

Digitalisierung & Digitalität im MU

Hans-Jürgen Elschenbroich

Hamburg, 28.6.2023
Bremerhaven 13.11.2023

Agenda

1. Prolog
2. Digitalisierung & Digitalität
3. Digitale Medien & Werkzeuge im MU
4. Alte Aufgaben - Neue Werkzeuge?
5. Neue Werkzeuge - neue Aufgaben!
6. Fazit

1. Prolog

1. Politik: Bildung in der digitalen Welt



Dieses Titelbild spricht Bände (unfreiwillig ...!)

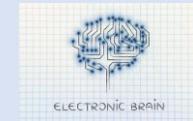
1. Politik: DigitalPakt Schule

- „Der Bund stellt über einen Zeitraum von fünf Jahren insgesamt fünf Milliarden Euro zur Verfügung, davon in dieser Legislaturperiode 3,5 Milliarden Euro. Aufgrund des Charakters der Bundesmittel als Finanzhilfen bringen die kommunalen und privaten Schulträger bzw. Länder zusätzlich einen finanziellen Eigenanteil ein. Zusammengekommen stehen dann insgesamt mindestens 5,55 Milliarden Euro bereit.“
- Rein rechnerisch bedeutet dies für jede der ca. 40.000 Schulen in Deutschland im Durchschnitt einen Betrag von **137.000 Euro** oder umgerechnet auf die derzeit ca. 11 Millionen Schülerinnen und Schüler eine Summe von **500 Euro pro Schüler**.
- „Förderfähig sind insbesondere die breitbandige **Verkabelung** innerhalb der Schulen bis zum Klassenzimmer, die **WLAN-Ausleuchtung** sowie stationäre Endgeräte wie zum Beispiel **interaktive Tafeln**.“
- iPad-Ausstattungselle.

Geräte-Offensive!

Was ist mit Software, Lehrer-Fortbildung und technischer Unterstützung?

1. Pädagogik: „Kein Mensch lernt digital“



Genialer Titel! Aber auch Nebelkerze!

1. Lankau: Kein Mensch lernt digital

- Medienpädagogisches Buch, nicht (fach-)didaktisch.
- Zustimmung zu vielen allgemeinen Aussagen (Allgemeinplätze).
- Zentrales Kapitel **5 Medien, Technik, Unterricht** nur 10% der Seiten.
- Keine brauchbaren Aussagen zum Lernen mit digitalen Medien! Schon gar nicht für Mathematik.
- Fehlanzeige, wie man kann **mit** digitalen Werkzeugen mehr, besser, nachhaltiger lernen könnte.

- Vortrag: <https://www.geogebra.org/m/bfge3aae>



2. Digitalisierung & Digitalität

2. Macht der Computer schlau?



Das Handy macht schlauer als gedacht

Titel in der Rheinischen Post 8.11.2019

Der Computer alleine macht (beim Lernen) erst mal garnichts!
Auch lernt man mit 2 Computern nicht besser als mit 1.

2. Digitalisierung? Digitalität!

„Zu einer erfolgreichen schulischen Digitalisierung gehört mehr als Geräte, PDFs und WLAN, es müssen die **schulischen Lern- und Lehrprozesse** neu gedacht und neu gestaltet werden.“

„Wer aber Digitalisierung so versteht und organisiert, dass alles nur noch digital gehen soll, begeht auch einen folgenschweren Fehler.“

Wir müssen uns immer wieder neu überlegen: Was sollen Schüler noch per Hand können und tun und was nicht (mehr)?
Das ist der Kern der Digitalität in der Schule.“

(Elschenbroich, 2019)

<https://www.geogebra.org/m/tde33heb#material/qt938wrs>



3. Digitale Medien & Werkzeuge im MU

3. Werkzeuge

Die Entwicklung der Menschheit ist eine Geschichte der Entwicklung der Werkzeuge.

„Wer nur einen Hammer hat, für den besteht die Welt aus lauter Nägeln.“



3. Artefakt – Instrument

- Unterscheidung Artefakt – Instrument.
- Gitarre als Artefakt: Holzkasten mit Drähten.

