15. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x-y}$; $y(2)=2$

el teorema de existencia garantiza que al menos hay una solucion en cualquier region de $\mathbb{R}^2$ contenida en $\{(x,y) : x-y>0\}$

$\{(x,y) : x>y\}$

Debido a que el PVI es en $(2,2)$ esta condición no se cumple y el teorema no garantiza la existencia de por lo menos una solucion a este PVI, tampoco se garantiza la unicidad pues $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ no es continua si $x=y$

16. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x-y}$; $y(2)=1$

Usando el argumento del ejercicio 15 el teorema de existencia garantiza al menos una solucion al PVI en $(2,1)$ pues:

$2>1$ verificamos si el teorema de unicidad

$x>y$ garantiza unica solución al PVI

$F(x,y)=\sqrt{x-y}$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{2\sqrt{x-y}}$ es continua en la región donde $x-y>0$

$\rightarrow x>y$

entonces el PVI $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x-y}$; $y(2)=1$ admite una unica solucion en una region $R:\{(x,y): 2-\epsilon \leq x \leq 2+\epsilon,\ 1-h \leq y \leq 1+h\}$ con $\epsilon, h>0$

27.

a) $y(x) = \begin{cases} 0 & x \leq c \\ (x-c)^2 & x > c \end{cases}$

Si $x < c$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$ $\quad y(0) = 0$

$y = 0$

$0 = 2\sqrt{0}$

$0 = 0$

Si $x > c$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = 2(x-c) \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$ $\quad y(0) = 0$

$y = (x-c)^2$

$2(x-c) = 2\sqrt{(x-c)^2}$

pero $x > c$ $\quad 2(x-c) = 2|x-c|$

$|x-c| = x-c$ $\quad 2(x-c) = 2(x-c)$

Si $x = c \rightarrow \frac{dy}{dx}(c) = \lim_{x \to c} \frac{y(x) - y(c)}{x-c} = 0$

$\frac{dy}{dx}(c) = 2\sqrt{y(c)}$

$\lim_{x \to c^-} \frac{0-0}{x-c} = \lim_{x \to c^-} \frac{0}{x-c} = 0$

$0 = 0$

$\lim_{x \to c^+} \frac{(x^2-c)^2 - 0}{x-c} = \lim_{x \to c^+} x - c = 0$

Asi que $y(x)$ satisface EDO $y' = 2\sqrt{y}$; $y(0) = 0$ $\forall x$

y como c puede ser tan cercano como sea a $x=0$ entonces podemos ver el siguiente ejemplo

$y(x) = \begin{cases} 0 & x \leq c \\ (x-c) & x > c \end{cases}$ para $c_1 = 0.1$, $c_2 = 0.01$, $c_3 = 0.001$ ...

seran solucione para la EDO con PVI $y(0) = 0$

hay infinitas soluciones

6.

i) $y' = 2\sqrt{y}$ $y(0) = b$ no tiene solución para $b < 0$

ii) $y' = 2\sqrt{y}$ $y(0) = b$ tiene única solución para $b > 0$

$F(x,y) = 2\sqrt{y}$ es continua si $y > 0$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ es continua si $y > 0$

30. Si $x < c$ o $x > c + \pi$

$y(x) \pm 1$ respectivamente en cualquier caso

$y' = 0$

$\rightarrow y' = \sqrt{1-y^2}$

$0 = \sqrt{1-(\pm 1)^2}$

$0 = \sqrt{0}$ en $x < c \wedge x > c\pi$

$0 = 0$

Si $c < x < c + \pi$

$y(x) = \cos(x-c) \rightarrow y'(x) = -\text{sen}(x-c)$

$\Rightarrow y' = \sqrt{1-y^2}$

$-\text{sen}(x-c) = -\sqrt{1-\cos^2(x-c)}$

$-\text{sen}(x-c) = -\sqrt{\text{sen}^2(x-c)}$

$-\text{sen}(x-c) = -|\text{sen}(x-c)| = -\text{sen}(x-c)$

como $c < x < c + \pi$

$c - c < x - c < c + \pi - c$

$0 < x - c < \pi$

Si $x - c \in (0, \pi)$: $|\text{sen}(x-c)| = \text{sen}(x-c)$

entonces $y(x)$ satisface la EDO $\forall x$

ya que $\frac{dy}{dx}(c) = \frac{dy}{dx}(c+\pi) = 0$

$$\frac{dy}{dx}(c) = \lim_{x \to c} \frac{y(x) - y(c)}{x - c} = 0$$

$$\lim_{x \to c^-} \frac{1-1}{x-c} = 0$$

$$\lim_{x \to c^+} \frac{\cos(x-c)-1}{x-c} = -\operatorname{sen}(c-c) = 0$$

puede verse de igual forma que $\frac{dy}{dx}(c+\pi) = 0$

$$\frac{dy}{dx}(c+\pi) = \lim_{x \to c+\pi} \frac{y(x) - y(c+\pi)}{x - (c+\pi)}$$

$$\lim_{x \to (c+\pi)^-} = \frac{\cos(x-c) - (1)}{x - (c+\pi)} = \lim_{x \to (c+\pi)^-} = -\operatorname{sen}(x-c) = 0$$

$$\lim_{x \to (c+\pi)^+} = \frac{-1-(-1)}{x-(c+\pi)} = 0$$

$y' = -\sqrt{1-y^2}$; $y(a) = b$

$f(x,y) = \sqrt{1-y^2}$ $\qquad 1 - y^2 > 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}$ son continuas! $\qquad 1 > y^2$

