenemos *x*. Buscamos el número S y obtenemos *y*. Sumamos *x+y* y buscamos en la segunda columna hasta encontrar en la primera columna el resultado de S*N.

Hemos reducido una multiplicación a una suma, perfecto, pero nos queda calcular todos los valores de la tabla, lo cual es un trabajo verdaderamente duro, pero si alguien se encarga de hacer el trabajo todo el mundo se beneficiará después de ello.

Ahí se presenta voluntario Napier y calcula el solito una tabla de dos columnas que publica en 1614 "*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*" (descripción del maravilloso canon de logaritmos). El problema de las tablas de Napier es que no acertó en la elección de la base para sus logaritmos, lo que hizo que sus tablas fueran rápidamente sustituidas por otras mejores, pero en reconocimiento a su aportación los logaritmos naturales, un tipo de logaritmo que veremos mas adelante, hoy se llaman Neperianos.

John Briggs (1617) se da cuenta de las ventajas de utilizar como base de los Logaritmos el número 10 porque era uno de los impulsores de la notación decimal que en esos años muchos matemáticos están proponiendo para unificar la escritura de los números enteros y de los fraccionarios y también para unificar el sistema de pesos y medidas. El uso de la coma, que hoy nos parece natural para separar las potencias de 10 positivas y negativas, en la época representó un gran avance practico, generalizando para los números racionales los procedimientos de cálculo de las operaciones básicas. El sistema decimal para las unidades físicas de longitud, superficie y volumen tardaría aún en imponerse, hasta la famosa adopción del metro en Paris, por 17 países en 1875.

En base 10, al mover la coma decimal de un número a izquierda o derecha, el logaritmo de ese número disminuye o aumenta en la unidad. (Multiplicar por diez es sumar al log N el log 10, que es 1 en base 10).

Calculando logaritmos para los números entre 1 y 10, ($log_{10} 1 = 0$ a $log_{10} 10 = 1$) tenemos toda la tabla completa sumando al logaritmo la potencia de 10 correspondiente.

Por ejemplo, si hemos calculado, $log_{10} 1{,}2 = \mathbf{0{,}07918}$,

el $log_{10} 12$ será,

$$log_{10} 12 = log_{10}(1{,}2 \times 10) = log_{10} 1{,}2 + log_{10} 10 = (log_{10} 1{,}2) + 1 = \mathbf{1{,}07918}$$

y el de 120,

$$log_{10} 120 = log_{10}(12 \times 10) = log_{10} 12 + log_{10} 10 = (log_{10} 12) + 1 = \mathbf{2{,}07918}$$

Briggs calcula su tabla empezando por la raíz cuadrada de 10, es decir obtiene el número cuyo logaritmo es $\frac{1}{2}$, (obtener la raíz cuadrada es elevar a $\frac{1}{2}$).

$10^{\frac{1}{2}}$= 3,162277… y así sucesivamente extrayendo la raíz cuadrada del resultado, hasta 52 veces, obtiene su tabla.

	x	***Log₁₀ x***
$10^{1/2}$	3,16227766	0,5
$10^{1/4}$	1,77827941	0,25
$10^{1/8}$	1,3335214	0,125
$10^{1/16}$	1,15478198	0,0625
$10^{1/32}$	1,07460782	0,03125
……		

Cálculo de logaritmos en base 10

Para calcular la tabla en base diez, solo hace falta obtener sucesivamente las raíces cuadradas de 10. Obtener la raíz cuadrada es elevar 10 a ½ , es decir $10^{0,5}$. La primera raíz, corresponde a $10^{½} = 10^{0,5}$ es 3,1623. Luego 0,5 es igual al log en base 10 de 3,1623, puesto que $3,1623 = 10^{0,5}$.

En el siguiente paso, calculamos la raíz cuadrada del número anterior, y su $\log_{10}$ será por tanto $3,16277^{0,5} = (10^{0,5})^{0,5} = 10^{0,25} = 1,77828$. Luego $\mathrm{Log}_{10} 1,77828 = 0,25$

Mover el deslizador "n" para a cada paso, extraer la raíz cuadrada de un número mas próximo a 1 y su logaritmo que en cada paso se reduce a la mitad.

Al obtener los logaritmos de un número por el procedimiento anterior, podemos calcular seguidamente los logaritmos de sus potencias, puesto que al multiplicar un número por si mismo sucesivamente, el logaritmo del producto es un múltiplo de su logaritmo.

Moviendo a cada paso el deslizador "r" obtenemos los logaritmos de las potencias de la ultima raíz cuadrada obtenida .

En el paso n= 2, obteniendo el número que corresponde a log 0,25, podemos obtener fácilmente el correspondiente a los logaritmos 0,5 y 0,75.

En el paso 3, obteniendo el número que corresponde a log 0,125, podemos obtener fácilmente el correspondiente a los logaritmos 0,125, 0,250, 0,375, 0,5, 0,625, 0,750, 0,875.

Briggs repitió este proceso, extrayendo la raíz cuadrada hasta 52 veces, obteniendo así un número muy próximo a 0 y la tabla de logaritmos que lleva su nombre.

2.2 La función logarítmica

Hemos visto que las tablas de logaritmos son un invento práctico para facilitar los cálculos que ha sido útil mientras se hacían a mano. Hoy en día no necesitamos los logaritmos porque las calculadoras y ordenadores se encargan de hacerlos de forma rápida y segura. Pero los logaritmos han resultado ser algo mas que tablas de multiplicar como vamos a ver.

El primer paso es definir la función logarítmica. Pero, ¿Que es una función?

En el siglo XVII una función era simplemente una curva. Con la invención de la geometría analítica por Descartes las ecuaciones algebraicas empezaron a representarse en el plano dibujando rectas y cónicas, (Parábolas e hipérbolas) que tienen ecuaciones sencillas de primer y segundo grado fáciles de representar y de analizar.

Cada punto del plano establece una relación entre abscisas y ordenadas calculadas mediante una expresión algebraica que las relaciona y esto es suficiente para establecer la primera idea de función. A medida que se desarrolle el cálculo, el análisis de funciones requerirá de la definición del concepto de manera mas precisa, aunque la definición moderna de función aún tardará dos siglos en establecerse.

Para la función logarítmica es evidente que no disponemos de una expresión algebraica para representarla. De hecho lo que disponemos es de la tabla de logaritmos que hemos calculado, que por muy exhaustiva que sea, es como el esqueleto de una función, porque entre número y número de la tabla hay infinitos números para los que no tenemos la correspondencia que necesitamos. Afortunadamente, para definir una función no necesitamos tener todos sus valores calculados, solo la regla para hacerlo cuando sea necesario. Definimos nuestra regla:

“función logarítmica” $y=(\log_a x)$, *“logaritmo de x en base a es el número “ y” tal que se cumple* $a^y = x$ *”.*

La función logarítmica queda definida pues, como la función inversa de la función exponencial.

Decimos que dos funciones son inversas una de otra, porque para un valor de *x* obtenemos una *y*, resultando que introduciendo *y* en la segunda función volvemos a obtener la *x* inicial. Las gráficas de funciones inversas son simétricas respecto la diagonal del primer cuadrante, es decir se obtienen una de otra sustituyendo la *x* por la *y*.

Hemos dado muchos pasos sin demasiada precisión. Una primera definición de función de una variable independiente *x*, representada en un sistema de coordenadas ortogonal. Además, sin definir función, introducimos el concepto de función inversa. No es un ejemplo de rigor pero es intuitivo y podemos visualizarlo gráficamente.

Función exponencial y logarítmica

Podemos ver representadas la función logarítmica y la función exponencial para diferentes valores de la base moviendo el deslizador a.

Resaltamos las siguientes observaciones :

a-La representación gráfica de dos funciones inversas es simétrica respecto de la recta x=y
b-La función exponencial para todo valor de x obtenemos un valor siempre positivo de y.
c- La función exponencial corta el eje y en 1 porque cualquier número elevado a 0 es 1
d- la función exponencial es siempre creciente
Para la función logarítmica observamos:
e- Log 1=0 para cualquier base. La función logarítmica corta el eje x en x=1, comportándose simétricamente a como hemos visto en la exponencial.
f- El logaritmo de la base es siempre 1. Podemos comprobar como el punto de intersección entre la curva logarítmica y la recta y=1, en verde y con forma triangular, esta en la vertical de la x correspondiente a la base de la función logarítmica.
g- No existe el logaritmo de números negativos. Ninguna de las dos funciones tiene presencia en el tercer cuadrante.
h- El logaritmo de los números menores que 1 > x >0 es negativo y se hace muy grande para x=0. Los números menores que 1 los podemos escribir como $x= 1/a^n = a^{-n}$ *y por lo tanto ,* $Log_a\, x = -n$ *para* $1 > x > 0$

Logaritmo de un producto

Se expresa la propiedad base de los logaritmos para multiplicar números sumando sus logaritmos.

Podemos comprobar deslizando sobre los puntos A y B la propiedad fundamental de los logaritmos Log (A·B) = Log A + Log B

Cambio de base de los logaritmos

Se expresa la fórmula de conversión de logaritmos de diferente base.

Podemos comprobar que Log_b b =1 para cualquier base. También comprobamos que el cociente entre los Logaritmo de un número cualquiera en dos base diferentes es una constante.

$$\frac{\log_a x}{\log_b x} = K$$

Con estas dos propiedades de la función podemos escribir:

$$\frac{\log_a x}{\log_b x} = K = \frac{\log_a b}{\log_b b} = \log_a b$$

Y por lo tanto:

$$\log_a x = \log_b x \, . \log_a b$$

Que es la fórmula que nos permite obtener el logaritmo de un número en cualquier base conociendo su logaritmo en otra.

3 La invención del cálculo

Para avanzar en nuestra historia tenemos que entrar a describir el "invento del siglo", el cálculo infinitesimal. Decimos invento del siglo para enfatizar que, a pesar de la atribución de su invención a Newton y Leibniz, no se trata en este caso de una invención a partir de cero sino, por el contrario, existió una larga lista de contribuciones parciales que ellos dos fueron capaces de sistematizar y dar un nuevo sentido, inaugurando así una nueva rama de la matemática. Newton hizo sus primeros descubrimientos diez años antes que Leibniz quien, sin embargo, fue el primero en publicar sus resultados. La atribución del mérito de la invención dividió a los matemáticos ingleses y los continentales y dificulto la cooperación entre ellos durante muchas décadas.

Newton expone por primera vez una visión completa del Cálculo infinitesimal en "**Método de las fluxiones y series infinitas**" (Methodus fluxionum et serierum infinitorum escrito en 1671, y no publicado hasta 1736). El cálculo infinitesimal y las series infinitas tienen una fecha de nacimiento común, y comparten el recurso a razonamientos basados en la división de los problemas en elementos "infinitamente pequeños" y en la manipulación de estos elementos para obtener resultados finitos. Nosotros trataremos ambos temas sucesivamente, dedicando a las series infinitas el próximo capítulo.

Como hemos visto al inicio de siglo, el concepto de función estaba muy ligado a su representación gráfica, el análisis de funciones tiene por lo tanto su origen en el planteamiento y resolución de problemas geométricos. Los esfuerzos del cálculo se orientan a la búsqueda de soluciones a dos tipos de problemas que se plantean como independientes uno del otro. El primero la "rectificación de curvas" que consiste esencialmente en la obtención de las tangentes de una curva y su longitud y por otra parte, la "cuadratura de curvas" que consiste en calcular el área encerrada por una curva y el eje x.
Estas dos líneas de trabajo darán lugar al cálculo diferencial y al cálculo integral y se mantendrán independientes hasta que Newton y Leibniz con

su visión global de los problemas planteados, enuncian el teorema fundamental del cálculo que establece su unidad conceptual y metodológica.

1629 Fermat

Fermat es el primero que enfoca el problema de la tangente a una curva de forma analítica. Su planteamiento es innovador pues se adelanta 50 años a Newton en el tratamiento de las cantidades “infinitamente pequeñas” que utiliza en su razonamiento.

La pendiente de una recta, se mide por la tangente del ángulo que forma con la horizontal. En geometría elemental la tangente de un ángulo se define como la relación entre el lado opuesto y el contiguo de uno de los ángulos no rectos de un triángulo rectángulo.

Dada una curva de la que queramos hallar la tangente en un punto, Fermat establece la semejanza de dos triángulos rectángulos, el que la tangente de la curva forma con el eje horizontal y el triángulo formado por el punto en el que queremos hallar la tangente, un punto de la curva distante Δ x y la horizontal en el punto de tangencia.

Fermat razona de una forma casi idéntica a la que propondrá mas tarde Newton y que usamos actualmente. La pendiente de la secante a la curva en *f(a)* y *f(a+Δx)* es:

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

y cuando *Δ x* se hace muy pequeño se confunde con la pendiente de la tangente en el punto a.

Fermat calcula las tangentes para las funciones exponenciales. Por ejemplo, supongamos que buscamos la tangente a la función $y=x^2$, sustituyendo en la fórmula,

$$\frac{(a+\Delta x)^2-a^2}{\Delta x}$$

que desarrollando es

$$\frac{a^2+\Delta x^2+2\,a.\Delta x-a^2}{\Delta x}$$

igual a

$$\Delta x+2a$$

y cuando *Δ x* se aproxima a 0 resulta ser 2 a.

Luego en el punto a, la pendiente de la tangente a la curva $y= x^2$ es 2a. El mismo razonamiento para exponentes mayores le lleva a la fórmula general para la pendiente de funciones del tipo $y=x^n$, resultando ser:

$$n\, x^{n-1}$$

Este mismo procedimiento le sirve a Fermat para identificar los máximos y mínimos de una función. En el entorno de un máximo o de un mínimo de la función dos puntos a un lado y otro del punto que buscamos, separados por Δx, tienen la misma ordenada es decir $f(a+\Delta x)- f(a)= 0$ y por tanto la tangente en el punto en el que la función es máxima o mínima la tangente es horizontal (pendiente 0)

La tangente de Fermat

1671 Newton

Newton se aproxima al cálculo desde su interés por la física. Desde un primer momento, por influencia cartesiana, había puesto en relación la geometría analítica con la mecánica. A través de su profesor Barrow, había aprendido a considerar las curvas desde un punto de vista cinemático: su análisis de curvas era un análisis de puntos en movimiento. Cuando un punto A se movía a lo largo de una curva, su abscisa x, o su ordenada y, o cualquier otra cantidad variable relativa a la curva aumentaba o disminuía, cambiaba: fluía. A estas cantidades que fluían las llamó “fluentes” y a sus velocidades de cambio, a sus variaciones instantáneas con respecto al tiempo, las llamó “fluxiones”. De esta manera el cálculo de “fluxiones” estaría fundamentado con un concepto natural como es el de movimiento y el objeto del mismo sería el de una relación entre cantidades fluentes, encontrar la relación entre sus fluxiones y recíprocamente.

Si partimos de un función del tipo $y=f(t)$, representando esta función la distancia recorrida por una partícula en función del tiempo transcurrido. Podemos pensar que la fluxión del espacio recorrido en el tiempo es equivalente a hablar de la velocidad de la partícula.

Es fácil averiguar cual es la velocidad media en un intervalo, pero lo que buscamos es calcular la velocidad en cada instante, pero de forma general la partícula descrita no se mueve con una velocidad uniforme, para cada intervalo de tiempo el espacio recorrido es diferente y su velocidad instantánea también.

Veamos por ejemplo la función $y=t^3$ y analicemos como se comporta en el intervalo de tiempo entre 0 y por ejemplo 5. Su velocidad media en los 5 segundos es de 25. Hacemos una tabla con la velocidades medias en intervalos de un segundo:

intervalo	Y al inicio	Y al final	Velocidad media
0-1	0	1	1
1-2	1	8	7
2-3	8	27	19
3-4	27	64	37
4-5	64	125	71

Queda claro que las velocidades en cada periodo varían desde valores inferiores al medio hasta finalizar en 71, casi el triple del valor medio.
Pero si hacemos la misma tabla para intervalos mas pequeños, por ejemplo, entre el segundo 4 y el 5 obtenemos:

intervalo	Y al inicio	Y al final	Velocidad media
4,0 -4,1	64,000	68,921	49,21
4,1- 4,2	68,921	74,088	51,67
4,2 – 4,3	74,088	79,507	54,19
4,3 – 4,4	79,507	85,184	56,77
4,4 - 4,5	85,184	91,125	59,41
4,5 – 4,6	91,125	97,336	62,11
4,6 - 4,7	97,336	103,823	64,87
4,7- 4,8	103,823	110,792	67,69
4,8 - 4,9	110,792	117,649	70,57
4,9 – 5,0	117,649	125,000	73,51

La fórmula que usamos para el cálculo de la velocidad en el intervalo de *i* a *i+Δ t* es:

$$\text{Velocidad media de (i) a (i} + \Delta\text{t)} = \frac{f(t_i+\Delta t)-f(t_i)}{\Delta t} = \frac{(t_i+\Delta t)^3 - t_i^3}{\Delta t}$$

Podemos ver que la velocidad instantánea en 5 ha pasado de ser 71 a 73,51.
Y si dividimos nuevamente el intervalo de la decima de segundo entre 4,9 y 5 en centésimas. Rehaciendo los cálculos tenemos:

intervalo	Y al inicio	Y al final	Velocidad media
4,90 -4,91	117,649	118,370771	72,1771
4,91- 4,92	118,370771	119,095488	72,4717
4,92 -4,93	119,095488	119,823157	72,7669
4,93–4,94	119,823157	120,553784	73,0627
4,94 -4,95	120,553784	121,287375	73,3591
4,95–4,96	121,287375	122,023936	73,6561
4,96 -4,97	122,023936	122,763473	73,9537
4,97- 4,98	122,763473	123,505992	74,2519
4,98 -4,99	123,505992	124,251499	74,5507
4,99 – 5,00	124,251499	125,000000	74,8501

Ahora la velocidad en 5 ya es de 74,8501. Cada vez que disminuimos el intervalo el valor calculado de la velocidad en el segundo 5 aumenta. Hasta que valor?

Newton obtiene el número que buscamos manipulando la fórmula anterior. (Tal como hemos visto con Fermat):

$$\frac{(x_i + \Delta x)^3 - x_i^3}{\Delta x}$$

Efectuando las operaciones resulta:

$$v = \frac{(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) - x^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\,\Delta x + \Delta x^2$$

y razona que como $\Delta\ x$ es cada vez mas pequeño, acercándose a 0, despreciamos los términos segundo y tercero que van a resultar cada vez mas pequeños y obtenemos

$$v = 3x^2$$

La velocidad al final del tramo es 75.

