

12月14日作业

1. 函数 $f(x) = \log_{0.5}(x-1)$ 的定义域是 $(1, +\infty)$.

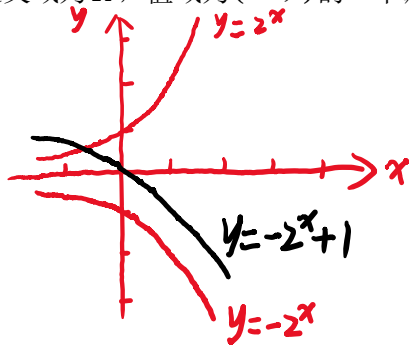
$$\because x-1 > 0 \therefore x > 1$$

2. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = \ln x$, 则 $f(-\frac{1}{e})$ 的值是 1.

设 $x < 0$ 则 $-x > 0$, $\therefore f(x) = -f(-x) = -\ln(-x)$. (奇函数 $f(-x) = -f(x)$)

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \ln x & (x > 0) \\ -\ln(-x) & (x < 0) \end{cases} \quad \therefore f(-\frac{1}{e}) = -\ln(\frac{1}{e}) = 1$$

3. 定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为 $(-\infty, 1)$ 的一个减函数是 $y = -2^x + 1$.



如图构造函数.

4. 已知函数 $f(x) = |\log_5 x|$. 若 $f(x) < f(2-x)$, 则 x 的取值范围是 $(1, 2)$.

$$\therefore \begin{cases} x > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \quad \therefore 0 < x < 2 \quad \therefore f(x) \neq f(2-x)$$

$$\therefore x \neq 1 \quad \therefore x \in (0, 1) \cup (1, 2)$$

① 若 $x \in (0, 1)$ 则 $1 < 2-x < 2$

$$\therefore |\log_5 x| < |\log_5 (2-x)|$$

$$-\log_5 x < \log_5 (2-x)$$

$$\therefore \frac{1}{x} < 2-x \quad \therefore 1 < 2x - x^2$$

$$\therefore x^2 - 2x + 1 < 0 \quad \text{即 } (x-1)^2 < 0 \quad \therefore x \in \emptyset$$

② 若 $x \in (1, 2)$ 则 $0 < 2-x < 1$

$$\therefore |\log_5 x| < |\log_5 (2-x)|$$

$$\log_5 x < -\log_5 (2-x)$$

$$x < \frac{1}{2-x}$$

$$2x - x^2 < 1$$

$$\therefore x^2 - 2x + 1 > 0 \quad \text{即 } (x-1)^2 > 0 \quad \therefore x \in (1, 2).$$

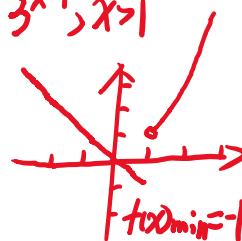
5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (2-a)x, & x \leq 1 \\ a^{x-1}, & x > 1 \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$). 给出下列四个结论:

① 存在实数 a , 使得 $f(x)$ 有最小值; ① 当 $a=3$ 则 $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 1 \\ 3^{x-1}, & x > 1 \end{cases}$

② 对任意实数 a ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), $f(x)$ 都不是 $\mathbf{R}$ 上的减函数;

③ 存在实数 a , 使得 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$;

④ 若 $a > 3$, 则存在 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $f(x_0) = f(-x_0)$.

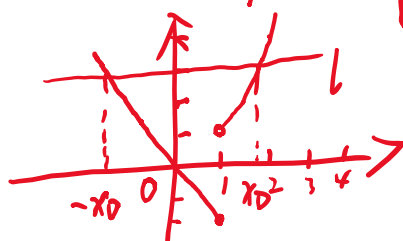


其中所有正确结论的序号是 ①, ②, ④

② 若 $f(x)$ 是减函数则 $\begin{cases} 2-a < 0 \\ 0 < a < 1 \end{cases} \therefore \begin{cases} a > 2 \\ 0 < a < 1 \end{cases}$ 不存在.

③ 当 $x=1$ 时当且仅当 $2-a = a^0$ 时即 $a=1$ 时函数连续
 $\because a \neq 1 \therefore f(x)$ 不连续

④ 若 $a=4$ 则 $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 1 \\ 4^{x-1}, & x > 1 \end{cases}$ 的图象如下:



在直线 l 从下往上平移
 过程中一定存在 $f(x_0) = f(-x_0)$.