$|y| < 1$

$\to |b| < 1$

entonces se garantiza la existencia y unicidad de la solucion si el PVI $\in (a,b)$ con $-1 < b < 1$

$a \in \mathbb{R}$

Si $b>1$ no existe solución al PVI $y(a)=b$ y si $b=1$ ni la existencia ni la unicidad están garantizadas pero si se puede observar que $y(t)=1$ o $y(t)=-1$, son soluciones constantes al PVI $y'(t)=-\sqrt{1-y^2}$ $y(a)=1$ y $y(a)=-1$ respectivamente.

32. Si $x^2<c$ $\rightarrow \frac{dy}{dx}=4x\sqrt{y}$
$y=0$

$$0=4x\sqrt{0}$$
$$0=0$$

Si $x^2>c$ $\rightarrow \frac{dy}{dx}=4x\sqrt{y}$
$y=(x^2-c)^2$

$$2(x^2-c)(2x)=4x\sqrt{(x^2-c)^2}$$
$$4x(x^2-c)=4x|x^2-c|=4x(x^2-c)$$

ya que $x^2>c$ y $|x^2-c|=x^2-c$

para poder encontrar la derivada en $x^2=c$; reescribimos $y(x)$ como:

$$y(x)=\begin{cases}(x^2-c)^2 ; & x<-\sqrt{c}\\ 0 ; & -\sqrt{c}\le x\le\sqrt{c}\\ (x^2-c)^2 ; & x>\sqrt{c}\end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}(\sqrt{c})=\lim_{x\to\sqrt{c}}\frac{y(x)-y(\sqrt{c})}{x-\sqrt{c}}=0$$

$$\rightarrow \lim_{x\to\sqrt{c}^+}\frac{(x^2-c)^2-0}{x-\sqrt{c}}\cdot\frac{x+\sqrt{c}}{x+\sqrt{c}}$$

$$\lim_{x \to \sqrt{c}^{+}} \frac{(x^2-c)^2\,(x+\sqrt{c})}{x^2-c} = \lim_{x \to \sqrt{c}^{-}} (x^2-c)(x+\sqrt{c})$$

$$= (c-c)(\sqrt{c}+\sqrt{c})$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \to \sqrt{c}} \frac{0-0}{x-\sqrt{c}} = 0$$

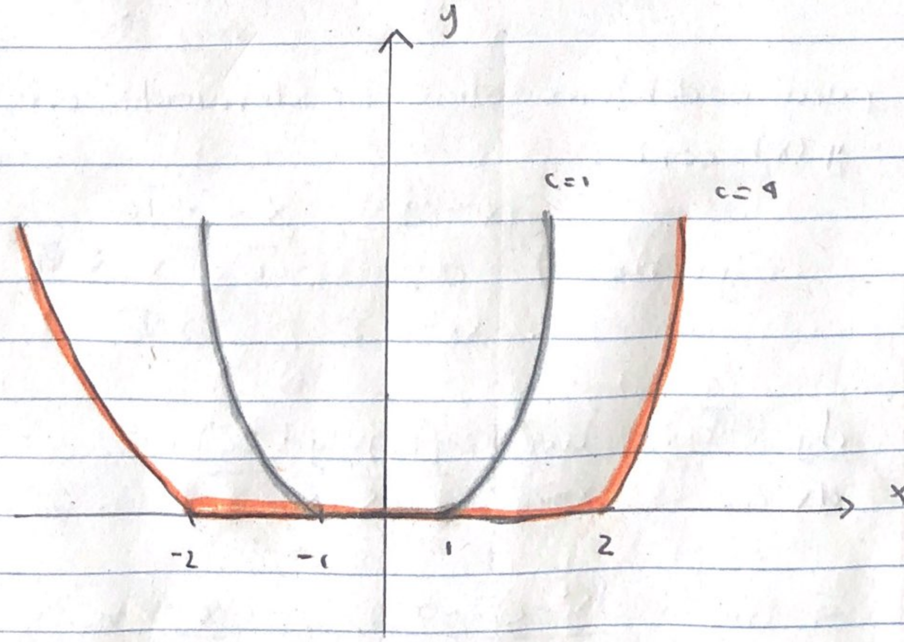
tambien podemos ver que

$$\frac{dy}{dx}(-\sqrt{c}) = \lim_{x \to -\sqrt{c}} \frac{y(x) - y(-\sqrt{c})}{x+\sqrt{c}} = 0$$

asi que $\frac{dy}{dx}(\pm\sqrt{c}) = 4(\pm\sqrt{c})(y \pm \sqrt{c})$

$$0 = 0$$

$\to$ $y(x)$ satisface EDO $\forall x$



La ecuación $\frac{dy}{dx} = 4x\sqrt{y}$ $y(a)=b$

se garantiza solución única si $b>0$; $\forall a$

$F(x,y) = 4x\sqrt{y}$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{2x}{\sqrt{y}}$

son continuas para $y>0$ $(b>0)$

entonces:

para $y<0$ $(b<0)$ no habría soluciones

y si $y=0$ $(b=0)$ el teorema no garantiza ni existencia ni unicidad, aunque vemos que existen infinitas soluciones al PVI $y(0)=0$