La interpretación cinemática de la fluxión del espacio recorrido por una partícula en función del tiempo, es la velocidad instantánea en ese punto. La aguja del tablero del coche que indica la velocidad, nos da el valor de la fluxión del espacio en cada instante. Como en el caso de la tangente, obtenemos una magnitud asociada a un punto. En el primer caso era la pendiente de la tangente y en este es la velocidad de la partícula.

La aproximación cinemática nos permite profundizar en el concepto de fluxión. Si consideramos la velocidad como "fluente", es decir magnitud sujeta a variación, también podemos obtener la fluxión de la velocidad con el tiempo, en este caso seria la aceleración instantánea, de modo que constatamos que podemos analizar sucesivamente la fluxión de una variable y obtener fluxiones sucesivas de primer orden, segundo orden etc…

Cálculo de la velocidad instantánea geométricamente

Reproducimos gráficamente los cálculos que hemos hecho para las tablas de la velocidad media.

La función que hemos escogido f(t), $y = x^3$ *crece muy rápido por lo que hemos deformado la cuadricula que representa en el eje x los segundos transcurridos y en el eje y la distancia recorrida.*

Tomamos un punto A y otro B separado de A por el intervalo h que controlamos con el deslizador y trazamos la recta que los une. Su pendiente nos señala va velocidad media entre A y B. Al mover el deslizador, disminuyendo h, B se acerca a A y la recta que los une se convierte en la tangente en A y su pendiente es la velocidad instantánea en ese instante.

Podemos mover el punto A sobre la curva e ir obteniendo los resultados de las tablas numéricas que hemos calculado para el intervalo entre el segundo 4 y 5.

Si construimos una curva con los valores de la tangente en cada punto obtenemos la derivada de $y = x^3$ *que es la parábola* $y=3x^2$ *en trazo negro.*

Leibniz

Leibniz conserva el carácter geométrico del problema y, diferenciándose de su colega, trata a la "derivada" como un cociente incremental, y no como una velocidad. Leibniz no habla de "derivada" sino de "incrementos infinitamente pequeños", a los que llama diferenciales. Un incremento de x infinitamente pequeño se llama diferencial de x, y se anota dx. Lo mismo ocurre para y (con notación *dy*). Lo que Newton llamó "fluxión", para Leibniz es un cociente de diferenciales ($\frac{dy}{dx}$). El cociente de diferenciales nos lleva a la expresión,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(a + dx) - f(a)}{dx}$$

que, como hemos visto con Fermat, corresponde a la pendiente de la tangente a la función en a. La notación de Leibniz es la que se ha adoptado para el cálculo porque permite, como iremos viendo, un manejo mas flexible del concepto.

Sea cual sea el camino que se escoja, acabamos llegando al mismo punto que intuitivamente es muy claro y que da resultados prácticos, pero el proceso no esta demostrado con rigor porque un cociente diferencial no es exactamente una división de incrementos, aunque en muchos aspectos se comporte como tal. ¿Como podemos ir obteniendo valores finitos de la función al dividir por una cantidad que decimos que es cada vez mas pequeña? Si el $dx = \Delta x$ se hace 0 en la fórmula, obtenemos 0/0 que es un valor indeterminado. Luego estamos ante una fórmula que funciona para valores tan pequeños como queramos de Δx pero no parece que sea así para $\Delta x = 0$.
Queda claro que no podemos interpretar la expresión como un cociente, sino como un proceso de "paso al limite". El cálculo tardara mucho en definir este concepto con rigor a pesar de ser el concepto central sobre el que se construye el cálculo y el análisis de funciones.
Por esta atribuida falta de rigor el cálculo fue para los contemporáneos muy cercano a la magia:

> *¿Que son las fluxiones?*
> *Las velocidades de incrementos evanescentes.*
> *Y ¿Que son estos mismos incrementos evanescentes? Ellos no son ni cantidades finitas, ni cantidades infinitamente pequeñas, ni nada. ¿No las podríamos llamar fantasmas de cantidades que han desaparecido?*

Interpretación de la derivada

Ilustramos que la derivada de una curva c se puede interpretar, si se particulariza a un punto, como el valor de la pendiente en ese punto, pero también puede verse como la obtención de una nueva función c' , transformada de la anterior, que para cada x toma el valor de la derivada de la función en ese punto. La primera interpretación esta ligada a la representación de la función como una curva. La segunda opción no necesita de la interpretación geométrica de la derivada.
Podemos observar como construimos la representación de la función derivada a partir de la secante que pasa por dos puntos A y B distantes entre si Δx, y trasladamos el valor de la pendiente de la secante, obteniendo un "escalón" horizontal de ancho Δx. Al disminuir Δx, la función derivada se dibuja con mas precisión. Es la visión de Leibniz que interpreta una función como una sucesión de escalones de ancho dx y de altura dy, que al hacerse dx cada vez mas pequeño se suaviza y se convierte en una línea continua.
También podemos observar que la relación entre una función y su derivada sigue unas determinada reglas.
Por ejemplo. Cuando la función pasa por un máximo, la derivada se hace 0. Geométricamente podemos decir que la tangente en ese punto es horizontal. Antes de un máximo, la función es creciente y la pendiente de su tangente es positiva. Rebasado el máximo la pendiente se vuelve negativa y la función decrece.
El mismo razonamiento, en sentido contrario, se puede hacer para los puntos en que la función sea mínima.

Definición moderna de limite de una función
Para facilitar la exposición introduciremos aquí la definición de Cauchy para el limite de una función, lo que nos permitirá expresar los conceptos ligados al cálculo infinitesimal en un lenguaje moderno, sin alterar la esencia de nuestro relato. La definición de limite que usamos actualmente se expresa así:

La función f tiende al limite L en b, si para todo ε > 0, existe algún δ>0, tal que para todo x, si 0<|x-b|<δ entonces |f(x)-L|<ε

Es decir, L es un limite de f(x) cuando x tiende a b, si cuando definimos una aproximación al valor de la función tan pequeña como queramos, por ejemplo ε, podemos encontrar un valor δ tal que, hay un valor de x cercano a b en una cantidad menor que δ, para el que la función |f(x) – L|<ε

Tanto la derivada como la integral resultan definidas utilizando el concepto de limite de la siguiente manera:

La función f(x) es diferenciable en "*a*" si existe el limite:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Mas adelante veremos como aplicamos el concepto de limite a la definición de la integral definida.

3.1 El cálculo integral

1647 Grégorio de Saint-Vincent.

Grégorio de Saint-Vincent estudiando la cuadratura de la hipérbola equilátera *y.x* =1 llega a la conclusión de que áreas iguales bajo la hipérbola se corresponden con la progresión logarítmica, es decir, si

Área $_x$ (de 1 hasta x) = Área $_y$ (de x hasta y) = Área $_z$ (de y hasta z)= …..

Entonces,

Area $_y$ = 2 Area $_x$

Area $_z$ = 3 Area $_x$

Y

*Log y = 2*log x , Log z = 3*log x ………*

En definitiva el logaritmo de un número n es proporcional al área bajo la hipérbola desde 1 a n, cualquiera que sea la base le logaritmos que tomemos.

Áreas de Saint Vincent

Dibujamos rectas horizontales separadas por una distancia "a" que pasan por los puntos (C, D, E, H) y obtenemos el punto de corte de estas rectas con la función logarítmica dibujada de base "b" (A, J, K, L) y trazamos las rectas verticales que pasan por esos puntos.
Podemos comprobar que las rectas verticales definen bajo la hipérbola áreas iguales entre ellas y que esas áreas no varían de magnitud al modificar la base de la función logarítmica.(moviendo el deslizador b).
Podemos comprobar que el área contenida bajo la hipérbola entre 1 y n es proporcional al logaritmo de n poniendo A en la vertical de n=2 y observando que J y K se sitúan sobre el 4 y el 8. Como 2x2=4 el log de 4 es log 2 + log de 2 y el área bajo la hipérbola justo el doble. Como 4x 2=8, log 8= log4 + log 2 y por lo tanto el área comprendida es tres veces la que hemos tomado bajo A.
Para calcular la constante de proporcionalidad podemos situar el punto A sobre el punto x= b y comprobamos que log b =1 ya que el logaritmo de la base es por definición 1.
Tenemos entonces que:

Área de 1 a b = K x log b = K

Obtenemos así la constante de proporcionalidad para cada valor de la base de la función logarítmica.

El descubrimiento de esta relación entre la función logarítmica y la hipérbola equilátera es una aportación temprana al problema de las cuadraturas pero Saint Vincent no supo ponerla en un contexto mas general, ni relacionarlo con el problema inverso de la "rectificación" de la función logarítmica.

Cavalieri 1635
La cuadratura de curvas se aborda en esta época también desde una perspectiva geométrica clásica que consiste en dividir las figuras geométricas en "indivisibles". Así, Cavalieri descompone las figuras planas en líneas paralelas y los volúmenes en rebanadas planas. Su proposición mas conocida es la de que dos figuras planas tienen la misma

superficie o dos sólidos tienen el mismo volumen si todas sus secciones paralelas a un plano dado son iguales entre si.
Cavalieri aplicando su teorema llega mediante su razonamiento geométrico a un resultado correcto para obtener la cuadratura de las funciones del tipo $y=x^n$. (Para valores de n enteros e inferiores a 9)

Cavalieri

Representando la función $y=x^n$ podemos dibujar en azul el rectángulo de base x y altura x^n por lo tanto de área x^{n+1}. El área bajo la función podemos "cuadrarla" en el rectángulo marron y comprobamos la relación de ambas superficies al variar n con el deslizador.
Para n =1 quedan definidos dos triángulos y la superficie del triángulo inferior es evidentemente $x^2/2$.
Para n=2, la curva es una parábola $y=x^2$ y la relación entre las superficies es 1/3.

Mediante razonamientos sobre indivisibles Cavalieri logra otros resultados relevantes, como por ejemplo, la trasformación de la parábola x^2= ay en la espiral de Arquímedes de radio proporcional al giro.
Roverbal y Torricelli obtienen, siguiendo el razonamiento de los indivisibles, el área bajo la mitad de un arco de la curva "seno" y el área bajo la cicloide. Ilustramos así como la geometría estaba aun muy presente en la mentalidad de los matemáticos incluso cuando razonaban en términos de infinitesimales, en este caso "indivisibles", líneas sin espesor que conseguían una junto a otra formar una superficie, superficies que apiladas formaban volúmenes.

Los indivisibles

Fermat 1636
Fermat para las cuadraturas vuelve a ser el primero, como en los diferenciales, en proponer un procedimiento analítico para funciones exponenciales $y = x^n$.
Divide el rectángulo $x \, . \, x^n$ en pequeñas rebanadas $\Delta \, x$ que obtenemos dividiendo x por k, siendo k un número que haremos crecer para que las rebanadas sean cada vez mas delgadas. El área de la primera rebanada

bajo x^n será $\frac{x}{k}\ \ (\frac{x}{k})^n$. El área de la segunda será $\frac{x}{k}\ \ (\frac{2x}{k})^n$. El área de la tercera $\frac{x}{k}\ \ (\frac{3x}{k})^n$ y así sucesivamente hasta la rebanada k que será:

$$\frac{x}{k}\ \ (\frac{k\,x}{k})^n$$

Si sumamos todas las rebanadas, el área bajo x^n es:

$$\left[\frac{x}{k}\ \ (\frac{x}{k})^n\right]+\ \left[\frac{x}{k}\ \ (\frac{2x}{k})^n\right]+\ \left[\frac{x}{k}\ (\frac{3x}{k})^n\right]\ +\cdots+\ \left[\frac{x}{k}\ \ (\frac{k\,x}{k})^n\right]$$

que podemos poner de la forma:

$$(1+2^n+3^n+\cdots+k^n)\ (\frac{x}{k})^{n+1}$$

y,

$$\frac{(1+2^n+3^n+\cdots+k^n)}{k^{n+1}}\ \ x^{n+1}$$

Si calculamos el primer termino, para cada valor de n, para valores de k cada vez mas grandes comprobamos que su valor se aproxima cada vez mas a $\frac{1}{1+n}$, con lo que resulta demostrado que la cuadratura de $y=x^n$ resulta ser $\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Este es el cálculo de $\frac{1}{1+n}$,para n=4 y n=9, dividiendo el intervalo entre 10 y 60 veces. Podemos ver que la aproximación es bastante lenta y que solo a partir de 60 obtenemos dos decimales correctas.

n=4	*K=10*	*k=20*	*K=30*	*K=40*	*K=50*	*k=60*
	0,2533	0,2258	0,2170	0,2127	0,2101	0,2084

n=9	*K=10*	*k=20*	*K=30*	*K=40*	*K=50*	*k=60*
	0,1574	0,1269	0,1175	0,1130	0,1103	0,1085

La intuición de Fermat le lleva a proponer para la diferenciación y la integración una aproximación totalmente correcta aunque limitada a las funciones del tipo $y=x^n$. Sorprende que obteniendo resultados tan simétricos en ambos problemas no se planteara la relación entre ambos.

La integral definida

La integral definida de una función es “la cuadratura” de la función y se obtiene mediante la suma de rectángulos de base infinitesimal y de altura dada por la ecuación analítica de la curva. Volviendo a plantear un paso al limite cuando la base del rectángulo infinitesimal se va haciendo mas pequeño.
En cada intervalo infinitesimal, la función toma un valor máximo y un valor mínimo por lo que el área a calcular puede hacerse tomando uno u otro valor. En un caso obtenemos lo que llamamos suma superior y alternativamente suma inferior. El valor real que buscamos es evidentemente un valor intermedio, que es el límite común al que tienden cada una de las sumas cuando el intervalo infinitesimal tiende a 0.
La integral así definida es un valor numérico que representa la superficie bajo la función y el eje x entre dos valores extremos a y b. A la integral entre estos dos valores de la función se llama integral definida:

“valor de la suma de $f(x_i) * d x$, cuando $d x$ tiende a 0,
para el intervalo desde $x=a$ hasta $x=b$”

Para expresar la suma de los elementos de área Leibniz inventó el símbolo $\int$ que en forma de s quiere expresar el sumatorio de elementos, con lo que la expresión anterior queda escrita:

$$\int_a^b f(x)dx$$

La integral definida utilizando la definición de limite resulta ser:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{dx\to 0} \sum_{x^i=a}^{x^i=b} f(x_i)\, dx$$

La integral definida, el área bajo la función *f(x)* entre a y b, tiene la propiedad de ser aditiva, es decir el área entre *a* y *b* + el área entre *b* y *c* resulta ser el área entre *a* y *c*. Si hacemos *a* = 0, podemos decir que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx$$

Interpretación de la integral

Si consideramos un incremento de x pequeño (Δ x) , podemos calcular el área de un rectángulo de base Δ x y altura f(x), o un rectángulo de base Δ x y altura f(x+ Δ t). El área bajo la curva para Δ x es una cantidad entre el primer valor y el segundo. Podemos deducir dos cosas:

- *El área bajo la curva entre una x=a y x=b será la suma de todos los rectángulos que podamos formar de base Δ x entre a y b y su valor será intermedio al de la suma superior, cuando tomamos como valor de la función el mayor del intervalo, e inferior, cuando tomamos como valor de la función el menor del intervalo.*
- *Al disminuir Δ x las dos sumas superior e inferior se aproximan una a la otra y al valor del área bajo la curva.*

Podemos comprobar la propiedad aditiva de la integral definida moviendo los limites de integración con el deslizador

La integral de una función

Si movemos el límite superior de integración vamos obteniendo un valor del área bajo la curva que trasladamos al punto de color. Al mover el deslizador nuestro punto va describiendo un recorrido que representa la función integral.

Métodos de integración numéricos

Obtener la integral mediante el cálculo de la suma de los rectángulos en los que descomponemos el área bajo una función es un proceso poco útil en la practica. Podemos decir que es un procedimiento muy simple de definir pero de ejecución muy laboriosa y de resultados poco precisos, si no se divide el intervalo en rectángulos suficientemente pequeños. (hemos visto antes que necesitábamos 60 divisiones para obtener dos decimales correctas de $y= x^4$ y de $y=x^9$)

Una de las soluciones para simplificar los cálculos es recurrir a métodos que aproximen el resultado final de forma mas eficiente. Curiosamente el método mas utilizado actualmente es anterior a Fermat y Cavalieri y tiene su origen en Kepler, que escribió en 1615 el escrito Nova *Stereometria doliorum vinariorum* (Nuevo cálculo del contenido de barriles de vino), en el que buscaba métodos verificables para el cálculo del contenido de los toneles de vino. (Kepler no solo se ocupaba de los planetas!!!). Uno de estos métodos consistió en aproximar la curvatura

del barril con una parábola y su fórmula fué utilizada por el matemático Inglés Thomas Simpson para el cálculo de la integral definida.
El método de Simpson consiste en dividir el intervalo a integrar en un número par de segmentos y calcular el área de dos de estos intervalos, sustituyendo la función a integrar por una parábola que pasa por los puntos f(A), f(A+B/2) y f(B) siendo A y B los extremos de los dos segmentos consecutivos. Para el área de cada uno de estos elementos utiliza la fórmula de Kepler, Area = x(B) – x(A) /6 * [y (A) + 4 y(C) + y (B)], siendo A y B los puntos extremos de cada intervalo doble y C el punto medio.
La fórmula de Simpson es la forma mas habitual de calcular la integral definida porque converge mucho mas rápidamente con el resultado y su aplicación exige menos cálculos para la misma precisión.

La regla de Simpson

Para obtener la fórmula de Simpson vamos a reconstruir el problema del tonel de Kepler. Tenemos el perfil de medio tonel en marrón que se puede descomponer en un rectángulo, su contenido en vino, y un triángulo inscrito en la parábola. El vértice superior del triángulo en el punto medio entre las dos bases del tonel. El área contenida bajo la parábola es 4/3 del área del triángulo inscrito según un teorema clásico de Arquímedes que Kepler conocía perfectamente. El área del triángulo se puede calcular conociendo sus tres lados, (fórmula de Herón) por lo que el problema queda resuelto haciendo las operaciones y simplificando.

