PROPOSIÇÃO 8.8

Edivaldo Soares Vieira de Atahide

22 de novembro de 2019

Proposição 8.8

Se ABCD e um tetraedro Trirretângulo em D, com $\overline{AB} = a$, $\overline{BD} = b$, $\overline{CD} = c$, então:

(a) a face ABC e um triângulo acutângulo.

(b) o pé da altura de ABCD baixada a partir de D Coincide com o ortocentro da face ABC.

(c) o raio da esfera circunscrito a ABCD mede $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Demonstração, (a) a face ABC e um triângulo acutângulo.

Demonstração, (a) a face ABC e um triângulo acutângulo.

Pelo teorema de Pitágoras temos

$$\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2};$$

Demonstração, (a) a face ABC e um triângulo acutângulo.

Pelo teorema de Pitágoras temos

$\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$;

$\overline{BC}=\sqrt{b^2+c^2}$;

Demonstração, (a) a face ABC e um triângulo acutângulo.

Pelo teorema de Pitágoras temos

$\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$;
$\overline{BC}=\sqrt{b^2+c^2}$;
$\overline{AC}=\sqrt{a^2+c^2}$.

Demonstração, (a) a face ABC e um triângulo acutângulo.

Pelo teorema de Pitágoras temos

$$\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2};$$
$$\overline{BC}=\sqrt{b^2+c^2};$$
$$\overline{AC}=\sqrt{a^2+c^2}.$$

Suponhamos que o segmento $\overline{AB} > \overline{AC}$ e $\overline{AB} > \overline{BC}$.

Demonstração, (a) a face ABC e um triângulo acutângulo.

Pelo teorema de Pitágoras temos

$\overline{AB}$=$\sqrt{a^2+b^2}$;
$\overline{BC}$=$\sqrt{b^2+c^2}$;
$\overline{AC}$=$\sqrt{a^2+c^2}$.

Suponhamos que o segmento $\overline{AB} > \overline{AC}$ e $\overline{AB} > \overline{BC}$.

Portanto, para ver que ABC é triângulo Acutângulo basta notar que,

$$\overline{AB}^2 < \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

Note que

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

Note que

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = (\sqrt{a^2 + c^2})^2 + (\sqrt{b^2 + c^2})^2 \Leftrightarrow$$

Note que

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = (\sqrt{a^2 + c^2})^2 + (\sqrt{b^2 + c^2})^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2 + c^2 + b^2 + c^2$$

Note que

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = (\sqrt{a^2 + c^2})^2 + (\sqrt{b^2 + c^2})^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2 + c^2 + b^2 + c^2 = a^2 + 2c^2 + b^2$$

Note que

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = (\sqrt{a^2 + c^2})^2 + (\sqrt{b^2 + c^2})^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2 + c^2 + b^2 + c^2 = a^2 + 2c^2 + b^2 > a^2 + b^2$$

Note que

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = (\sqrt{a^2 + c^2})^2 + (\sqrt{b^2 + c^2})^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2 + c^2 + b^2 + c^2 = a^2 + 2c^2 + b^2 > a^2 + b^2 = \overline{AB}^2$$

Note que

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = (\sqrt{a^2 + c^2})^2 + (\sqrt{b^2 + c^2})^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2 + c^2 + b^2 + c^2 = a^2 + 2c^2 + b^2 > a^2 + b^2 = \overline{AB}^2$$

Logo,

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 > \overline{AB}^2$$

Portanto, o triângulo ABC é acutângulo para $\overline{AB} > \overline{AC}$ e $\overline{AB} > \overline{BC}$.

Note que

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = (\sqrt{a^2 + c^2})^2 + (\sqrt{b^2 + c^2})^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2 + c^2 + b^2 + c^2 = a^2 + 2c^2 + b^2 > a^2 + b^2 = \overline{AB}^2$$

Logo,

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 > \overline{AB}^2$$

Portanto, o triângulo ABC é acutângulo para $\overline{AB} > \overline{AC}$ e $\overline{AB} > \overline{BC}$.
Analogamente a prova é válida para $\overline{BC}^2 < \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ e $\overline{AC}^2 < \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$

Demonstração, (b) o pé da altura de ABCD baixada a partir de D Coincide com o ortocentro da face ABC.

Demonstração, (b) o pé da altura de ABCD baixada a partir de D Coincide com o ortocentro da face ABC.

Se P e o pé da altura de ABCD baixada a partir de D (Figura 1) então $\overleftrightarrow{DP} \perp \overleftrightarrow{BC}$.

Mas, como $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$, segue que $\overleftrightarrow{BC} \perp (ADP)$. Dai, $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AP}$, de sorte que $\overleftrightarrow{AP}$ é a reta suporte de uma altura da face ABC.

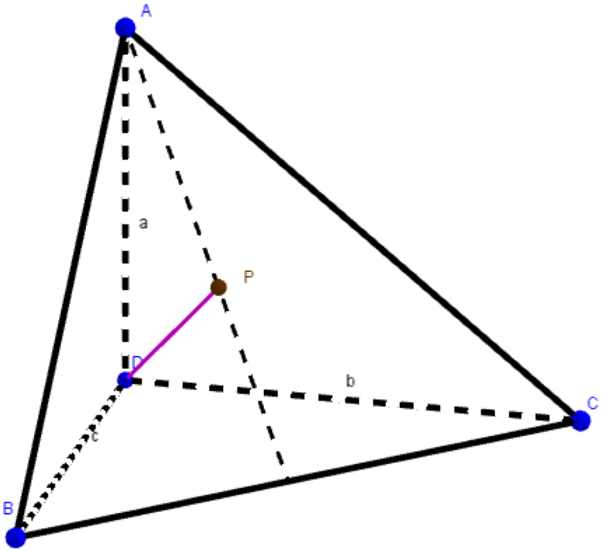

Figura 1

Analogamente, mostramos que $\overleftrightarrow{BP}$ e $\overleftrightarrow{CP}$ sao as retas suportes das outras duas alturas da face ABC, de modo que P é o ortocentro de tal face.

Demonstração, (C) o raio da esfera circunscrito a ABCD mede $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Demonstração, (C) o raio da esfera circunscrito a ABCD mede $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Construa os Pontos X, Y, Z e W, tais que ADBZ, ADCY e BDCX sejam retângulos.

Demonstração, (C) o raio da esfera circunscrito a ABCD mede
$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Construa os Pontos X, Y, Z e W, tais que ADBZ, ADCY e BDCX sejam retângulos.

Então, uma vez que ABCD e trirretângulo, e imediato concluir que ADBZYCXW e um paralelepípedo retângulo.

Demonstração, (C) o raio da esfera circunscrito a ABCD mede $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Construa os Pontos X, Y, Z e W, tais que ADBZ, ADCY e BDCX sejam retângulos.

Então, uma vez que ABCD e trirretângulo, e imediato concluir que ADBZYCXW e um paralelepípedo retângulo.

Se Σ é a esfera circunscrita a tal paralelepípedo (pela proposição 8.7: Um paralelepípedo é inscritível se, e só se, for reto retângulo. Nesse caso, sendo a, b e c os comprimento das aresta do paralelepípedo e R o raio de sua esfera circunscrita, temos R = $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$), então Σ também circunscreve ABCD. Sendo R o raio de Σ, segue da proposição acima que $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.