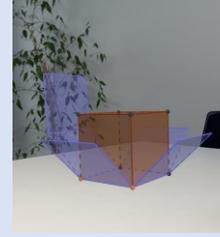


- **Konzept der instrumentalen Genese**
Es geht darum, dass „ein Nutzer sich ein zunächst allgemeines ‚Artefakt‘ zu eigen macht, zum ‚Instrument‘ macht, um es für die eigenen mathematischen Handlungen und Intentionen zu nutzen.“
(Barzel, 2016)



3. Instrumentale Genese

- Gilt auch für mathematische Werkzeuge!
- iPad = Metallbox mit Chips, Drähten und Bildschirm.
- „Transforming any tool into a mathematical instrument for students involves a complex 'instrumentation' process".
(Guin & Trouche, 1998).
Instrumentale Genese.



3. Mathematische Werkzeuge

Die Geschichte der Mathematik ist eine Geschichte der Entwicklung ihrer Werkzeuge.

- Geometrie der antiken Griechen: Zirkel und Lineal.
- Heute Geodreieck, DGS.
- Parabelzirkel, Pantograph (Storchenschnabel).
- Integraph, Differentiograph.
- Rechenschieber.
- Rechenmaschinen.
- ...

3 Digitale Werkzeuge im MU

- TR, GTR
- Computer/ Laptop, Tablet, (Smartphone)
- Digitale Tafel, Beamer etc.
- Typische Mathematik-Software:
 - Dynamische Geometrie-Software (DGS)
 - Tabellenkalkulation
 - Funktionenplotter
 - Computer-Algebra Software (CAS)
 - 3D Geometrie Software
 - Stochastik-Software
- Modulare Mathematik-Systeme MMS (z. B. GeoGebra, TI-Nspire)

3. Passende Werkzeuge

- Werkzeug: Ein Hilfsmittel, um auf etwas einzuwirken.
- Das Werkzeug muss zur Aufgabe passen! Und umgekehrt!
- Auswahlkompetenz!



3. Werkzeug-Kompetenzen im MU

- Nicht nur Bedienkompetenz!
„Werkzeugkompetenz bedeutet, mit Werkzeugen kompetent Mathematik zu betreiben.“
(Heintz, Elschenbroich et al, 2017)
- Auswahlkompetenz, Bedienkompetenz, Dokumentation & Reflexion, Entschleunigung, Zielgerichtetheit, **dynamische Visualisierung, systematische Variation.**



<https://www.geogebra.org/m/ffkqscrc>

3. Lernwerkzeuge

- „Gute Lernwerkzeuge sorgen für eine Arbeitserleichterung und ermöglichen bzw. unterstützen wichtige **Lernaktivitäten**.“ (Elschenbroich 2011).
- „Digitale Werkzeuge eröffnen mathematische Erfahrungsräume, die ohne diese nur schwer zugänglich wären. Wir sehen dabei im Wesentlichen zwei Prinzipien, die den Nutzen digitaler Werkzeuge verdeutlichen: die **systematische Variation** und die **dynamische Visualisierung**.“ (Heintz et al, 2017).
- „Der Lehrer ist gefordert, geeignete **Lerngelegenheiten** mit genügend Raum für eigene Erkundungen der Schüler zu schaffen.“ (Elschenbroich & Heintz, 2008)



3 Dynamische Lernumgebungen

- Vom leeren Bildschirm an alles selber konstruieren (lassen) oder
- Mit dynamischen Arbeitsblättern als Lernumgebung arbeiten.