Área del tonel = 4/3 Área del triángulo inscrito+ Área ABED

Área del triángulo inscrito ACB = x(C) [y(A)-y(B)]+ x(A)[y(B)-y(C)] + x(B) [y(C)-y(A)]

Área ABED = [x(B)-x(A)] [y(A)+y(B)]/2*

Y efectuando las operaciones resulta:

*Área del tonel = x(B) – x(A) /6 * [y (A) + 4 y(C) + y (B)]*

Podemos comprobar el resultado que resulta valido sean cuales sean los tres puntos sobre la parábola.

Una vez obtenida la fórmula de Simpson veamos como resulta la aproximación parabólica a una curva cualquiera.

Por ultimo podemos comprobar que la fórmula de Simpson se aproxima al resultado de forma mas eficiente que el cálculo mediante rectángulos.

También calculamos una aproximación mediante una recta en lugar de la parábola de Simpson. Como era de esperar su resultado, mediante trapecios, es una media del cálculo con rectángulos superiores e inferiores.

3.2 El teorema fundamental del cálculo

Si una función es derivable en un intervalo, es decir es una función que tiene una tangente para todos los puntos del intervalo, obtenemos una función transformada de *f(x)* que toma en cada punto el valor de la derivada en ese punto. A esta función la llamamos derivada de *f(x)* y la representamos como *f ’(x).* La notación de Leibniz nos permite escribir:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

y la notación nos permite,

$$dy = f'(x) * dx$$

Del mismo modo también podemos generalizar el concepto de integral definida al de función integral. En efecto, si hacemos el limite superior de la integral definida *b= x*, la integral se convierte en una función que obtenemos por trasformación de la función inicial y que construimos en base a los valores del área encerrada por *f(x)* hasta *x*. A diferencia del caso de la derivada donde solo hay una función derivada, en el caso de la integral podremos dibujar curvas diferentes según sea el limite inferior *x= a*, a partir del cual empezamos a calcular el área bajo la función. Esta indeterminación en el valor de la integral es lo que se llama "constante de integración" . Si por convención situamos el limite inferior en *x=0*, la integral es una nueva función, transformada de *f(x)* que tiene para cada x el valor del área desde 0 a *x*.

$$I(x) = \int_0^x f(x)dx$$

Vemos pues que derivación e integración son transformaciones que obtienen una función a partir de otra. Ambos procesos han nacido de razonamientos similares, manejando cantidades que se hacen pequeñas y ejecutando un "paso al limite" para obtener un resultado finito cuando los incrementos se convierten en infinitesimales.

Teorema fundamental del cálculo

Calcular la derivada de una función y "hallar el área" bajo su curva son operaciones "inversas". Este relación entre la derivada y la integral es el teorema fundamental del cálculo y fue enunciado por Newton y Leibniz culminando así lo que hemos llamado la invención del cálculo.

Ya no calculamos la tangente en un punto de una curva, el máximo de una función o el área de la cicloide. La derivada se aplica a funciones y obtiene como resultado una nueva función, transformada de la primera. Además demuestra como las dos funciones resultan relacionadas también mediante la integración que es precisamente la anti-derivada.

Consideremos una función *f(x)* y su derivada *g(x).*

El área bajo $g(x)$ desde x a $x+\Delta x$, podremos decir que es aproximadamente igual a $g(x)\ \Delta x$ cuando Δx se va haciendo pequeño. Puesto que hemos partido de que $g(x)$ es la derivada de $f(x)$,

$$g(x) = f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

multiplicando la igualdad por Δx obtenemos:

$$g(x) \times \Delta x = f(x+\Delta x) - f(x)$$

es decir, el área bajo $g(x)$ es igual al incremento de la función $f(x)$ entre x y $x+\Delta x$.

La suma de rectángulos $g(x) \cdot \Delta x$ en un intervalo (a-b), es decir el área bajo $g(x)$ entre a y b, es lo que hemos definido como integral de $g(x)$, por lo que podemos deducir que se corresponde al incremento del valor de la función $f(x)$ en el intervalo, es decir $f(b) - f(a)$.

Puesto que hemos obtenido la curva $g(x)$ derivando la función $f(x)$, vemos que el área bajo la curva nos devuelve a la función inicial. Es decir para calcular la integral de una función basta con ejecutar el proceso inverso al que hemos llamado derivación, para obtener una función "primitiva" cuya derivada sea precisamente nuestra $g(x)$.

$$\int f'(x)\, dx = f(x)$$

Para el caso de funciones exponenciales, de la fórmula para derivar la función,

$$y = a\, x^n$$

hemos obtenido

$$y' = n\, a\, x^{n-1},$$

luego resulta para la integral la fórmula inversa:

$$\int a\, x^n\, dx = \frac{a\, x^{n+1}}{n+1}$$

que coincide con la fórmula ya conocida de Cavalieri.

Efectivamente, derivando $y = \frac{a\, x^{n+1}}{n+1}$, obtenemos a $y' = a\, x^n$.

Las aportaciones de Newton y Leibniz son decisivas para unificar las diferentes aproximaciones al tratamiento de cantidades infinitesimales y desarrollar las reglas, independientemente de cualquier aproximación geométrica, para que puedan aplicarse a todas las funciones.

Durante los siglos XVIII y XIX las derivadas fueron ampliamente desarrolladas y aplicadas a campos muy diversos y no fueron definidas en los términos actuales hasta el último tercio del siglo XIX. Todo este proceso lo resume la historiadora de las matemáticas Judith V. Grabiner en una frase feliz: *Primero, la derivada fue usada, después descubierta, explorada y desarrollada y, finalmente, definida* .

- Fue usada antes que Newton en problemas concretos durante la primera mitad del siglo XVII.
- Fue descubierta por Newton y Leibniz
- Fue explorada y desarrollada por la generación posterior de matemáticos, entre ellos Euler.
- Fue definida precisamente por Gauss y Cauchy mucho después.

3.3 Derivadas e integrales de las potencias de x

Hemos obtenido las reglas de derivación de cualquier función del tipo $y=ax^n$, resultado obtenido Fermat y Cavalieri:

$$y' = n\, a\, x^{n-1}$$

Si hacemos una tabla con todos los valores posibles de n, vemos que falta una función cuya derivada sea x^{-1} para completar la tabla con todos los exponentes enteros de x. (positivos y negativos)

Función	Derivada
$k_n\, x^n$	$k_n\, n\, x^{n-1}$
$k_1\, x^1$	$k_1 x^0$
$k_{-1}\, x^{-1}$	$-k_{-1}\, x^{-2}$
$k_{-n}\, x^{-n}$	$-k_{-n}\, n\, x^{-(n+1)}$

Si interpretamos, a la luz del teorema fundamental del cálculo, el resultado de St-Vincent sobre la proporcionalidad entre el área bajo la hipérbola $y=\frac{1}{x}$ con el log de x, sea cual sea su base, (en notación moderna $\int_1^x \frac{1}{x}\, dx \approx \log_a x$) demostramos que la derivada de $\log_a x$ es $k_a\, x^{-1}$.

$\mathbf{Log_a\, x}$	$\mathbf{k_a\, x^{-1}}$

Con este resultado completamos la tabla con el único caso en el que la función x^n no se obtiene como derivada de otra potencia de x , aunque aun nos queda por determinar el factor de proporcionalidad k_a .

Tabla de integrales de potencias de x

Log_a x es una función que solo está definida para valores de x> 0, pero la hipérbola equilátera tiene una rama para valores de x positivos y otra para valores de x negativos. Existe por tanto una falta de simetría en la correspondencia entre las funciones. Lo que si podemos es calcular la integral de la rama de la hipérbola del tercer cuadrante, que resulta ser log_a |x|. (La x entre las rayas verticales indican valor "absoluto", que nos transforma los valores de x negativos en positivos). La gráfica de esta función es simétrica a la de Log_a x respecto del eje vertical.

3.4 Derivadas de funciones algebraicas compuestas

Hemos visto hasta aquí como obteníamos la derivada de funciones exponenciales. Para extender el procedimiento de derivación a funciones algebraicas mas complejas vamos a ver las reglas para derivar funciones compuestas.

La primera manera de componer una función a partir de la exponencial es mediante la suma.

La regla para derivar una **suma de funciones** es muy simple:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)+ g(x) \right) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$$

Esta regla es fácilmente demostrable aplicando la definición de derivada:

$$\lim_{dx \to 0} \frac{(f(x+dx)+g(x+dx)) - (f(x)+g(x))}{dx}$$

que es evidentemente igual a:

$$\lim_{dx \to 0} \frac{\left(f(x+dx)-f(x)\right)+(g(x+dx)-g(x))}{dx}$$

El limite de esta suma se puede descomponer en el limite de cada uno de los sumandos y por tanto en la derivada de cada una de las funciones.

Por ejemplo para derivar las suma de dos funciones exponenciales basta sumar la derivada de cada una de las funciones:

$$\frac{d\,(a\,x^{n}+bx^{m})}{dx} = \frac{d\,(a\,x^{n})}{dx} + \frac{d\,(b\,x^{m})}{dx} = n\,a\,x^{n-1} + m\,b\,x^{m-1}$$

Para el **producto de funciones** la regla de derivación es también muy simple y fácil de demostrar.

$$\frac{d(f(x)\times g(x))}{dx} = \frac{d\,f(x)}{dx}\times\; g(x) + f(x)\;\times\frac{d\,g(x)}{dx}$$

escrito en breve:

$$(f(x).g(x))' = f'(x)\,.\,g(x) + f(x).\,g'(x)$$

Podemos por tanto derivar un producto de polinomios, por ejemplo:

$$\frac{d\,(x^{2}+1)\,(x^{3}-1)}{dx} = 2x\,(x^{3}-1) + (x^{2}+1)\,3x^{2}$$

Otra propiedad de las derivadas es la **regla de la cadena** que se aplica para el caso de que una función este anidada dentro de otra, es decir y= f (g(x)).

La regla de la cadena establece que:

$$\frac{d\,f(g(x))}{dx} = f'\big(g(x)\big)\,.\,g'\,(x)$$

Por ejemplo: $y= (x^2+1)^{1/2}$ donde en la función $y= x^{1/2}$, la x se ha sustituido por *(x2+1)*.

En este caso la derivada será:

$$y' = \tfrac{1}{2}\,(x^{2}+1)^{-1/2}\,.\,2x$$

Si aplicamos la regla de la cadena a $y = f(x)^{-1}$ obtenemos:

$$y' = -1\,f(x)^{-2}\,.\,f'(x) = -\,\frac{f\,'(x)}{f\;(x)^{2}}$$

Por tanto podemos obtener **la regla de la división** aplicando la regla del producto, al caso de $y= g(x)\,.\,f(x)^{-1}$ y resulta:

$$y' = \left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \frac{g'(x)\,f(x) - g(x)\,f'(x)}{f(x)^{2}}$$

La practica de la derivación de funciones.

Antes de entrar en la derivación de funciones mas complejas, conviene ejercitarse ahora en la derivación de funciones compuestas de funciones exponenciales y en funciones racionales, que son las que se expresan como cociente de polinomios.

Es indispensable dominar la mecánica de la derivación de funciones y esa practica solo se adquiere mediante la repetición. Además la habilidad para obtener derivadas es una base indispensable para dominar la operación inversa, es decir las integrales.

4 Las series infinitas

4.1 Los desarrollos de funciones en series de potencias

Un desarrollo en serie de potencias es la aproximación a una función mediante una suma de potencias enteras de x, llamados términos de la serie.

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

El desarrollo en serie de una función puede tener un número finito de términos pero en general para funciones no algebraicas nos vamos a encontrar con series infinitas.

Representamos una serie con un símbolo que llamamos sumatorio Σ y un termino de la serie que llamamos termino general. La serie anterior queda como:

$$y = f(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n$$

siendo n es un número entero positivo y esta expresión se lee, suma de a_n x^n , para n de 0 a ∞.

Series de potencias

Un desarrollo en serie de potencias de x, tal como la hemos descrito es una función de una variable, en este caso la x, ya que para cada valor de x obtenemos un valor de y tal como hemos exigido en la definición que hemos hecho para las funciones.

El termino general de una serie "contiene" implícita la regla para expandir la serie en sus sucesivos elementos. Los términos de una serie infinita sin esa regla que le da coherencia podrían adoptar valores arbitrarios y por lo tanto carecería de sentido y de utilidad. Dicho de otro modo, toda serie se autodefine de manera que conociendo n-1 términos podemos deducir el termino n que le sigue.

Series convergentes y divergentes

Para cada valor de x la función se convierte en una serie numérica. El valor de la función en ese punto es igual a la suma de los infinitos términos de la serie en la que se desarrolla. Lo mas lógico es pensar que esta suma de infinitos términos nos dará un resultado infinito. Pero las

series que nos interesan son precisamente las que suman un valor finito que resulte igual al valor de la función en ese punto.
Para cada serie podemos considerar la suma de sus n primeros términos, para un valor de x dado, que llamaremos S_n . Si existe un limite para S_n , cuando n tiende a infinito, a ese limite le llamamos suma de la serie.
Las series para los que existe un limite finito de su suma se dice que convergen hacia ese valor y en caso contrario se dice que son divergentes.
Una serie polinómica puede ser convergente para todos los valores de *x* o solo para un intervalo. El intervalo de convergencia esta siempre centrado en 0 y es simétrico para los valores de x, es decir se define como $|x| < r$. Este intervalo r en el que la serie converge se llama radio de convergencia de la serie y puede ser abierto o cerrado según incluya o no alguno de los valores, $x = r$ y $x = -r$.
Para que la serie converja debe de cumplir varias condiciones.
La primera condición es que el termino general sea cada vez mas pequeño, es decir se aproxime a 0 al aumentar n.

$$\lim_{n\to\infty} a_n \; x^n = 0$$

Esta condición es necesaria ya que si al aumentar n el termino n crece es evidente que la serie en ese punto se hace infinita. Esta condición no es sin embargo suficiente para garantizar que la serie no se hace infinita en ese punto.
Debemos hacer una comprobación adicional para asegurarnos de su convergencia. Existen diferentes maneras de hacerlo, una de ellas es que el cociente del valor absoluto de los coeficientes de dos términos consecutivos sea menor que 1.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

Cuando el limite es 1 no podemos asegurar la convergencia de la serie.
El inverso de este número es el radio de convergencia.

Convergencia de series

4.2 ¿Que utilidad tiene desarrollar una función en serie de potencias?

Si conseguimos obtener los coeficientes a_n , para que la serie nos ofrezca una aproximación de la función original, podemos obtener ventajas muy importantes sustituyendo la función por su desarrollo en serie.

La primera utilidad es calcular para cualquier valor de x el valor de la función en ese punto. Estos valores serán mas próximos al de la función en ese punto a medida que utilicemos mas términos de la serie. Esta utilidad es de aplicación para la función logarítmica para las que hemos creado tablas en las que evidentemente nunca estarán todos los números y para las funciones trigonométricas, conceptualmente bien definidas desde antiguo, pero para las que también eran necesarias tablas. Las primeras tablas trigonométricas se calcularon en la antigua Grecia por Ptolomeo.

La segunda utilidad, muy importante, es derivar o integrar una función derivando o integrando término a término su desarrollo. Así una función difícil de manejar puede derivarse e integrarse fácilmente aplicando las fórmulas elementales para las funciones exponenciales. (La derivada de una suma de funciones es la suma de sus derivadas, como hemos visto en 3.4)

4.3 Los primeros desarrollos de funciones en serie de potencias

Nos planteamos el problema de obtener los coeficientes de un desarrollo en serie que nos aproximen una función dada.

Se han desarrollado varias maneras de obtener los coeficientes adecuados. La primera de todas, la mas elemental, es la que se llama "división larga" y se aplico por Mercador para desarrollar $\frac{1}{1+x}$. Mas tarde Gregory desarrolla $\frac{1}{1+x^2}$.

El objetivo de ambos, al calcular el desarrollo en serie, era obtener integrando en el primer caso, el desarrollo de ln(1+x) y en el segundo, como veremos mas tarde al tratar de las funciones trigonométricas, obtener el desarrollo de arco tangente.

División larga de 1 por 1+x

Podemos ver, moviendo el deslizador, como vamos ejecutando la división larga de 1 entre 1+x.

Del mismo modo podemos obtener la división de 1 entre 1+x , empezando por x^{-1} , que multiplicado por 1+x nos da $1+x^{-1}$. en este caso el siguiente termino es $-x^{-2}$, y la serie completa resultaría ser $x^{-1}-x^{-2}+x^{-3}-x^{-4}$ + ... que también es un desarrollo en serie valido para 1/1+x.

Del mismo modo podemos abordar la división larga de $1/1+x^2$ con los resultados de $1-x^2+x^4-x^6+x^8$ - ... o alternativamente $x^{-2}-x^{-4}+x^{-6}$ - ...

Desarrollo en serie de ln x+1

No mover los deslizadores k_a, k_b, k_c de los valores iniciales 1,1,0.

La función 1/x toma valor infinito en 0 y nos es imposible desarrollarla en este punto.

Mercator trabaja con la serie 1/1+x, como equivalente a 1/x, sustituyendo x por x+1 es decir desplazando la función de manera que para x=0 tome el valor 1.

Hacemos clic en "Mostrar hipérbola".

La función y=1/1+x es una hipérbola equilátera de asíntotas el eje x y la recta x=-1.

El cambio de variable permite dividir el numerador 1 entre el denominador 1+x , operando como lo haríamos dividiendo dos números.

Obteniendo así la serie $1/1+x= 1-x+x^2-x^3+x^4+$.....

Hacer clic en "desarrollo en serie".

En la hoja de trabajo podemos observar que para x=1 la serie toma alternativamente valor 1 o' 0, según sea el ultimo termino del desarrollo de exponente par o impar. El valor de la función en ese punto es 1/1+1, ½.

Vemos pues que la serie no es convergente para x=1 y su entorno de convergencia queda limitado por $-1< x < 1$. Comprobamos lo que hemos dicho de la simetría del entorno de convergencia respecto de 0. La serie no pueden superar x=1 y para x=-1 la función se hace infinita y no admite desarrollo.

Hacer clic en "serie integrada"

Obtenido el desarrollo de 1/1+x, Mercator lo integra termino a termino y obtiene el desarrollo de Log (1+x),

$$Log\ (x+1) = x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots$$

En la tabla de derivadas del capitulo 4.3 hemos definido que la derivada de $\log_a x = k_a x^{-1}$*, sustituyendo la variable x por x+1 tenemos* $\log_a (x+1) = k_a (x+1)^{-1}$*. Para las dos series obtenidas por Mercator vemos que* $k_a=1$*.*

Para obtener el valor de a, es decir la base de la función logarítmica obtenida, hacemos clic en "mostrar función logarítmica" y ajustamos su valor con el deslizador a. El valor de a es aproximadamente 2,72.