1.4. Ejercicios

5. $2\sqrt{x}\,\frac{dy}{dx} = \sqrt{4-y^2}$

$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow dy = \sqrt{1-y^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$\arcsin y = \sqrt{x} + c \rightarrow \operatorname{sen}^{-1} y = \sqrt{x} + c$

$y(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x} + c)$

Una solución general de forma explicita

12. $yy' = x(y^2+1)$

$y\frac{dy}{dx} = x(y^2+1) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x\cdot(y^2+1)}{y}$

$dy = \frac{x(y^2+1)}{y}\,dx$

$\int \frac{y}{y^2+1}\,dy = \int x\,dx \rightarrow \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{x^2}{2} + c$

$\ln(y^2+1) = x^2 + c_2 \rightarrow e^{\ln(y^2+1)} = e^{x^2+c_2}$

$y^2+1 = e^{x^2}e^{c_2} \rightarrow y^2+1 = Ae^{x^2}$

Una solucion general de forma implicita

17. $y' = 1+x+y+xy$

$\frac{dy}{dx} = 1+x+y+xy \rightarrow \frac{dy}{dx}\ (1+x)+(y+xy)$

$$\frac{dy}{dx} = (1+x) + y(1+x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y)$$

$$dy = (1+x)(1+y)\,dx$$

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int (1+x)\,dx \rightarrow \ln(1+y) = x + \frac{x^2}{2} + c$$

$$e^{\ln(1+y)} = e^{x+\frac{1}{2}x^2+c} \rightarrow e^{\ln(1+y)} = e^{x+\frac{1}{2}x^2}\, e^{c}$$

$$1+y = Ae^{\frac{1}{2}x^2+x} \rightarrow y(x)\, Ae^{\frac{1}{2}x^2+x} - 1$$

Una solucion general de forma explicita

18. $x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$

$$x^2\frac{dy}{dx} = (1-x^2) + (y^2 - x^2y^2) \rightarrow x^2\frac{dy}{dx} = (1-x^2) + y^2(1-x^2)$$

$$x^2\frac{dy}{dx} = (1-x^2)(1+y^2) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2}{x^2} \cdot (1+y^2)$$

$$dy = \frac{1-x^2}{x^2}(1+y^2)\,dx$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{1-x^2}{x^2}\,dx \rightarrow \int \frac{dx}{1+y^2} = \frac{1}{x^2} - 1\,dx$$

$$\arctan y = \frac{-1}{x} - x + c \rightarrow y(x) = \tan\left(c - x - \frac{1}{x}\right)$$

Una solución general de forma explicita

25. $x\frac{dy}{dx} - y = 2x^2y, \quad y(1)=1$

$x\frac{dy}{dx} = 2x^2y + y \rightarrow x\frac{dy}{dx} = y(2x^2+1)$

$\frac{dy}{dx} = y\frac{(2x^2+1)}{x} \rightarrow dy = y\cdot\frac{(2x^2+1)}{x}dx$

$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{2x^2+1}{x}dx \rightarrow \int\frac{dy}{y} = \int 2x + \frac{1}{x}dx$

$\ln y = \frac{2x^2}{2} + \ln x + c \rightarrow \ln y = x^2 + \ln x + c$

$e^{\ln y} = e^{x^2+\ln x+c} = e^{x^2}e^{\ln x}e^{c}$

(solución general $y = Axe^{x^2}$; debido a que el P.V.I establece forma explicita)

que $y(1)=1$

$1 = A(1)e^{(1)^2}$

$1 = Ae$

$y(x) = \frac{1}{e}xe^{x^2} \leftarrow \frac{1}{e} = A$

$y(x) = xe^{x^2-1}$ (La solución particular de forma explicita al PVI $y(1)=1$)

27. $\frac{dy}{dx} = 6e^{2x-y}, \quad y(0)=0$

$\frac{dy}{dx} = 6e^{2x}e^{-y} \rightarrow dy = 6e^{2x}e^{-y}dx$

$$\frac{dy}{e^{-y}} = 6e^{2x}\,dx$$

$$\int e^{y}\,dy = \int 6e^{2x}\,dx \rightarrow e^{y} = \frac{6e^{2x}}{2} + c$$

$$e^{y} = 3^{e^{2x}} + c$$

Debido a que el PVI establece que $y(0) = 0$

$$e^{0} = 3e^{2(0)} + c$$

$$1 = 3 + c$$

$$-2 = c$$

$$e^{y} = 3e^{2x} - 2$$

$$\ln e^{y} = \ln(3e^{2x} - 2)$$

$$y(x) = \ln(3e^{2x} - 2) \rightarrow$$

Solucion particular para el PVI $y(0)=0$