Werkzeug: Universell einsetzbar



Lernumgebung: Vorgegebener didaktisierter Rahmen



- Frühe Bezeichnung: Elektronische Arbeitsblätter (Heintz, Pinkernell & Schacht, 2016)

4. Alte Aufgaben - Neue Werkzeuge ?

4 Alte Aufgaben – Neue Werkzeuge (Algebra, Geometrie)

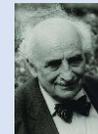
- „Waren früher einfache Additionen und Multiplikationen **Grundoperationen**, so machte der Taschenrechner beispielsweise das Berechnen von Wurzeln, das Potenzieren oder Logarithmieren zu Grundoperationen, der Funktionsplotter das Zeichnen von Funktionsgraphen, die Computeralgebra das Gleichungslösen, Differenzieren, Integrieren oder Matrizenrechnen.“
- „War früher mit Zirkel und Lineal das Zeichnen von Punkten, Geraden und Kreisen eine Grundoperation, so machte das Geodreieck das Konstruieren von Senkrechten und Parallelen zur Grundoperation. Dynamische Geometrie-Software [...] fügt das Konstruieren von Mittelsenkrechten, Winkelhalbierenden, das dynamische Messen von Abständen und Winkeln und das Zeichnen von Ortslinien hinzu.“ (Elschenbroich 2011)

4 Alte Aufgaben – Neue Werkzeuge (Raumgeometrie)

- War es früher eine aufwändige Aufgabe in der Darstellenden Geometrie, brauchbare Schrägbilder von dreidimensionalen Objekten zu zeichnen, so wird das heute (nach Definition des Körpers) von 3D-Software automatisch geliefert. Der Bildschirm ist ja schon ein ebenes Anzeige-Medium.
- Auch können bei geeigneten Lernumgebungen die Ansichten auf dem Bildschirm (Kavalierverspektive, Isometrie, Zentralperspektive, ...) mit Mausclick gewechselt werden.
- Musste früher die ‚wahre Länge‘ einer schräg projizierten Strecke durch entsprechende Aktivitäten in und anhand einer ebenen Zeichnung ermittelt werden, so werden heute in Raumgeometrie-Software einfach Längen oder Abstände gemessen.

4 Alte Aufgaben – Neue Werkzeuge

- „Wenn unser Unterricht heute darin besteht, dass wir Kindern Dinge eintrichtern, die in einem oder zwei Jahrzehnten besser von Rechenmaschinen erledigt werden, beschwören wir Katastrophen herauf.“ (Freudenthal, 1974)



4 Alte Aufgaben – Neue Werkzeuge

- „Wir können unseren Kindern nicht beibringen, mit Maschinen zu konkurrieren. [...]

Alles was wir lehren, muss sich von Maschinen unterscheiden.

Wenn Maschinen es besser können, müssen wir nochmal darüber nachdenken.“

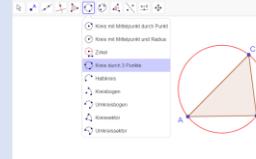
(Jack Ma, World Economic Forum 2018)



4 Alte Aufgaben – Neue Werkzeuge (Geometrie)

- Alte Aufgabe: Umkreis eines Dreiecks konstruieren

- Neues Werkzeug GeoGebra:
Befehl Kreis durch 3 Punkte.



4 Alte Aufgaben – Neue Werkzeuge (Arithmetik)

- Alte Aufgabe: $\sqrt{12345}$
- Per Hand ausrechnen?
- Tafelwerk? Rechenschieber?

- Neues Werkzeug:
Taschenrechner, App



4 Alte Aufgaben – Neue Werkzeuge (Algebra)

- Alte Aufgabe: Quadratische Gleichung
- p-q-Formel?
- Quadratische Ergänzung?
- TR: numerische Lösung
- Neues Werkzeug: App Photomath

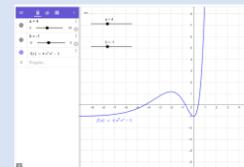
$$x^2 - 3x - 2 = 0$$



4 Alte Aufgaben – Neue Werkzeuge (Funktionen)

- Alte Aufgabe: Kurvendiskussion.
 $f(x) = 4x^2e^x - 1$
- Ableitungen, Nullstellen etc.
- Graph skizzieren

- „Neues“ Werkzeug: Funktionenplotter (GeoGebra Grafikrechner-App).
 $f(x) = \dots$, Nullstellen, Extremum.
Mit Parametern „spielen“.