Movimiento del deslizador k_a

Moviendo k_a *, desarrollamos la función* $y=k_a/1+x$ *y obtenemos una serie integrada de valor:*

$$Log\ (x+1) = k_a\ [x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots]$$

Para obtener el valor de la base de la función logarítmica debemos ajustar el deslizador a. Por ejemplo para $K_a = 1{,}4$ *, la función logarítmica integral será:*

$$Log_2\ (1+x) = 1{,}4\ [x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots]$$

Movimiento de k_b

Si movemos k_b *el efecto obtenido es una traslación de la hipérbola según el eje x.*

La ecuación de la hipérbola pasa a ser $y = k_a / k_b + x$*.*

Podemos observar dos consecuencias:

1- La ampliación del entorno de convergencia a $-k_b < x < k_b$*.*

2- La función logarítmica obtenida por el desarrollo en serie, no varia de base, pero se traslada un valor que podemos ajustar con k_c*. En el caso de* $k_a = 1{,}4$ *y* $k_b = 2$

$$Log_2\ (2+x) = 1{,}4\ [x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots] + 1$$

Desarrollo en serie de $1/1+x^2$

$1/1+x^2$ por división larga nos da:

$$y = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots + (-1)^n x^{2n}$$

En la representación grafica de la función y la serie, podemos observar que la serie solo se ajusta a la función en un radio de $|x| \leq 1$*.*

Que obstáculo impide que deje de converger para $|x|\geq 1$.
No hay respuesta (de momento…) a este comportamiento como la teníamos en el caso anterior para 1/1+x donde la función se hacia infinita en x=-1 .
Si analizamos el valor de la función y de la serie para x=1 vemos, como en el caso de 1/1+x, que para la función obtenemos ½, y haciendo x=1 en la serie obtenemos:

$$y = 1-1+1-1+1- \ldots$$

que toma valor +1 o -1 según el número de términos que se consideren. En la representación grafica se observa muy bien esta alternancia comparando las graficas de la serie con número par e impar de términos. Además se puede ver en la grafica como para valores mayores a 1 la serie tiende alternativamente a mas menos infinito.
Newton propuso para valores "grandes" de x la serie

$$y = x^{-2}-x^{-4}+x^{-6}-x^{-8}+ \ldots$$

que se ajusta a la serie para valores fuera del entorno $|x| \leq 1$.
Podemos obtener la integral de la función $1/x^2+1$, mediante el método grafico que hemos empleado para ilustrar el significado de la integral definida. La función integral que dibujamos es una de las funciones trigonométricas básicas que estudiaremos mas adelante. Ahora lo que nos interesa es ver como la integración termino a termino de la serie para valores "pequeños" y de la serie para valores "grandes" se ajustan a la integral dibujada para $1/1+x^2$.
La integral de la serie para valores "grandes" requiere de una constante de integración diferente para los valores positivos (π/2) y negativos (- π/2).

Una de las conclusiones que podemos obtener, de los desarrollos en serie que hemos visto, es que la serie que resulta de la integración término a término y la que resulta de su derivación término a término tienen el mismo radio de convergencia que la serie de partida.

4.4 El teorema del binomio

Desarrollar $(a+x)^n$ es un problema sencillo de álgebra si n es un número entero. Por ejemplo para n=2 tenemos el desarrollo que todos conocemos: $a^2+ x^2 + 2ax$.
Para obtener el desarrollo de $(a+x)^n$ siendo n un número entero positivo, basta repetir la operación y agrupar los términos de la misma potencia de

x. Los coeficientes se ordenan según la pirámide de Pascal, una regla mnemotécnica que nos permite obtener fácilmente los coeficientes de cada termino de x^n.
La pirámide de pascal se obtiene añadiendo filas, cuyo primer y ultimo elemento son un 1 y los intermedios se obtienen sumando los dos elementos mas próximos de la fila anterior.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

La fila n esta formada por la sucesión:

$1,\ n,\ \frac{n\times(n-1)}{1\times2},\ \frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{1\times2\times3},\ \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)}{1\times2\times3\times4},\ \ldots\ldots$

Los términos *n*(n-1)*(n-2)….*(n-(m-1))/m+1!,* se escriben como $\binom{n}{m}$ y se leen, “n sobre m”.

$\binom{n}{0} = 1$

$\binom{n}{1} = n$

$\binom{n}{2} = \frac{n\times(n-1)}{1\times2}$

$\binom{n}{3} = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{1\times2\times3}$

….

$\binom{n}{n} =1$

Si n es negativo o una fracción las reglas del álgebra no nos ayudan a resolver el binomio. Newton llega a la conclusión que el desarrollo del binomio es valido para exponentes fraccionarios y negativos. No hace ninguna demostración, solo propone su validez general basándose en que su resultado es correcto en los casos en lo que lo emplea.

$$(a+x)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} x + \binom{n}{2} a^{n-2} x^2 + \ldots + \binom{n}{n} x^n$$

Con exponentes negativos o fraccionarios el resultado del desarrollo se expande en un número infinito de términos. Este "pequeño detalle" no preocupa a Newton que opera con ellas como si se tratara de un polinomio finito y aplica las reglas aritméticas habituales para suma, resta, multiplicación,… y obtiene una manera sencilla de calcular derivadas e integrales de muchas funciones. Se trata de desarrollar la función en una serie infinita para luego derivar o integrar termino a termino la serie obtenida.

Por ejemplo, la ecuación de una circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, se convierte en $y = (r^2 - x^2)^{1/2}$ que podemos desarrollar por el binomio ($a=r^2$, $n=\frac{1}{2}$) y sustituir en el desarrollo x por $-x$. También la función $y = \frac{1}{1+x}$, que representa una hipérbola equilátera, se puede escribir $y = (1+x)^{-1}$ y desarrollar por el binomio(a=1, n=-1) .

Desarrollos en serie por teorema del binomio

Podemos calcular los diez primeros términos del desarrollo del binomio $(a+x)^n$ *para cualquier valor de a y n.*

Para coeficientes n enteros, la serie obtenida es evidentemente finita, pero para exponentes fraccionarios y negativos se hace infinita, porque el numerador de los coeficientes nunca se anula.

Activando las casillas correspondientes tenemos los desarrollos para $(a+x^2)^n$ *y* $(a-x^2)^n$ *que se obtienen sustituyendo x por* x^2 *0* $-x^2$ *en el desarrollo anterior*

4.5 Cálculo de pi por Newton

Cálculo de pi por Newton

Newton aplica el teorema del binomio a la ecuación de la circunferencia de radio ½ con centro en x=1/2 para calcular una aproximación de π. Si el área completa de una circunferencia es π R^2 y el radio en este caso es 1/2 , Newton calcula en área del sector circular con ángulo central de 60º, cuya área es 1/6 de la del circulo y por tanto , Área del sector circular de 60º = π $R^2/6$ = π/24.

La ecuación de la circunferencia

$$(x-1/2)^2+ y^2 =1/4$$

que despejando y resulta

$$y= x^{1/2} (1-x)^{1/2}$$

*El área del sector es 1/3*1/2* (π/4)=* ***π/24***

Este área se compone del área del triángulo ABC y de la integral de la circunferencia desde 0 a ¼ ya que ¼ es la x del punto B, al ser el ángulo central del sector 60º.

(1) Área del triángulo ABC = $\frac{1}{2}.\frac{1}{4}\ .(\frac{1}{4}\ .\left(1-\frac{1}{4}\right))^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}.(\frac{3}{16})^{\frac{1}{2}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{32}$

Para integrar la función , desarrollamos por el binomio $(1-x)^{1/2}$*:*

$y = 1- 0,5\ x - 0,125\ x^2- 0,0625x^3 - 0,0390625\ x^4 - 0,02734375\ x^5 - 0,0205078125\ x^6 - ....$

multiplicamos la serie por x ½, para obtener el desarrollo de $y= x^{1/2} (1-x)^{1/2}$*, que es la ecuación de la circunferencia.*

$y = x^{1/2}- 0,5x^{1,5}- 0,125\ x^{2,5}- 0,0625\ x^{3,5}- 0,039062\ 5\ x^{4,5} -0,02734375\ x^{5,5}- 0,0205078125\ x^{6,5} - ....$

e integramos termino a termino:

$y= 2/3\ x^{3/2} - 2/5\ (0,5)\ x^{5/2}\ - 2/7\ (0,125)\ x^{7/2} - 2/9(0,0625)\ x^{9/2} - 2/11(0,03906625)\ x^{11/2} - .....$

Para los 5 primeros términos, para un valor de x=1/4 obtenemos

(2) y = ***0,07677377208***

Sustituyendo los valores obtenidos en (1) y (2) para obtener la expresión del área del sector circular cuyo valor sabemos es π/24 :

$$\pi/24 = 3^{1/2}/32 + 0{,}07677377208$$

Despejando π

$$\boldsymbol{\pi = 24\,(0{,}07677377208 + 3^{1/2}/32) = 3{,}1416074}$$

5 La definición analítica de las funciones trigonométricas

5.1 Raíces históricas de las funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas tienen su origen en la geometría clásica. Los griegos, para el estudio de la circunferencia y de los polígonos inscritos en ella, definen la cuerda y la flecha que corresponden a un determinado arco de circunferencia. La medida del arco es la del ángulo central de circunferencia que lo abarca .

Cuerdas y flechas también aparecen al estudiar las proporciones del triángulo, lo que hoy llamamos trigonometría. Por razones practicas en trigonometría en lugar de trabajar con la cuerda completa se utiliza la "semicuerda del ángulo doble" que es lo que hoy llamamos seno. ¿De donde viene este nombre? pues parece, que viene de las traducciones latinas de los textos griegos. La cuerda de un círculo, se denomina en latín "*inscripta corda*" o simplemente "*inscripta*". La mitad de dicha cuerda se llama "*semis inscríptae*". Su abreviatura era "*s. ins*." , que terminó simplificada como *sins*. Para asemejarla a una palabra conocida del latín se la denominó *sinus* y de ahí nuestro seno.

La relación entre la cuerda de un arco y el seno de un ángulo es pues muy sencilla. El seno es la semicuerda del ángulo doble.

$$\text{seno } \alpha = (\text{Cuerda } 2\alpha)/2$$

Podemos ver con ayuda de un circulo que el seno de uno de los ángulos no rectos de un triángulo rectángulo es la relación entre el lado opuesto al ángulo y la hipotenusa del triángulo. El coseno es la proporción entre el lado contiguo y la hipotenusa. Se llama tangente del ángulo al cociente del lado opuesto entre el lado contiguo. Para el circulo de radio unidad, al ser la hipotenusa igual al radio y por tanto = 1, seno y coseno coinciden con las coordenadas del punto sobre el círculo que define el semi-arco.

Las funciones trigonométricas se relacionan entre sí de manera que pueden obtenerse todas ellas a partir del seno o del coseno. Las relaciones entre las funciones trigonométricas se llaman "identidades trigonométricas". La mas conocida es la que relaciona seno y coseno, que resulta evidente aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que hemos construido sobre el círculo unidad.

$$sen^2 x + cos^2 x = 1$$

También es fácil deducir que la tangente de un ángulo es igual al cociente entre su seno y su coseno.

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

En todos los casos, como cuerda y flecha de los arcos de un círculo o como proporciones entre los lados de un triángulo, estas funciones están definidas geométricamente en función de la medida de un ángulo que, se mide en grados y, varia de 0º a 360º. Dicho de otra manera, para obtener los valores de las funciones trigonométricas en la geometría clásica, no tenemos mas remedio que medir sobre las figuras geométricas y calcular tablas con sus valores para diferentes ángulos. Otra manera de calcular tablas es a partir de valores conocidos que corresponden a ángulos particulares y a partir de estos valores ir interpolando el resto de la tabla, basándose en las fórmulas trigonométricas ya conocidas por los griegos, para los valores de seno y coseno de la suma de dos ángulos.

$$\text{sen } (a+b) = \text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a$$

$$\cos (a+b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b$$

Que se convierten para el ángulo doble, haciendo a = b, en:

$$\text{sen } 2a = 2 (\text{sen } a \ \cos a)$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$$

Demostración grafica de seno y coseno de la suma de ángulos

Partiendo de los valores conocidos para determinados casos particulares, por ejemplo seno de 45º =$\sqrt{2}/2$, podemos obtener el seno de 22,5º. Por diferencias entre el de 45º y el de 30º podemos obtener el de 15º y con la fórmula del seno del ángulo doble el seno de 7,5º. Procediendo de esta manera Ptolomeo es el primero en tabular las cuerdas de los arcos de circunferencia, lo que a nuestros efectos es una tabla de valores de sen x.
Desde el punto de vista de la definición que hemos dado para una función, es evidente que disponemos de una regla bien definida para obtener los valores de la variable independiente para cada valor del ángulo, pero esta regla no la podemos expresar mediante operaciones algebraicas básicas y además solo esta definida para valores de la variable de 0 a 360.
Para incluir estas funciones en el cálculo junto con las funciones ordinarias es necesario redefinirlas como funciones de variable real (definidas para todo valor de x desde - ∞ a + ∞ , no solo de 0 a 360) y

dotarlas de una expresión analítica que nos permita manejarlas como funciones ordinarias y componerlas con otras, es decir, incorporarlas plenamente en el proceso de "álgebraización" de la geometría. El camino escogido para lograr este objetivo puede parecer muy enrevesado pero era el disponible en ese momento.

5.2 Definición de las funciones trigonométricas en radianes

El primer paso para conseguir nuestro objetivo es redefinir las funciones seno y coseno para que en lugar de expresarse en función de un ángulo, varíen en función de la longitud del arco de circunferencia abarcado. Si lo conseguimos para la función seno y coseno hemos visto que lo conseguiremos para el resto de las funciones.

Si sobre la circunferencia unidad escogemos un punto P, podemos decir que sus coordenadas son:

$$P\ (x_p = \cos x\ ,\ y_p = \text{sen}\ x)$$

El arco de circunferencia del punto P desde el punto (1,0), lo llamaremos "arco P". La longitud del arco para la circunferencia completa es 2 π. A la unidad de longitud que divide la circunferencia en 2 π segmentos la llamamos radian.

El "arco P" lo medimos en radianes y obtenemos la función coseno(arco P)= x_p y la función seno(arco P) = y_p. Quedan definidas las funciones seno y coseno entre 0 y 2π , es decir para la primera vuelta de la circunferencia. Podemos definir para los valores de longitud del arco superiores a 2π ,

$$sen\ x = sen\ x + 2k\pi$$

$$cos\ x = cos\ x + 2k\pi$$

Siendo k un número entero positivo. De esta manera las funciones seno y coseno se convierten en funciones periódicas, validas para cualquier valor de x, que es una longitud y puede por tanto adoptar cualquier valor.

5.3 Derivación de las funciones seno y coseno

Para obtener la derivada de la función seno aplicamos la definición de derivada y obtenemos :

$$sen\ 'x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\ x + \Delta x - sen\ x}{\Delta x}$$

Aplicamos ahora, para sen $x+\Delta x$ la fórmula del seno de la suma de ángulos que hemos visto en el capitula anterior,

$$sen\ a + b = sen\ a\ cos\ b + sen\ b \cos a,$$

resulta:

$$sen\ x + \Delta x = sen\ x\ cos\ \Delta x + sen\ \Delta x \cos x$$

Sustituyendo en la fórmula de la derivada

$$sen'\,x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\ x\ cos\ \Delta x + sen\ \Delta x \cos x - sen\ x}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\ x\ cos\ \Delta x - sen\ x}{\Delta x} + \frac{cos\ x\ sen\ \Delta x}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} sen\ x \frac{(cos\ \Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \cos x \frac{sen\ \Delta x}{\Delta x}$$

El termino $\frac{(cos\ \Delta x - 1)}{\Delta x}$ se hace 0 al tender Δx a 0, ya que cos 0 = 1, anulándose el numerador. El termino $\frac{sen\ \Delta x}{\Delta x}$ se aproxima a 1, al tender Δx a 0. En el limite por tanto la expresión anterior se reduce a:

$$sen'\,x = cos\ x$$

Para la derivada de coseno procedemos del mismo modo:

$$\cos'\,x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cos\ x + \Delta x - cos\ x}{\Delta x}$$

Utilizando la fórmula del coseno de la suma de ángulos,

$$cos\ x + \Delta x = cos\ x\ cos\ \Delta x - sen\ x\ sen\ \Delta x\ ,$$

sustituyendo en el limite anterior tenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{cos\ x\ cos\ \Delta x - sen\ x\ sen\ \Delta x - cos\ x}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{cos\ x\ cos\ \Delta x - \cos x}{\Delta x} - \frac{sen\ x\ sen\ \Delta x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos x \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}$$

Como hemos visto antes la primera fracción tiende a 0 y la segunda a 1, con lo que el resultado es:

Cos' x = -sen x

Comprobación grafica de la derivada de seno y coseno

5.4 Newton obtiene los desarrollos en serie de seno y coseno

Newton calcula los desarrollos en serie de seno y coseno siguiendo un procedimiento que es un poco enrevesado, pero muy ilustrativo de su dominio de las series infinitas.

Nota: Para el seguimiento del libro este capitulo y los siguientes capítulos no son imprescindibles. Se puede saltar a 5.8 donde calculamos de forma mas directa los desarrollos en serie de seno y coseno.

La definición de las funciones inversas

Trabajamos con la circunferencia de radio unidad con centro en el origen de coordenadas. El diámetro de la circunferencia define un segmento del eje x entre [-1 y 1]. Puesto que tanto la función seno como la función coseno varían entre estos valores, para cada x del diámetro se corresponde un arco1 de circunferencia para el que seno (arco1)= x Entonces arco1 es el arco cuyo seno es x, la función que llamamos arcosen.

arcosen (x)= arco1

Del mismo modo para el coseno, existe un arco2 para el que coseno(arco2) = x. Entonces arco2 es el arco cuyo coseno es x, la función que llamamos arcocos.

arcocos (x) = arco2

Definición de arco seno

Definición de arco coseno

Cálculo del arco de circunferencia

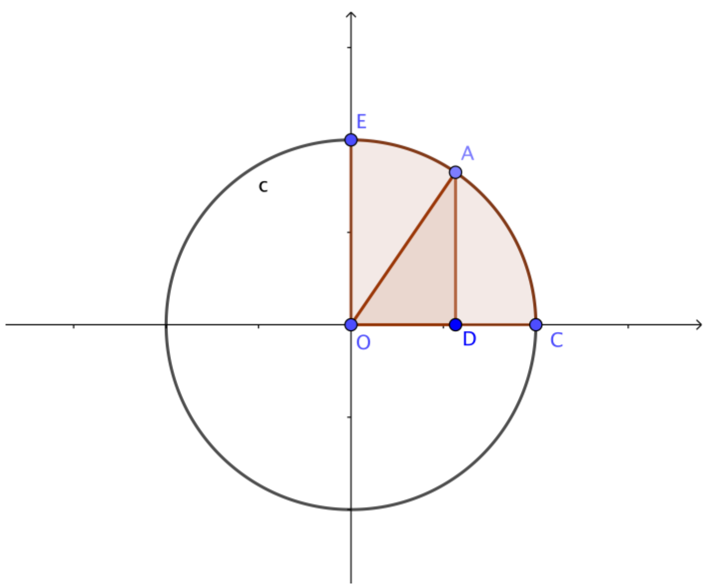
Para obtener la longitud de un arco de circunferencia en radianes solo tenemos que calcular el área del sector circular que lo abarca, puesto que 2 π radianes se corresponden al área del circulo unidad que es π.

Inversión de las series obtenidas

Tal como las hemos definido, las funciones arcosen y arcocos son las funciones inversas de seno y coseno. Hemos visto anteriormente la función exponencial y la función logarítmica como funciones inversas y hemos visto como sus graficas son simétricas respecto de la recta x = y.
En conclusión, una vez que consigamos obtener el desarrollo en serie de estas funciones nos queda invertir la series para obtener los desarrollos que buscamos de seno y coseno.

5.5 Desarrollo en serie de arco coseno

Siguiendo el procedimiento establecido, para calcular la función arco coseno tenemos que calcular el arco abarcado por el punto A ($\overset{\frown}{CA}$) en función de la x, siendo x el coseno del arco CA, que vemos en el grafico coincide con OD.



Sabemos que el arco equivale al doble el área del sector circular OCA definido sobre el circulo de radio 1. El área de este sector circular se puede obtener como suma del triángulo (ODA) y del área bajo el arco de circunferencia (ADC), que obtenemos integrando la circunferencia de x hasta 1.

Area (x_A= cos x) = *½ x* $(1-x^2)^{1/2}$+ integral de *x* a *1* $(1-r^2)^{1/2}dr$

Una vez tenemos claro la igualdad que tenemos que calcular, solo nos queda ir paso a paso obteniendo cada uno de los términos de la igualdad desarrollando por el binomio $(1-x^2)^{1/2}$ y efectuando las operaciones.

Desarrollo en serie de arco coseno

Desarrollando por el binomio la ecuación de la circunferencia $(1-x^2)^{½}$ y obtenemos:

y= 1- 1/2 x^2 -1/8 x^4 - 3/48 x^6 - 15/384 x^8 -105/3840 x^{10} - 945/46080 x^{12} - 135135/10321920 x^{14} - ……

Integrando termino a termino obtenemos el área del circulo entre 0 y x. Para obtener el área entre x y 1, restamos la serie obtenida del valor del área entre 0 y 1 que es π/4

(1) y = π/4 – (x - 1/6 x^3 -1/40 x^5 - 3/336 x^7 - 15/3.456 x^9 -105/42.240 x^{11} - 945/599.040 x^{13} - 135135/154.828.800 x^{15} - ……)

Multiplicando la misma serie por x y dividiendo por 2, obtenemos el área del triángulo:

(2)) y=1/2 x- 1/4 x^3 -1/16 x^5 - 3/96 x^7 - 15/768 x^9 -105/7680 x^{11} - 945/92.160 x^{13} - 135135/20.643.840 x^{15} - ……

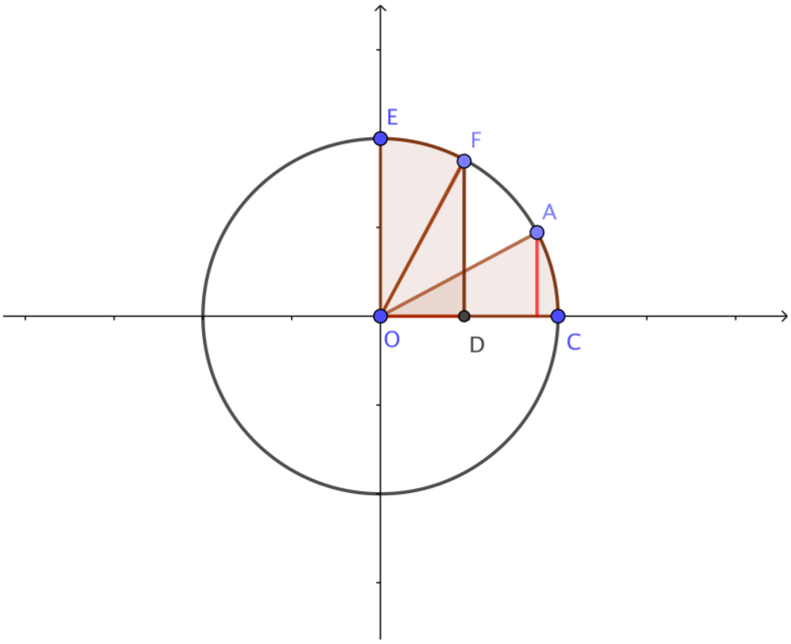
Para obtener el desarrollo de la función arccos, sumamos (1) y (2) y multiplicamos por 2 para pasar del área calculada a la longitud del arco.

y/2 = π/4 - 1/2 x + (1/6-1/4) x^3 +(1/40-1/16) x^5 + (3/336-3/96) x^7 + (15/3.456-17/768) x^9 +(105/42.240- 105/7680) x^{11} + (945/599.040- 945/92.168) x^{13} + (135135/154.828.800- 135135/20.643.840) x^{15}

Simplificando:

y = π/2 - x-1/6 x^3 -3/40 x^5 -1/22,4 x^7-1/32,91 x^9- 1/44,7 x^{11} -1/57,63 x^{13} - 1/71,6 x^{15}

5.6 Desarrollo en serie de arco seno



Del mismo modo para el coseno, tenemos que calcular el arco abarcado por el punto A (CA), en función de x, siendo x el seno del arco CA. El seno de CA es igual, por las propiedades del ángulo complementario a OD. El sector circular OCA es igual al sector OFE, que podemos calcular por la integral del circulo de 0 a *x* restando el área del triángulo ODF.

$$\text{Area } (y_A = \text{sen } x) = \int_0^x (1-r^2)^{\frac{1}{2}}\, dr - \frac{x}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}½$$

Repetimos el cálculo de forma similar a como hemos hecho con arco coseno.

Desarrollo en serie de arco seno

Desarrollando por el binomio $(1-x^2)^{½}$ y obtenemos:

y= 1- 1/2 x^2 -1/8 x^4 - 3/48 x^6 - 15/384 x^8 -105/3840 x^{10} - 945/46080 x^{12} - 135135/10.321.920 x^{14} - ......

Integrando termino a termino obtenemos el área del circulo entre 0 y x

(1) y = x - 1/6 x^3 -1/40 x^5 - 3/336 x^7 - 15/3.456 x^9 -105/42.240 x^{11} - 945/599.040 x^{13} - 135135/154.828.800 x^{15} - ......

Multiplicando la misma serie por x y dividiendo por 2, obtenemos el área del triángulo:

(2) y=1/2 x- 1/4 x^3 -1/16 x^5 - 3/96 x^7 - 15/768 x^9 -105/7680 x^{11} - 945/92.160 x^{13} - 135135/20.643.840 x^{15} - ......

Para obtener el desarrollo de la función arcsen, restamos de (2) de (1) y multiplicamos por 2.

y = x – 2(1/6-1/4)x3 – 2(1/40- 1/16) x5 – 2(3/336- 3/96) x7-

Simplificando,

$y = x+1/6\ x^3 +3/40\ x^5 +1/22{,}4\ x^7+1/32{,}91\ x^9+ 1/44{,}7\ x^{11} +1/57{,}63\ x^{13} + 1/71{,}6\ x^{15}+$ ……..$(2n)!\ x^{2n+1}/4^{n}(n!)^2\ (2n+1)$

5.7 La inversión de las series obtenidas

Obtenidos los desarrollos en serie de arcosen y arcocos nos queda invertir estas series para obtener sen x y cos x.

Invertir una serie es teóricamente sencillo, pero algebraicamente es un trabajo muy engorroso que implica una capacidad de cálculo muy grande. Nosotros lo resolvemos en la siguiente hoja de trabajo con la ayuda de Exel. Newton lo hizo con lápiz y papel!

Inversión de series

Las funciones seno y coseno son la inversa de las funciones obtenidas. Es decir, tenemos una serie:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots.$$

y queremos obtener la función inversa, es decir

$$x=A_0+A_1y+A_2y^2+A_3y^3$$

La idea es simple y geométricamente su interpretación es sencilla, se trata de obtener una función simétrica respecto la recta x=y.

Sustituimos en (1) las x por la expresión (2) y obtenemos:

$$y = a_0+a_1\ (A_0+A_1y+A_2y^2+A_3y^3+\ldots.)+a_2\ (A_0+A_1y+A_2y^2+A_3y^{32}+a_3x^3+\ldots.)^2+a_3\ (A_0+A_1y+A_2y^2+A_3y^3+\ldots)^3+\ldots..$$

Desarrollamos la expresión e igualamos los coeficientes obtenidos para cada potencia de y con el coeficiente correspondiente de (2).

Parece sencillo pero es un trabajo muy engorroso. No lo encontraremos en nuestros libros de texto. Increíblemente Newton y Leibniz lo afrontaron y nos dieron el resultado correcto para muchas series.

Hemos desarrollado los cálculos con la ayuda de una hoja de cálculo para los primeros diez términos.

Podéis ver el resultado de la inversión de las series obtenidas en el párrafo anterior, para obtener sen x, cos x.

Sen x

Invirtiendo arco seno obtenemos:

y = x-0,16666 x^3+0,0083333 x^5-0,000198413 x^7+...

Que se puede poner como:

$$y = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Cos x

Hemos obtenido arco coseno:

y = π/2 - x-1/6 x^3 -3/40 x^5 -1/22,4 x^7-1/32,91 x^9- 1/44,7 x^{11} -1/57,63 x^{13} - 1/71,6 x^{15}

Pasamos *π/2* restando de la *y*, obtenemos la inversión de la serie, sabiendo que la *x* es ahora la inversa de y- *π/2, es decir x- π/2*. Luego, la serie obtenida esta desplazada según el eje *x*, *π/2* :

y = -x + 0,16666 x^3 - 0,0083333 x^5 + 0,000198413 x^7-...

Que se puede poner como:

y = -x + 1/3! x^3 - 1/5! x^5 + 1/7! x^7 - ...+(-1) $^{n+1}$ x^{2n+1}/(2n+1)!

Sustituyendo en el desarrollo, *x* por *x- π/2*, obtenemos haciendo las operaciones:

$$y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Desplazamiento de la serie cos x

Valoración del trabajo de Newton

Newton aplicando el teorema del binomio a la ecuación de la circunferencia ha dado un paso definitivo para la “álgebraizacion” de las funciones trigonométricas.

En la mente de Newton las series infinitas obtenidas para las funciones seno y coseno no deben ser consideradas únicamente como recursos de aproximación, sino que son las funciones que representan. Es una revolución en la trigonometría. “sen x” y “cos x” pasan a ser un símbolo por el que nombramos de forma compacta a la función definida por la serie de infinitos términos.

5.8 Los desarrollos en serie de Taylor

Hemos visto como se obtienen desarrollos en serie por diferentes procedimientos pero no disponemos de un método general para hacerlo.

Mac Laurin se da cuenta de que si escribimos la igualdad entre la función y su desarrollo, $f(x)= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$ podemos calcular los coeficientes derivando la función sucesivamente y, haciendo x=0, obtenemos:

$$f(0) = a_0$$
$$f'(0) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots = a_1$$
$$f''(0) = 2a_2 + 6a_3 x + \ldots = 2a_2$$
$$f'''(0) = 6a_3 + \ldots = 6a_3$$

y por tanto sustituyendo los coeficientes el desarrollo se convierte en:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \frac{f'''(0)}{3} x^3 + \ldots$$

Este desarrollo se conoce como serie de Mac Laurin y nos permite desarrollar en serie una función en el entorno de x=0, siempre que la función sea sucesivamente derivable. Los desarrollos para x=0 se dice que son centrados en 0.

Con un cambio de variable $x = x\text{-}a$ obtenemos el desarrollo centrado en a, que es el que se atribuye a Taylor, publicado en 1715. Para a=0 ambos desarrollos coinciden. También podemos comprobar que los desarrollos obtenidos por la fórmula de Taylor coinciden exactamente con los que habíamos calculado previamente para las funciones trigonométricas partiendo del desarrollo del binomio.

Desarrollo de Taylor de sen x y cos x

Con la casilla de control seleccionamos la función que queremos representar y su desarrollo en serie.

Con el deslizador controlamos el punto en el que se centra el desarrollo.

Para calcular el desarrollo de Taylor derivamos n veces la función seno y coseno obteniendo para seno de x:

f' =cos x, f''= -senx, f'''= -cos x, f''''=sen x volviendo a repetirse la secuencia a partir fe f''''.

Para cos x obtenemos:

f' = -sen x, f''= -cos x, f'''=sen x, f''''= cos x volviendo a repetirse la secuencia a partir fe f''''.

Resulta por tanto que para obtener el desarrollo requerimos los valores de sen x y cos x para el punto en el que se centra el desarrollo.
Cuando las series de Taylor se centran en 0 coinciden exactamente con las calculadas analíticamente en el apartado 6.4 y cada $2k\pi$ vuelven a coincidir por la periodicidad de los valores de la función seno y coseno y solo se diferencian en el desplazamiento. (sustitución de x por $(x-2k\pi)$ lo que desplaza su entorno de convergencia.
Podemos comprobar como los desarrollos de Taylor de seno y coseno aumentan su entorno de convergencia al aumentar el número de términos de la serie y comprobamos por tanto que convergen para todos los valores del eje x.

Resto de Taylor
Si una serie debe comportarse como una función, debemos poder calcular su valor para cada x. El procedimiento mas sencillo de hacerlo es sumar un número de términos suficiente para obtener una aproximación suficientemente buena a la función en ese punto. Este enfoque nos lleva a la necesidad de medir esa proximidad al resultado "exacto", para dar por bueno el resultado o continuar sumando términos.
Si llamamos al desarrollo de Taylor con n términos como $P_{n,a}(x)$, (Polinomio de n términos centrado en a), podemos decir que

$$f(x)= P_{n,a}(x)+ R_{n,a}(x)$$

Es decir que sumando una cierta cantidad al polinomio de n términos obtenemos exactamente el valor de la función en a. A este valor le llamamos "resto".
Intuitivamente podemos entender que el resto tendrá la forma que correspondería al termino n+1 del desarrollo en serie, sustituyendo en la derivada *n+1* de $f(x)$ en *a*, es decir, $f^{n+1'}(a)$, *a* por un valor *t* intermedio que haga que el resto tome el valor que cumple la igualdad anterior.

$$f(x)= P_{n,a}(x)+ f^{n+1'}(t) *(x-a)^{n+1}/n+1!$$

Evidentemente no conocemos cual es el valor de *t*, pero podemos con un poco de ingenio acotar el valor del resto para que se mantenga bajo un determinado valor.
Resto del desarrollo de seno x

Veamos por ejemplo como proceder para el desarrollo de seno *x*.
A partir del termino general de la tabla anterior de desarrollos en serie, el termino general del desarrollo de seno x es,

$$sen^{2n+1'} x \, \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Luego el resto, escogiendo un termino par para que sea positivo, vale:

$$sen^{2n+2'} t \, \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Y sabemos que el valor de la derivada 2n+2 de Seno siempre será ≤ 1, puesto que la función seno y coseno están acotadas entre -1 y 1. Luego

$$| \, sen^{2n+2'} t \, \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \, | \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Dado que $\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$, que simplificadamente es $x^n/n!$, puede hacerse tan pequeño como queramos, si queremos calcular seno x con una aproximación mayor de 10^{-4} por ejemplo, entonces debemos calcular n para que se cumpla

$$\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \leq 10^{-4}$$

esta desigualdad se cumple para n=5, luego
seno x = x – $1/3!\, x^3 + 1/5!\, x^5 - 1/7!\, x^7 + 1/9!\, X^9 - 1/11!\, X^{11}$ +R,
siendo R ≤ 10^{-4}

Resto de Taylor

Existencia del desarrollo en serie de Taylor de una función

Para obtener el desarrollo de Taylor de una función, son necesarias dos condiciones:

- La primera que la función sea continuamente derivable, para ir obteniendo los sucesivos términos de la serie.
- Adicionalmente la serie obtenida debe ser convergente para el punto en que estamos centrando el desarrollo. Como hemos visto al estudiar la convergencia de series, una condición de convergencia necesaria es que su termino general tienda a 0. En este caso como el termino general tiene como numerador la derivada enésima de la función en ese punto dividida por n!, esta condición general de la

convergencia de series en el caso de los desarrollos de Taylor la podemos expresar diciendo que la derivada enésima es inferior a un valor dado o dicho de otro modo podemos acotarla por debajo de un valor determinado. Esta condición no se cumple cuando la derivada se hace infinita, es el caso de la primera derivada cuando la tangente a la función es vertical.

5.9 Desarrollos en serie de las funciones trigonométricas

Vamos a resumir en una tabla los desarrollos en serie de las funciones trigonométricas y obtener también los desarrollos de sus funciones derivadas.

A partir de los desarrollos de seno y coseno que ya conocemos podemos obtener el desarrollo de la tangente, ya que sabemos que:

tang x = sen x/cos x= sen x . 1/cos x

Para obtener arctang x invertimos la serie de tang x , como hemos hecho con arcoseno y arcocoseno para obtener seno y coseno.

Multiplicación y división de series

Con ello completamos la siguiente relación de funciones trigonométricas básicas.

Función	**Desarrollo en el entorno de 0**	**Radio de convergencia**
Sen x	$y = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	Para todo x
Cos x	$y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	Para todo x
Tang x	$y = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots$	(-π/2, π/2)
Arcosen x	$y = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{1}{22{,}4}x^7 + \frac{1}{32{,}91}x^9 + \cdots$	(-1 +1)

Arccos x	$y = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 - \frac{1}{22{,}4}x^7 - \frac{1}{32{,}91}x^9 - \cdots$	(-1 +1)
Arctang x	$y = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \cdots$	(-1 +1)

Listamos junto a cada función trigonométrica su derivada. Obtenemos su desarrollo en serie simplemente derivando término a término los desarrollos de la tabla anterior. Podemos con paciencia comprobar que obtendríamos el mismo resultado calculando su desarrollo directamente. Por ejemplo, obtenemos el cuadrado la serie de cos x:

$$Cos^2\, x = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{45}x^6 + \frac{1}{315}x^8 - \cdots$$

y dividiendo 1 entre $\cos^2 x$ obtenemos a continuación:

$$\frac{1}{\mathrm{Cos}^2 \mathrm{x}} = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{17}{45}x^6 + \frac{62}{315}x^8 + \cdots$$

que resulta ser la derivada de tang x.

Para arcosen y arccosen podemos desarrollar por el binomio la circunferencia unidad $(1-x^2)^{1/2}$ y calcular después $1/(1-x^2)^{1/2}$ con la misma hoja de cálculo que hemos usado anteriormente.
El desarrollo de $1/1+x^2$ ya lo hemos calculado en el apartado 4.2.

Función	**Derivada**	**Desarrollo en el entorno de 0**
Tang x	$\frac{1}{\cos^2 \mathrm{x}}$	$y = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{17}{45}x^6 + \frac{62}{315}x^8 + \cdots$
Arcosen x	$\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$	$y = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{15}{40}x^4 + \frac{7}{22{,}4}x^6 + \frac{9}{32{,}91}x^8 +$

		$\frac{11}{44,7}x^{10} + \frac{13}{57,63}x^{12} + \frac{15}{71,6}x^{14} + \cdots$
Arccos x	$\frac{-1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$	$y = -1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{15}{40}x^4 - \frac{7}{22,4}x^6 - \frac{9}{32,91}x^8 -$ $\frac{11}{44,7}x^{10} - \frac{13}{57,63}x^{12} - \frac{15}{71,6}x^{14} - \cdots$
Arctang x	$\frac{1}{1+x^2}$	$y = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots + (-1)^n x^{2n}$

6 El concepto de número en el siglo XVII

El resultado de la suma de números naturales es siempre otro número natural. Pero si contemplamos la resta, nos encontramos con que el resultado de una resta de números naturales puede no ser otro número natural. Es posible que resulte un número negativo. Aunque parezca extraño muchos matemáticos se opusieron a la extensión de la idea de número para incluir entre ellos a los negativos. El álgebra estaba aun muy vinculada a la geometría y era imposible imaginar longitudes, áreas o volúmenes negativos.

Si incluimos la división de números naturales, nos vemos obligados también a ampliar nuevamente el concepto de número a los que resultan de expresiones fraccionarias. Las fracciones se usaban desde la antigüedad pero se manejaban independientemente de los enteros y naturales al no estar integrados en el mismo sistema de notación decimal. (Se decía por ejemplo 1 y ½ en lugar de 1,5). A partir del momento que se impuso la expresión de los números racionales mediante fracciones decimales y se generalizo el empleo de la coma para separar la parte entera de la decimal, estos números pasaron a formar parte de lo que llamamos números racionales.

Mientras los números enteros representaban magnitudes discontinuas, los racionales forman un continuo, de manera que entre dos números racionales siempre podíamos encontrar otro de valor intermedio. Como este proceso se puede repetir, intuimos que entre dos números racionales hay infinitos números racionales. Si lo expresamos en notación decimal, los números racionales pueden tener un número infinito de decimales, pero el desarrollo decimal de cualquier número racional (expresión de la división de dos números enteros) debe presentar un bloque de números que se repite.

La geometría clásica griega reconocía π como la proporción entre la circunferencia y su diámetro. Los griegos se dieron cuenta de que π era un número “inconmensurable” es decir que no podía expresarse como una fracción de números enteros. π es un número de infinitas decimales sin una secuencia o periodicidad que pueda identificarse.

Históricamente se han ido calculando cada vez mas decimales de con razonamientos geométricos aproximando la longitud de los polígonos regulares inscritos en un circulo. Hemos visto como Newton obtiene pi integrando la ecuación de la circunferencia previamente desarrollada por el teorema del binomio en una serie infinita.

Otro ejemplo sencillo de número irracional es $\sqrt{2}$ que es la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 o $\sqrt{3}$ que es la diagonal del cubo de lado 1.

Los números con un número infinito de decimales con periodo de repetición (racionales), junto con los que teniendo un número infinito de decimales no presentan esta pauta (irracionales) forman el conjunto de los números reales.

Los números reales se representan formando parte de una recta, la recta real. La recta real contiene todos los números reales que a su vez contienen como un caso particular los racionales, los enteros y los naturales. Cada una de las generalizaciones del concepto de número ha respetado las categorías precedentes formando una unidad coherente.

Finalmente podemos decir que cualquier número real, puede obtenerse con un número finito de pasos a partir de números enteros y las cinco operaciones permitidas, (suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces) mediante operaciones algebraicas.

6.1 Los números imaginarios

Si hemos visto que cualquier número real puede expresarse algebraicamente, la afirmación inversa no es cierta. De antiguo son conocidas expresiones algebraicas que no tienen su solución entre los números reales.

Tal como están definidas las operaciones, el cuadrado de un número positivo es otro número positivo. También el cuadrado de un número negativo es un número positivo. En consecuencia al extraer la raíz de un número positivo podemos dar por valido dos resultados, uno positivo y otro negativo, pero no podemos extraer la raíz cuadrada de un número negativo, puesto que no hay ningún número real cuyo cuadrado sea negativo.

Las raíces de números negativos aparecen al intentar resolver expresiones polinómicas de segundo grado del tipo $ax^2+bx+c=0$, cuyas dos soluciones se obtienen por la conocida fórmula $x = -b +/- (b^2-4ac)^{1/2}$

/2 a . En el caso de que el discriminante sea negativo, (Se llama discriminante al termino b^2-4ac que esta afectado por la raíz cuadrada.), no podemos obtener la raíz cuadrada de un número negativo y por lo tanto un número real como solución. Si dibujamos la función, una parábola, podemos observar que el caso del discriminante negativo se corresponde con el hecho de que la curva no corta el eje x y por lo tanto desde un punto de vista gráfico se confirma que no existe en este caso solución.

Raíces de una ecuación cuadrática

Cardano en 1545 propone una fórmula para obtener las raíces de un polinomio de tercer grado y vuelve a toparse con raíces cuadradas de números negativos. Lo que ocurre en este caso, diferente de lo que hemos visto para los polinomios de segundo grado, es que en los casos que no se obtiene solución por aparecer raíces cuadradas de números negativos, (discriminante negativo), el grafico de la función delata raíces reales y la curva corta el eje x en tres puntos.
Cardano intenta resolver ecuaciones cúbicas del tipo:

$$x^3+ax+b=0$$

Para las que obtiene como solución:

$$x = (-\frac{b}{a} + \left(\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} + (-\frac{b}{a} - \left(\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$$

Ecuación de Cardano

El discriminante es en este caso es $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}$.
Representando la función para los diferentes valores de a y b, podemos ver el número de raíces reales de la ecuación según sea el valor del discriminante positivo o negativo.
En el caso de ser positivo, existe una única raíz real y en el caso de ser negativo la curva corta el eje de las x en tres ocasiones, luego hay 3 raíces reales que la fórmula de Cardano no nos muestra.
Por ejemplo, si aplicamos la fórmula al caso de $x^3-15x-4=0$

$$x = (2 + (-121)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} + (2 - (-121)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$$

y queda la raíz cuadrada de un número negativo (-121) que impide obtener una solución. Pero por otra parte es fácil comprobar que existe una raíz de valor x=4.

La solución del enigma se debe a Rafael Bombelli que en 1572 realiza estos cálculos sustituyendo $-121^{1/2}$ por su valor $11(-1)^{1/2}$, resultando:

$$x=(2+11(-1)^{1/2})^{1/3}+(2-11(-1)^{1/2})^{1/3}$$

Para hacer la raíz cubica, buscamos obtener una a y una b que cumplan la igualdad siguiente, para resolver la raíz cubica:

$$(a+b(-1)^{1/2})^{3}=2+11(-1)^{1/2}$$

y

$$(a-b(-1)^{1/2})^{3}=2-11(-1)^{1/2}$$

Al sustituir en la fórmula, el termino $b(-1)^{1/2}$ se anula con $-b(-1)^{1/2}$ y el resultado es 2 a.

Si sabemos que el resultado es 4, entonces a= 2. El único valor posible para b es 1

$$(2+(-1)^{1/2})^{3}=2+11(-1)^{1/2},$$

podemos sustituir la primera raíz cubica del resultado anterior por

$$((2+(-1)^{1/2})^{3})^{1/3}=2+(-1)^{1/2}$$

y del mismo modo la segunda raíz cubica por

$$((2-(-1)^{1/2})^{3})^{1/3}=2-(-1)^{1/2}$$

Resulta

$$x=(2+(-1)^{1/2})+(2-(-1)^{1/2})=4$$

Es decir, el problema es salvable ignorando el significado de $(-1)^{1/2}$ y siguiendo las reglas del álgebra para obtener la solución. De alguna manera, suponiendo que las raíces cuadradas de -1 tienen sentido obtenemos un resultado correcto.

La solución de Bombelli no tiene ningún valor practico, puesto que para llegar a la solución debemos conocer la raíz previamente, lo cual no es precisamente el caso mas general. Su manejo de $\sqrt{-1}$, como un número, al que se le aplican las reglas del álgebra, es el primer paso para su aceptación como número.

A pesar de estos avances, su encaje con los "números" tradicionales no es inmediata. Euler, un siglo y medo después de Bombelli, utiliza la letra i para designar $\sqrt{-1}$, pero hay que esperar hasta el siglo XIX para definir una nueva categoría de números, que se llamaran números complejos ó números imaginarios, y de los que el numero *i* será la "unidad imaginaria".

Para Descartes, "*ciertas expresiones algebraicas no tienen solución mas que en nuestra imaginación*" las raíces negativas de una ecuación algebraica son "*raíces falsas*" y añadía "*ni las raíces verdaderas ni las falsas son siempre reales; a veces son imaginarias*".
Esta idea de Descartes era mayoritaria y generaba gran confusión, como en su día no se aceptaron las raíces negativas de ecuaciones y se habían simplemente ignorado.
Para Leibniz, los números imaginarios "*son una especie de seres anfibios, a medio camino de la existencia y la no existencia que recuerdan a este respecto al Espíritu Santo de la teología cristiana".*

7 Las identidades de Euler

Las aportaciones de Euler al cálculo infinitesimal se publican en tres volúmenes a partir de 1748. *Introductio in analysin infinitorum*, *Institutiones calculi differentialis de 1755 y Institutionum calculi integralis.*

Las identidades que dan titulo a nuestro libro aparecen en el primer volumen de la *introductio*. De los cuatro números que aparecen en ellas, tres , π i y -1 , son conocidos en la época de Euler. Hemos visto hasta aquí la definición de las funciones trigonométricas a partir de series infinitas, pero no hemos visto avances en el análisis de las funciones logarítmica y exponencial. El Número e es aún un perfecto desconocido y su papel central en el análisis matemático aun esta por descubrir.

Este capitulo no es mas que una pequeña muestra de la capacidad de Euler para interpretar y sintetizar la obra de los matemáticos que le precedieron y abrir nuevas vías de futuro

7.1 El descubrimiento del número e

Aplicando la definición de derivada a la función Log_a se obtiene que:

$$y' = \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x}$$

por la definición de logaritmo ponemos:

$$y' = \frac{\log_a\left(\frac{(x + \Delta x)}{x}\right)}{\Delta x}$$

Simplificando,

$$y' = \log_a(1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{1}{\Delta x}}$$

Si elevamos la expresión a x/x

$$y' = (\log_a(1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{1}{\Delta x}})^{\frac{x}{x}}$$

$$y' = \log_a(1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{x\,\Delta x}}$$

$$y' = \frac{1}{x}\log_a(1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}$$

Manejando adecuadamente el resultado obtenido, $(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}$ es equivalente a $(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}})^{\frac{x}{\Delta x}}$ que podemos poner como $(1+\frac{1}{n})^{n}$ siendo $n=\frac{x}{\Delta x}$.

Cuando *Δx* se hace pequeño, n aumenta, por lo tanto podemos convertir la ultima expresión de la derivada en:

$$y' = \frac{1}{x}\log_a(1+\frac{1}{n})^n$$

cuando n se hace muy grande.

Euler reconoce la expresión $(1+\frac{1}{n})^n$ como una sucesión que converge hacia un número de infinitas decimales al aumentar el valor de n y a ese número lo identifica con la letra **e.**

Aplicando la definición de limite cuando x es un valor tan grande como queramos, se dice que x tiende a infinito y el limite es el valor de la función en el infinito.

Esta es la definición de e a partir de la expresión $(1+\frac{1}{n})^n$.

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

El número e

Representamos $(1+1/n)^n$ para x=n para comprobar que al crecer n la función se aproxima a un limite que identificamos como e.
Podemos identificar e con la grafica del desarrollo en serie de e^x para x =1.
También hemos visto que $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = 1$. Con la construcción propuesta también obtenemos por este camino el valor de e.

$$y' = \frac{d\ \log_a x}{dx} = \frac{1}{x}\log_a e$$

El factor de proporcionalidad, k_a ,entre la derivada de la función logarítmica y la hipérbola que habíamos identificado al hablar de St. Vincent, resulta ser $\boldsymbol{\log_a e}$.

Es lógico entonces plantearse cual es la base a emplear para que nos resulte un factor de proporcionalidad igual a 1 y por tanto la derivada de esa función logarítmica sea exactamente $\frac{1}{x}$. Es evidente que $\log_a e$ es igual a 1, si la base a del logaritmo es ***e***.

Los logaritmos en base ***e*** se llaman logaritmos naturales e incluso para ellos se usa el símbolo ***Ln*** en sustitución de ***Log*** que se reserva para logaritmos en cualquier otra base.

Hemos definido al inicio de este libro la función logarítmica como la función inversa de la función exponencial. Es frecuente en muchos libros de cálculo encontrar definida la función logarítmica como la integral de *1/x*,

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{x}\,\mathrm{dx}$$

Para los logaritmos naturales, por definición, *Ln(e)* = 1. Aplicando la definición anterior, $ln\, e = \int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = 1$, el área bajo la exponencial entre 1 y e es también 1. Esta es una definición alternativa de e basada en la integral de *1/x*.

Derivada de la función logarítmica

Representación de la función logarítmica y su derivada. Con el deslizador modificamos la base de la función logarítmica.

Se calcula el área bajo la hipérbola equilátera y = 1/x desde 1 a x igual a la base de la función logarítmica, que es lo mismo que la intersección con la horizontal de abscisa = 1.

Podemos comprobar que cuando la derivada coincide con la hipérbola y = 1/x, el área resaltada tiene valor 1 y el deslizador nos señala e como base de la función logarítmica.

7.2 Una historia paralela de e

Euler, como discípulo de Bernoulli, conocía el estudio sobre el interés compuesto de Jacob Bernoulli de 1683 donde aparecía la expresión $(1+1/n)^n$.

Si se invierte una *Unidad Monetaria* (que abreviaremos en lo sucesivo como *UM*) con un interés del 100% anual y se pagan los intereses una vez

al año, se obtendrán 2 UM al final del año. Si se pagan los intereses 2 veces al año, dividiendo el interés entre 2, la cantidad obtenida es 1 UM multiplicado por 1,5 dos veces, es decir 1 UM x $1{,}50^2$ = 2,25 UM. Si dividimos el año en 4 períodos (trimestres), al igual que la tasa de interés, se obtienen 1 UM x $1{,}25^4$ = 2,4414... En caso de pagos mensuales el monto asciende a 1 UM x = 2,61303...UM. Por tanto, cada vez que se aumenta la cantidad de períodos de pago en un factor de *n* y se reduce la tasa de interés en el período, en un factor de 1/n, el total de unidades monetarias obtenidas estará dado por la siguiente expresión: $(1+\frac{1}{n})^n$ y se obtiene un resultado que se acerca progresivamente a un valor sin llegar a alcanzarlo.
El número e esta por tanto presente en las finanzas y aparece en la fórmula del interés continuo, que es el valor limite del interés que se obtiene al disminuir indefinidamente el periodo de pago.
La fórmula del interés continuo es:

$$\text{Capital final} = \text{Capital inicial} * e^{i\,n}$$

Siendo i la tasa de interés para un periodo n el número de periodos que transcurren en el plazo de la inversión.
Por ejemplo, si sobre mil € nos ofrecen 12% anual, el capital a final del año será 1.120€. Si nos pagan mensualmente los intereses, al 1% mensual, el capital final resultara ser 1000 $e^{0{,}01*12}$ =1.130€ . Atentos pues a como nos aplican los intereses en nuestro banco, puesto que el periodo de cálculo afecta al resultado final. En lenguaje bancario, el 13% es la Tasa Anual Equivalente (TAE) del interés del 12%, pagado mensualmente.
Con seguridad, Bernoulli no reconoció ninguna conexión entre su trabajo y los logaritmos. Euler es el primero que establece esta relación muchos años después, en 1727 y comenzó a utilizar la letra *e* para identificar este número. Una vez identificado por Euler el número e resulta tan presente en las matemáticas y en la física como el número pi, aunque se mantiene en un discreto segundo plano, alejado del gran publico.

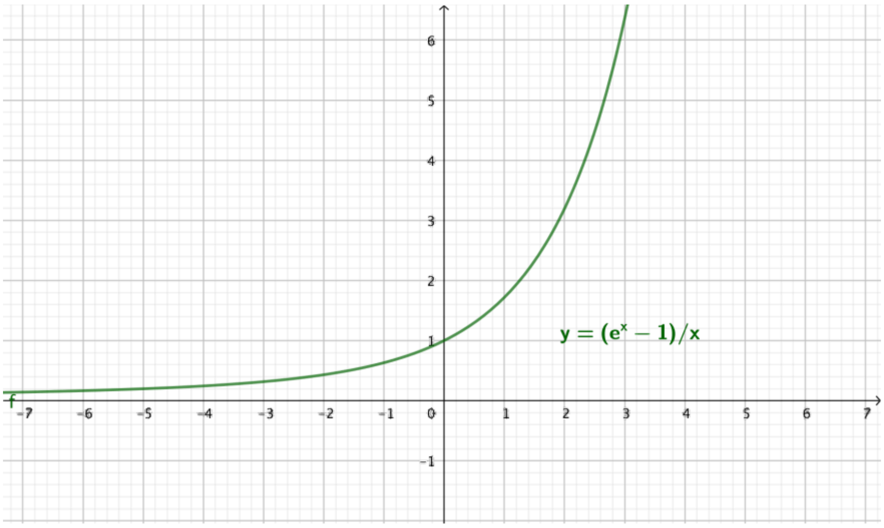
7.3 La función exponencial e^x

Otra consecuencia de la elección de e como base de los logaritmos es que su inversa, la función exponencial e^x tiene la propiedad de ser igual a su derivada.

$$y = e^x = y'$$

Efectivamente $\dfrac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$ es igual a $\dfrac{e^x e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x}$ luego $e^x \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$.

Si dibujamos la función $\dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ veremos que para x=0 toma el valor 1.



Cumpliendo esta propiedad, de ser la función igual a su función derivada, el desarrollo en serie de Taylor de e^x es muy sencillo, pues para x=0,

$$f\,(x) = f\,'(x) = f\,''(x) = f\,'''(x) = \ldots\ldots = 1$$

y obtenemos :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Del desarrollo de la función e^x haciendo x =1 obtenemos una nueva aproximación del valor de e.

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

Acotación del error de ex

Según hemos visto al definir la fórmula de Taylor, la diferencia entre la función y su desarrollo en serie en 0, esta acotado por:

$$R_{na} = f^{n+1'}(t)\, x^{n+1}/n+1!$$

puesto que todas las derivadas de e^x son la misma función e^x,

$$R_{na} = e^t\, x^{n+1}/n+1!$$

Y como la función e^x es creciente, el mayor valor para e^t será e^x. Si damos a e un valor de 3 (por encima de su valor real: 2,71…), podemos decir que:

$$e^x\, x^{n+1}/n+1! < 3^x\, x^{n+1}/n+1!$$

Para valores de x entre $0< x <1$ el resto R estará entre $0 < R < 3/n+1!$

Resultando por tanto, para $x=1$ y $n =4$, la precisión que obtenemos en el valor de e con 4 términos del desarrollo, $1+ 1 +1/2 +1/6 +1/24= 2{,}70833$ es $R< 3/5!< 0{,}025$.

$$e - 2{,}7083 < 0{,}025$$

Crecimiento y decrecimiento exponencial

Cuando el número e aparece en las ecuaciones para describir fenómenos de crecimiento o decrecimiento decimos que varían exponencialmente. Existen muchos fenómenos naturales de crecimiento o decrecimiento exponencial, como por ejemplo la desintegración del carbono 14 o el crecimiento de poblaciones de bacterias en ausencia de factores que limiten el crecimiento.

La fórmula general de estos fenómenos es:

$$P(t) = P(0)\, e^{kt}$$

La población en un instante t, se obtiene multiplicando la población en el instante 0 por el factor e^{kt} en el que k se denomina constante de crecimiento.

Si derivamos esta función de crecimiento obtenemos:

$$y' = \frac{d\, P(0)e^{kt}}{dt} = k\, P(0)e^{kt} = k\, y$$

El crecimiento en el periodo t de la población es proporcional a la población en ese momento t.

Si en laboratorio unas bacterias crecen exponencialmente con una constante de crecimiento $k=0{,}41$ en un periodo de una hora, si la población en el instante 0 es 1000, a las cinco horas la población será:

$$P(5) = 1000\, e^{0{,}41*5} =1000\, e^{2{,}05} = 7.768$$

El tiempo que una población tarda en duplicarse:

$$2P = P\, e^{kt},$$

$$2 = e^{kt},$$

luego,

$$\text{T de duplicación} = \frac{\ln 2}{k}$$

El C^{14} está en una proporción en la atmosfera de $R_{atm} = 10^{-12}$ respecto del C^{12}

El C^{14} es radioactivo y se desintegra exponencialmente con una k de 0,000121 por año. A partir de la fecha en que el organismo vivo deja de respirar la desintegración del C^{14} hace variar el Ratio respecto R_{atm} en la atmosfera original.

Si una muestra tiene un ratio del 15% de R_{atm} resulta:

$$R_{atm}\, e^{-0{,}000121\, t} = 0{,}15\, R_{atm}\,,$$

$$e^{-0{,}000121\, t} = 0{,}15$$

$$-0.{,}000121\, t = \ln(0{,}15)$$

$$t = 15.700 \text{ años}$$

Derivada de la función exponencial

Representación de una función exponencial a^x y su función derivada. Con el deslizador movemos la base de la función y observamos que para la función y su derivada coinciden cuando el deslizador nos da el valor de e.

Desarrollo de Taylor de ex

Representación grafica de la función e^x y de su desarrollo de Taylor para el entorno de x=a. Con el deslizador podemos mover a y observar el entorno de convergencia en cada caso.

7.4 La función logarítmica y la función exponencial reinterpretadas

Funciones de Euler

En la ventana podemos observar representadas la función exponencial y logarítmica y las funciones de Euler que podemos calcular para diferentes valores de n con el deslizador y observar su convergencia.

Adicionalmente se representan la función $y = (1 + \frac{1}{n})^{nx}$ *con el objetivo de observar que no es la misma función de Euler aunque converge mas rápidamente que ella.*

Para la definición de la función logarítmica Euler parte de la función exponencial tal como hemos hecho nosotros y por lo tanto necesita para calcular sus valores una expresión de e^x de acuerdo con su definición de e. Euler propone la expresión:

$$y = e^x = (1+\frac{x}{n})^n$$

siendo n un número entero positivo suficientemente grande

Observar que esta expresión no es exactamente igual a:

$$y = (1+\frac{1}{n})^{nx}$$

que seria el estricto resultado de elevar e a x. Ambas funciones se confunden para valores grandes de n aunque la función de Euler converge mas lentamente. La elección de Euler se debe a que la expresión es mucho mas fácil de manejar y en concreto calcular sus derivadas sucesivas, puesto que para n entero el desarrollo por el binomio del paréntesis nos da una serie de un número finito de términos en potencias de x fácil de derivar.

Ln resulta ser:

$$Ln\ x = n(x^{1/n} - 1)$$

que es el resultado de invertir su fórmula para e^x, como hemos hecho en el caso de acosen y arcos.

7.5 La fórmula mas bella

A partir de aquí la intuición y la capacidad de observación de Euler relaciona los desarrollos en serie de e^x de sen(x) y cos(x).

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}$$

$$sen\ x = +x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$$cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$$

y aprovechando las propiedades del número i,

$(ix)^2 = -x^2$

$(ix)^3 = -x^2 . ix = -ix^3$

$(ix)^4 = -ix^3 . ix = x^4$

$(ix)^5 = x^4 . ix = ix^5$

$(ix)^6 = ix^5 . ix = -x^6$

Repitiéndose la secuencia -1, -i, 1, i, -1 .... Indefinidamente al incrementarse el exponente.

Sustituyendo en los desarrollos en serie de e^x y de sen x, x por ix, obtiene:

$$
\begin{aligned}
e^{x} &= \quad 1+\frac{ix}{1!}-\frac{x^{2}}{2!}-\frac{ix^{3}}{3!}+\frac{x^{4}}{4!}+\frac{ix^{5}}{5!}-\frac{x^{6}}{6!}-\frac{ix^{7}}{7!}\\
sen\ x &= \quad +ix \qquad -\frac{ix^{3}}{3!} \qquad +\frac{ix^{5}}{5!} \qquad -\frac{ix^{7}}{7!}\\
cos\ x &= 1 \qquad -\frac{x^{2}}{2!} \qquad +\frac{x^{4}}{4!} \qquad -\frac{x^{6}}{6!} \qquad +\frac{x^{8}}{8!}
\end{aligned}
$$

Como podemos despejar i en el desarrollo de sen x resulta:

$$sen\ (ix)= ix - ix^3/3! + ix^5/5! + \ldots = i\ sen(x)$$

Con lo que resulta finalmente:

$$e^{ix} = cos(x) + i\ sen(x)$$

Otra manera de presentar el mismo resultado es teniendo en cuenta que *sen(-x) = -sen(x) y cos(-x) = cos(x)* también podemos poner:

$$e^{-ix} = cos(x)\ -i\ sen(x)$$

Sumando ambas expresiones podemos obtenemos seno y coseno en función de e^{ix} y e^{-ix}

$$cos\ x = e^{ix} + e^{-ix} /2$$

y

$$sen\ x = e^{ix} - e^{-ix} /2i$$

Todas esta expresiones son equivalentes y Euler de hecho las presenta simultáneamente. Euler nos llamará la atención sobre lo que estas identidades revelan de una manera evidente.

1. En primer lugar, la identidad que estamos persiguiendo desde el inicio de nuestro libro, particularizando la expresión $e^{ix} = cos(x) + i\ sen(x)$, para $x = \pi$, Euler obtiene:

   $$\boldsymbol{e^{i\pi} = -1}$$

2. También resuelve la naturaleza de los logaritmos de números negativos. Podemos poner la identidad anterior como:

   $$Ln\ (-1) = \pi\ i$$

   Entonces para cualquier número negativo

   $$Ln\ (-a) = Ln\ a + Ln\ -1 = Ln\ a + \pi\ i$$

Euler resuelve de este modo la discusión demostrando que el logaritmo de los números negativos son números imaginarios.
Además como $e^{ix} = cos(x) + i\, sen(x)$ es evidente que se cumple

$$e^{i(x+2k\pi)} = cos(x) + i\, sen(x)$$

con lo que demuestra que existen infinitos logaritmos imaginarios para un mismo número negativo.

3. Particularizando $e^{ix} = cos(x) + i\, sen(x)$ para $x=\pi/2$, resulta:

$$e^{-i\pi/2} = i$$

luego:

$$i^i = (e^{-i\pi/2})^i = e^{-\pi/2}$$

Con lo que obtenemos un resultado sorprendente, ya que elevando i a un número imaginario obtenemos un número real.

4. También podemos comprobar la coherencia de $e^{ix} = cos(x) + i\, sen(x)$ con la geometría clásica, si observamos como podemos obtener de forma sencilla la demostración de las fórmulas de coseno y seno de la suma de ángulos.
Si hacemos

$$e^{ia}\, e^{ib} = e^{i(a+b)} = cos(a+b) + i\, sen(a+b),$$

Que tiene que ser igual al producto de

$$e^{ia} = cos(a) + i\, sen(a)$$

y

$$e^{ib} = cos(b) + i\, sen(b)$$

Que multiplicando termino a termino nos da:

$$cos(a)\, cos(b) + i\, sen(a)\, cos(b) + i\, sen(b)\, cos(a) + i\, sen(b)\, i\, sen(a)$$

agrupando términos resulta:

$$cos(a)\, cos(b) - sen(b)\, sen(a) + i\, (sen(a)\, cos(b) + sen(b)\, cos(a))$$

Igualando la parte real y la parte imaginaria de las dos expresiones obtenemos:

$$cos(a+b) = cos(a)\, cos(b) - sen(b)\, sen(a)$$
$$sen(a+b) = sen(a)\, cos(b) + sen(b)\, cos(a)$$

La función de variable compleja obtenida por Euler nos devuelve a la geometría griega clásica. Podemos pedir alguna confirmación mas solida de que las nuevas matemáticas y las matemáticas clásicas son la misma cosa.

7.6 Una ventana al futuro

Hemos visto que las identidades de Euler nacen simplemente al poner en relación los desarrollos en serie de sen x y cos x que ya habían sido obtenidos por Newton, con el desarrollo de e^x, obtenido mediante la fórmula de Taylor. En si mismo no parece un avance de especial valor, mas bien una curiosidad matemática pero nos pone de manifiesto una conexión entre las funciones trigonométricas y logarítmica que nunca pudo imaginarse cuando se definieron por primera vez estas funciones.
Una vez descubierta esta relación nos damos cuenta que se podía sospechar una conexión cuando hemos obtenido los desarrollos en serie integrando de ecuación de la circunferencia de radio unidad $y = (1-x^2)^{1/2}$. Si sustituimos x por ix obtenemos $y = (1+x^2)^{1/2}$ que es la ecuación de una hipérbola, que hemos visto como se relaciona con los logaritmos.

Pero el valor de la aportación de Euler, no esta tanto en la síntesis de los avances precedentes que representa, como en las líneas de futuro que señala al introducir el numero ***i*** de lleno en las matemáticas y dejar el camino abierto para la aparición de una nueva categoría de números, que no sospechábamos.
La aparición de los números imaginarios se debe a Gauss, 50 años después, que define los "números complejos" como pares ordenados de números reales, que tienen una componente real y otra imaginaria. Gauss también demuestra el **teorema general del álgebra**, que cierra definitivamente la posibilidad de que aparezca otro tipo de números. El club de los números no admite mas socios, Naturales, enteros, racionales, irracionales, reales e imaginarios.

8 Anexos

8.1 Anexo 1 El concepto de función

Euler coloca al concepto de función en el centro del Análisis Matemático que se convierte en la ciencia general de las funciones. Para Euler,

"Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, de cualquier manera que sea, de esta misma cantidad y de números o de cantidades constantes"

En la definición nos encontramos con la palabra "analítica'. Euler tenia en mente que una expresión analítica es una expresión compuesta de magnitudes relacionadas mediante operaciones algebraicas (es decir, la adición, la resta, la multiplicación, la división, la exponenciación y la extracción de raíces) o trascendentes (como la exponencial, el logaritmo y "otras que aporta el cálculo integral en abundancia"). Las funciones se dividen por tanto en algebraicas y trascendentes. Sin embargo lo que está en el fondo de esta división es el hecho de que las funciones algebraicas son aquellas que se obtienen a través de un número finito de operaciones elementales y las segundas mediante un número infinito de operaciones elementales. Es decir, toda funcion es expresable en una suma finita o infinita de operaciones. De este modo el concepto de función, en su esencia, deviene independiente de la relación geométrica que le dió origen.

Aquí todo permanece dentro de los lımites del análisis puro, de tal manera que en la explicación de las reglas de este cálculo no hay necesidad de ninguna figura geométrica.

Funciones continuas

Una cuestión clave para el estudio de una función es el concepto de continuidad. Para una función de una variable, representable en un plano, continuidad significa, de forma intuitiva, que puede ser dibujada sin levantar el lápiz del papel.

Euler para distinguir entre funciones continuas y discontinuas, atribuye la continuidad a que la función esté definida por una única ley. Es decir, la continuidad es una propiedad intrínseca de cada función siempre y

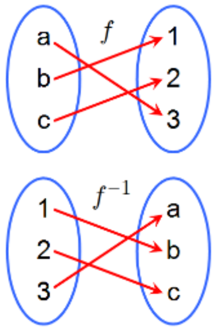
cuando esta se encuentre expresada a partir de una “única expresión analítica”. Esto implica que la continuidad es una propiedad global de la función.
Si volvemos a la imagen intuitiva de continuidad, comprenderemos que la continuidad es una propiedad local, pudiendo existir funciones que no son continuas en un punto compuestas de tramos continuos.
La definición de continuidad de una función se define para un punto concreto, f(x) es continua en a si se cumple:

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$$

Si una función es derivable cumple esta condición, luego si una función es derivable en un punto es continua en ese punto. La inversa no es cierta. La continuidad es una condición necesaria pero no suficiente para que una función sea derivable en un punto, en este caso en a.
Las funciones continuas pueden tener puntos particulares en los que la función no sea derivable. Uno de los casos es el de los puntos “angulosos” en los que la tangente a la gráfica de la curva resulta indeterminada. Se dice entonces que el $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$ es diferente por la derecha y por la izquierda. Hay otros casos posibles de funciones con puntos en el que son continuas y no derivables como iremos viendo.

Continuidad y funciones derivables.

Funciones inyectivas y biyectivas
Desde el tiempo de Euler, el concepto de función se ha ido ampliando para incluir funciones en los que la regla para asignar un valor “y” a cada “x” sea lo mas general posible. Lo esencial de esta regla de correspondencia es que para cada valor de “x” obtengamos una sola “y”. Una función la podemos ver entonces como un conjunto de pares de números (x_i ; y_i), con la restricción que hemos dicho de no existir pares con el mismo valor de “x”. Esta definición de función pone el énfasis en la correspondencia entre los valores de las variables en lugar de las operaciones aceptadas entre ellas.



La función f del gráfico es el conjunto de 3 pares de elementos [(a,3),(b,1),(c,2)], y cumple este criterio de no existir pares con el mismo primer elemento. Podríamos añadir a la función el par (d,1), y seguir cumpliendo con el criterio establecido. Una función que cumple este criterio se denomina inyectiva.

Llamamos dominio de una función al conjunto de los valores del primer elemento de los pares que forman la función. En el caso del grafico el dominio de f seria el conjunto de letras minúsculas [a, b, c]. Llamamos imagen de una función el conjunto de los segundos elementos de los pares que forman la función en este caso [1,2,3].

Una recta vertical, x=n, corta la grafica de una función inyectiva, y =f(x), en un solo punto (n, y), puesto que por definición no puede existir ningún otro par (n, y_2) con el mismo primer elemento.

Funciones inversas

Obtenemos una función inversa de otra alterando el orden de los pares que definen la función de modo que la correspondencia se establezca en sentido contrario.

Las funciones antes definidas f y f^{-1} son inversas. Si la inversa de una función debe de ser también inyectiva, esto supone que en la función a invertir no pueden existir pares (x, y_1), (x,y_2) con el mismo valor de x, pues al invertir los pares obtendríamos (y_1,x) (y_2,x) y este resultado no lo podemos interpretar como función. Para que una función pueda invertirse el conjunto de los pares que la definen tienen que ser únicos y ninguno de sus elementos puede repetirse en diferentes pares. Una función así se llama biyectiva. El dominio de la función inversa es la imagen de la función primitiva.

Es fácil comprobar que las graficas de las funciones inversas son simétricas respecto de la recta y=x. De igual manera que una recta vertical corta la función inyectiva en un punto, una recta horizontal no puede cortar una función biyectiva en mas de un punto. La gráfica de una función biyectiva debe cumplir por tanto las dos condiciones y no tener mas que un punto de corte para cualquier recta horizontal y vertical.

Para invertir una función analíticamente, sustituimos la y por la x y la x por la y. Obtenemos la expresión implícita de la función inversa y nos queda el trabajo de despejar la nueva variable independiente "y" respecto de "x". Obtener la expresión analítica explicita de la función inversa puede ser muy difícil y en estos casos nos podemos ayudar de sus propiedades geométricas para obtener, al menos su gráfica.

Hemos definido y comprobado que las funciones Log y exponencial son inversas una de otra. También hemos definido seno, coseno y tangente como inversas de arco seno, arco coseno y arco tangente. Pero las funciones seno, coseno y tangente son inyectivas, pues al ser periódicas repiten valores de y al incrementar la x en 2π radianes. Solo podemos obtener la inversa de la función seno, coseno y tangente para una parte de su dominio $[-\pi/2, \pi/2]$ para la función seno y tangente y de $[0, \pi]$ para la función coseno.

Funciones y ecuaciones

Si solo consideraremos "función" aquellas expresiones que nos ofrecen una correspondencia inyectiva de las variables, la igualdad entre dos expresiones algebraicas de "x" e "y" la llamaremos ecuación. En una ecuación, la igualdad entre las dos expresiones que involucran las variables se mantiene, si ejecutamos las mismas operaciones elementales a cada lado de la igualdad.

No todas las expresiones algebraicas pueden aceptarse como función. Por ejemplo, la existencia de raíces en la expresión algebraica, a un lado u otro del signo igual, nos puede presentar como solución un valor positivo y otro negativo para cada valor de la variable independiente x, de manera que la expresión ya no cumple con la correspondencia inyectiva de las variables.

Es el caso de la ecuación de la circunferencia $y^2+x^2=R^2$. Si ponemos a cada lado del paréntesis la x y la y, obtenemos $y = (R^2-x^2)^{1/2}$. De una forma rigurosa, ateniéndonos a la definición de las operaciones entre

números reales, la raíz cuadrada de un numero real es otro numero "real positivo". Otra cosa es, que obtenida la raíz cuadrada, el mismo numero en negativo sea valido como solución de la ecuación.
En puro rigor matemático, $\sqrt{4}$ es 2, pero 2 y -2 son soluciones de $y^2 = 4$, por lo que escribimos habitualmente $y = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.
La ecuación de la circunferencia nos define dos funciones, una para las y positivas y otra para las y negativas y las distinguimos escribiendo y = $(R^2\text{-}x^2)^{1/2}$ para la función positiva y, y = - $(R^2\text{-}x^2)^{1/2}$ para la negativa.
En el cuadro de integrales inmediatas del apartado 5.9, hemos escrito para la derivada de arco seno y $=1/(1\text{-}x^2)^{1/2}$ y para arco coseno y= $-1/(1\text{-}x^2)^{1/2}$ siendo así que ambas funciones se obtienen de despejar la "y" la misma ecuación $y^2 = 1/(1\text{-}x^2)$.
Las funciones exponenciales $y=x^n$ son siempre inyectivas por lo tanto los desarrollos en serie compuestos de funciones exponenciales son igualmente siempre inyectivos. Que $y=x^n$ es inyectiva es obvio, no podemos obtener varios valores de y para una determinada x. Obligar a que las funciones sean siempre inyectivas, nos permite reforzar la relación entre una función y su desarrollo en serie. Hemos visto que los desarrollos en serie del arco positivo de la circunferencia y del arco negativo son diferentes y lógicamente no podemos obtener un desarrollo en serie válido para toda la circunferencia.

La inversión de desarrollos en serie
Hemos utilizado en el apartado 5.7 un método para invertir series. Vamos a profundizar en este problema estudiando la inversión de las funciones cubicas y de las funciones cuadráticas, que podemos interpretar como desarrollos en serie con un número finito de términos y además de fácil inversión analíticamente.
Una función cubica es una función del tipo $y = (x/a)^3 - b$ y su inversa es, por tanto, $y= a(x+b)^{1/3}$. En nuestra hoja de trabajo podemos ver que la función inversa, en verde puede aproximarse mediante un desarrollo en serie, en el entorno de 0, que podemos obtener aplicando el teorema del binomio a $y= a(x+b)^{1/3}$. Moviendo el deslizador hasta b=0 vemos que el desarrollo en serie no existe para la función cuando b=0. Este resultado hemos de interpretarlo de la siguiente forma:

- Recordando que al tratar de la inversión por sustitución, no obteníamos resultado si no existía termino en x, como es este caso donde la función resulta ser $y = (x/a)^3$.

- Recordando que dijimos que para la existencia de desarrollo en serie en un punto las derivadas en ese punto deben existir y estar acotadas y esto no se cumple en nuestro caso, puesto que la tangente de la función es vertical y por tanto su pendiente infinita.
- Esta observación nos devuelve al punto en el que hablábamos de funciones continuas no derivables. Este es un caso en el que la función es continua en 0 pero su derivada es infinita.

Continuando el movimiento del deslizador podemos comprobar que el desarrollo en serie no es el mismo para valores de b positivos ó negativos, porque su radio de convergencia viene limitado por el punto de derivada infinita que impide al desarrollo ajustarse a la función para todos los valores de x.

Funciones cubicas inversas

Para el caso de funciones cuadráticas vamos a interpretar los resultados sobre la función $y = (x/a)^2 - b$ cuya expresión inversa podemos calcular y resulta ser $y = a(x+b)^{1/2}$, lo que nos define dos funciones, una para valores positivos y otra para los negativos. Para cada una de ellas podemos calcular su desarrollo en serie.
Para el caso de b=0, como para las funciones cubicas no existe desarrollo en serie en 0 al ser la tangente infinita. Para valores de b positivos no existe desarrollo en serie centrado en 0 al no pertenecer este punto a la función.

Funciones cuadráticas inversas

8.2 Anexo 2 Funciones de variable compleja

La definición de los números complejos

Hemos visto la aparición de los números imaginarios al hablar de Cardano y Bombelli a finales del siglo XVI y el uso de la letra "i" para la unidad imaginaria por Euler en 1777.

El termino "números complejos" se debe a Gauss. Un número complejo "z" es de la forma z=x+iy, es decir "z" es una pareja de números reales, siendo "x" la componente real e "y" la componente imaginaria.

Hasta la aparición de los números complejos todos los números estaban alineados en la recta de los números reales. Caspar Wessel en 1799 y Jean-Robert Argand en 1806, fueron los primeros en representar los números complejos en un plano, el plano complejo, con un eje real y el eje vertical representando la componente imaginaria, siendo el punto (0,1) del plano la representación de la unidad imaginaria i.

Operaciones con números complejos

La generalización del álgebra a un nuevo tipo de números obliga a definir las operaciones, (Suma, multiplicación…) de manera que sean compatibles con la manera en que operan esas operaciones con los números conocidos hasta ahora, es decir, los números reales.

La suma de dos números complejos, $z_1 = x_1 + i\, y_1$ y $z_2 = x_2 + i\, y_2$ se define como:

$$z_3 = z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i\,(y_1 + y_2)$$

Vemos que si z_1 y z_2 son reales, $y_1=0$ e $y_2=0$, y por tanto $z_1+z_2 = x_1+x_2$.

Geométricamente los tres números z_1 , z_2 y z_3 forman con el origen de coordenadas un rombo siendo la diagonal del mismo la línea que une el origen con z_3 .

Definimos la multiplicación del siguiente modo,

$$z_1\, z_2 = (x_1 + i\, y_1)\,(x_2 + i\, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(y_2 x_1 + x_2\, y_1)$$

que también es una operación valida para los números reales, resultando $z1*z2 = x_1*x_2$, cuando $y_1=0$ e $y_2=0$.

Cuando operamos con números complejos sin componente imaginaria, $z_1= x_1+ 0i$, lo escribimos como $z_1= x_1$. Del mismo modo cuando operamos con números imaginarios puros, $z_1= 0+y_1 i = y_1 i$. Cuando $y_1 =1$ tenemos la unidad imaginaria i. Si aplicamos las reglas de la multiplicación a la unidad imaginaria, z= 0+i , para multiplicarla por si misma , obtenemos:

$$i^2 = i*i = (0+i\ 1)\ (0 +i\ 1) = (0 - 1) + i\ (0 + 0)= -1$$

Hemos obtenido una definición de i sin tener que recurrir a la expresión con la que aparece por primera vez en la historia $\sqrt{-1}$ y que vulnera claramente las reglas de las operaciones con números reales y la sustituimos por $i^2 = -1$ que es una expresión valida para números complejos. $(0+i)^2= (-1+i0)$.

Una manera alternativa de definir los números complejos es mediante coordenada polares, es decir identificando cada punto del plano por su distancia al origen y el ángulo que forma la recta, que pasa por el punto y el origen de coordenadas, con el eje x. A la distancia se le llama módulo y al ángulo formado con el eje x argumento. En coordenadas polares podemos interpretar mejor la multiplicación de dos números complejos observando que el producto de dos números complejos es otro número complejo que tiene por módulo el producto de los módulos y de argumento la suma de los argumentos de los factores. También podemos ver que si sumamos 2π al argumento de un numero complejo volvemos a obtener el mismo numero, que ocupa en el plano de Gauss el mismo punto.

Para z = $a+i\,b$,

$$|z|= \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\arg(z)= \arctan \frac{b}{a} = \theta+ 2\pi\, k$$

Operaciones con números complejos

Las operaciones con números complejos se pueden visualizar fácilmente si utilizamos una notación vectorial para designar los puntos $z_1= x_1+i\, y_1$ *y*

$z_2 = x_2 + i\, y_2$, representando cada punto por su modulo (distancia entre (0,0) y (x_1 , y_1), que por Pitágoras sabemos que vale $\sqrt{x_1^2+y_1^2}$) y el ángulo que forma el modulo con el eje x.
La suma de números complejos se comporta como la suma de vectores.
La multiplicación de números complejos resulta ser otro número complejo cuyo modulo es el producto de los módulos y su ángulo con el eje x es la suma de los ángulos de los factores.

Potencias y raíces de un numero complejo
Con la notación en polares, hemos visto que de la multiplicación de un número complejo por otro resulta un número complejo, cuyo módulo es el producto de los módulos y su argumento la suma de los argumentos de los factores.
Para elevar un numero complejo a una potencia n, podemos poner:

$$|z^n| = |z|^n$$
$$\arg(z^n) = n \arg(z) = n\phi = n(\phi + 2\pi k)$$

La operación inversa, la raíz n de un numero complejo se obtiene análogamente.

$$|\sqrt[n]{z}| = \sqrt[n]{|z|}$$
$$\arg(\sqrt[n]{z}) = \arg z / n = \phi/n = (\phi + 2\pi k)/n$$

Al ser k un numero entero positivo existe infinitas raíces de un numero complejo. De entre ellas las n primeras con argumento entre $-\pi$ y $+\pi$.

Raíces de un número complejo
Moviendo el deslizador obtenemos las raíces de orden n del numero A. Podemos observar la distribución de las raíces sobre un circulo, de centro en el origen de coordenadas y radio el modulo de las raíces.

Funciones de variable compleja.
El teorema general del álgebra afirma que, las raíces de un polinomio con coeficientes complejos son números complejos. De este modo se cierra la posibilidad que aparezca un nuevo tipo de números como había pasado con los números reales. Los polinomios con coeficientes reales tienen

raíces que pueden ser reales o imaginarias. Los números imaginarios son los números mas "generales "que existen. Si a los matemáticos les fue difícil aceptar números negativos, con infinitas decimales…las números imaginarios son el ultimo reto para comprender lo que es un número.

Si aceptamos como variable independiente de una función un número complejo, por el teorema general del álgebra sabemos que obtendremos como resultado otro número complejo, puesto que los números complejos son un conjunto de números cerrado. En consecuencia, podemos descomponer una función de variable compleja en dos funciones, una para la parte real y otra para la parte imaginaria. Normalmente se escribe, siendo z la variable compleja $z=x+i\,y$,

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

Es decir la funciones "parte real" y "parte imaginaria" son funciones de dos variables independientes, por lo que para representarlas gráficamente debemos recurrir a dibujar cada una de ellas como una superficie en un espacio de tres dimensiones. A pesar de ello es difícil interpretar una función utilizando estas graficas.

Representación de una función de variable compleja en 3D

Mas fácil es interpretar una función compleja como correspondencia entre puntos de un plano. Esta correspondencia se representa visualmente utilizando dos planos, uno para la variable independiente $z^1=x^1+iy^1$, que llamamos plano "cartesiano" y otro plano $z^2=u^2+iv^2$ para la variable dependiente. Este plano se llama habitualmente plano de Gauss. La función de variable compleja es una transformación de las líneas rectas o curvas del plano "cartesiano" en otras figuras en el plano de "Gauss".

Podemos interpretar gráficamente la función e^{ix} que nos ha conducido la identidad de Euler, siendo x un número real, la parte real la función e^{ix} es cos (x) y la parte imaginaria sen (x), por lo que los puntos de la recta real se transforman en una circunferencia de radio unidad en el plano de Gauss.

Función e^{ix}

Tenemos un punto A sobre el eje y en la primera ventana que podemos mover con el deslizador. En la segunda ventana vemos la transformación del punto A en z_1 por la función e^{ix} sobre el circulo unidad.

En esta segunda pantalla representamos los puntos con su componente real sobre el eje x y su componente imaginaria sobre el eje y.

Si activamos la segunda casilla de control obtenemos también el punto z_2 que es el transformado de A por e^{-ix}.

Podemos ver el movimiento de los puntos z_1 y z_2 simétricamente al eje real.

Activando la casilla de control 3 obtenemos la suma de z_1 y z_2 como suma de dos vectores. (Sumando su componente real y su componente imaginaria separadamente). El vector rojo resultante vemos que solo tiene componente real y comprobamos que se cumple la identidad de Euler, cos x = $e^{ix} + e^{-ix}/2$, trasladando a la primera ventana la mitad del valor obtenido sobre el eje real del plano de Gauss, como valor de y=cos x.

Podemos generalizar la fórmula de Euler fácilmente si sustituimos la x (un número real) por z (un número complejo) y aplicamos las propiedades básicas de la función exponencial:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) = (e^x \cos y) + i\,(e^x \operatorname{sen} y)$$

Es decir la función nos trasforma un número complejo z=x+iy en $z_1=x_1+íy_1$ en el que $x_1 = e^x \cos y$ e $y_1 = e^x \operatorname{sen} y$. Con ello demostramos también que los logaritmos de un número complejo son también un número complejo.

e^z en el plano complejo

La ventana 1 representa el plano xy cartesiano. La ventana 2 representa el plano de Gauss, con la componente real según el eje x y la componente imaginaria según el eje vertical.

Podemos visualizar como la función $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$, transforma un punto A (x,y) en la primera ventana en un punto, Z_i en el *plano complejo y las líneas rectas de colores se transforman en diferentes figuras. Moviendo A con el cursor desplazamos las rectas de colores.*

Las rectas verticales en rojo se transforman en circunferencias y las rectas horizontales azules se transforman en rectas que pasan por el origen de coordenadas. Las rectas verdes que pasan por el origen de coordenadas se transforman en espirales.

Deslizar los puntos C, D y E sobre sus rectas y observar el recorrido sobre las figuras del plano imaginario del punto transformado.

8.3 Anexo 3 Temas de ampliación y ejercicios

Capitulo 2 Los logaritmos

1. La regla de cálculo. Un artilugio en desuso. Que es una regla de cálculo y como se usaba.
2. Como es la grafica de la función logarítmica en base a cuando $a < 1$.
3. ¿Los logaritmos describen algún fenómeno físico? Razonar porque la escala de Richter para los seísmos, la escala del PH, la escala de los decibelios…son escalas logarítmicas.
4. Hemos visto en este capitulo la primera definición de función, limitándonos al caso de una sola variable independiente. Si una función de una variable se representa en el plano, como podemos representar gráficamente una función de dos variables.

Capitulo 3 El cálculo

1. El nacimiento del cálculo esta ligado al de la física moderna. Para Newton el cálculo es la matemática necesaria para fórmular las primeras leyes del movimiento y de la dinámica. (La dinámica es el estudio del efecto de las fuerzas en el movimiento). La velocidad es la primera derivada del espacio recorrido y la aceleración es la derivada de la velocidad, es decir la segunda derivada del espacio recorrido.
2. La gravedad, es también una aceleración. La teoría de la gravitación de Newton se mantendrá vigente hasta que Einstein la incluya en la teoría de la relatividad. Investiga la relación que existe entre la ley de Newton para la gravedad y las leyes de Kepler sobre la trayectoria elíptica de los planetas.
3. Si hemos reflexionado sobre las funciones de dos variables independientes, como podemos generalizar la derivación de funciones de este tipo.

Capitulo 4 series

1. Un desarrollo en serie es una función de una variable x.
   Para cada valor de x, el desarrollo en serie se convierte en una serie numérica. El valor de la función en ese punto es igual a la suma de los infinitos términos de la serie y según el número de términos que consideremos obtenemos una mejor aproximación a su valor.

   Otra posibilidad es que logremos la suma de los infinitos términos mediante otro procedimiento. La suma de series numéricas es desde antiguo un "deporte" matemático resultado de la curiosidad de calcular la suma de las diferentes sucesiones que se ponían de moda. Existen sucesiones que se suman desde la época clásica y otras que se han planteado como un desafío y que se ha tardado siglos en resolver.
   Por ejemplo es claro que suma de la sucesión de los números naturales nos da un valor infinito. Pero, ¿cuál es la suma de la sucesión de los inversos de los números naturales? 1 + 1/2 + 1/3+1/4+ ….., también es infinita, como lo es la de los inversos de los números primos.
   La suma de los inversos de las potencias de 2 resulta ser 1 +1/2+1/4+1/8+…. =2
   El problema de Basilea consistía en sumar la serie de los inversos de los cuadrados perfectos, es decir, 1+1/4+1/9+1/16+1/25+…. El resultado correcto lo obtuvo Euler en 1735, y es $\pi^2/6$ lo que no deja de ser un resultado sorprendente.