4 Alte Aufgaben – Neue Werkzeuge (ChatGPT)

- Aktuelle aufgeregte Diskussion: ChatGPT.
„Chatbot, der künstliche Intelligenz“ ist ein [Chatbot, der künstliche Intelligenz](#) einsetzt, um mit Nutzern über textbasierte Nachrichten zu kommunizieren.
Er nutzt moderne maschinelle Lerntechnologie, um Antworten zu generieren, die natürlich klingen und für das Gespräch relevant sein sollen.“
- Diskussion: „Kann‘ ChatGPT Mathe?“
- Aktuell: Vorwiegend **Verbotdiskussion**.



5. Neue Werkzeuge - neue Aufgaben!

5. Digitale Lernumgebungen konkret (mit GeoGebra)

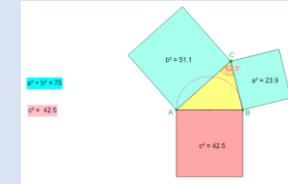
1. Geometrie
2. Algebra
3. Funktionen
4. Raumgeometrie
5. Analysis
6. Stochastik



Wechsel nach

www.geogebra.org/m/zrkxve7g

5.1 Geometrie: Satz des Pythagoras

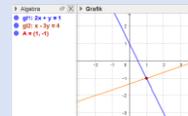


5.1 Geometrie: Satz des Pythagoras

- Klassisch: Starre Satzformulierung und Beweis.
- Dynamische Visualisierung.
- Systematisches Variieren (Zugmodus, Schieberegler), Entdecken.
- Mächtige Tools von GeoGebra.
- Sinnvolle Fallunterscheidungen finden.
- Invarianz finden. Verallgemeinerung.
- Verstehen: „warum muss das so sein?“, visueller Beweis.
- Lokales Vernetzen (Satz des Thales).

5.2 Algebra: 3x3 LGS

- Bei 2x2 LGS ist die grafische Lösung selbstverständlich.
- Bei 3x3 LGS ?



5.2 Algebra: 3x3 LGS

- 2x2 LGS: rechnerische Lösung und graphische Lösung.
- Klassisch 3x3 LGS: Kalkül ohne eine graphische Vorstellung.
- Dynamische Visualisierung.
- Intuitive Nutzung mächtiger Tools.
- Übertragen des graphischen Lösungsprinzips aus 2D in 3D.
- Systematisches Variieren, Finden der Sonderfälle.
- Keine Probleme durch Rechenfehler, da Rechenarbeit ausgelagert. Konzentration auf das hier Wesentliche.

5.3 Quadr. Funktionen: Scheitelpunktform

- Klassisch: Quadratische Ergänzung.

von der allg. Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ zur Scheitelpunktform $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$:

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 19$$

$$2\left(x^2 - \frac{12}{2}x\right) + 19 = 2(x^2 - 6x) + 19$$

$$2\left(x^2 + 2\left(-\frac{12}{4}\right)x\right) + 19 = 2(x^2 + 2(-3)x) + 19$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$2(x^2 + 2(-3)x + (-3)^2) + 19$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$2(x^2 + 2(-3)x + (-3)^2) - 2(-3)^2 + 19$$

$$2(x - 3)^2 - 18 + 19$$

$$2(x - 3)^2 + 1$$

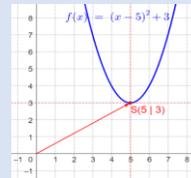
$$3(x - 3)^2 + 1$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$x_0^2 \quad y_0^2$$

- Digitale Fundsache auf GeoGebra.org.
- Wo ist da der Unterschied digital – analog?

5.3 Quadr. Funktionen: Scheitelpunktform

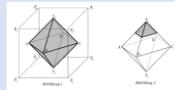


5.3 Quadr. Funktionen: Scheitelpunktform

- Klassisch: algebraisch, quadratische Ergänzung & binomische Formeln.
- Alternativ: Dynamische Visualisierung, graphischer Ansatz.
- Vom Kopf auf die Füße gestellt.
- Systematisches Variieren, Entdecken des Bildungsgesetzes.
- Mächtige Tools von GeoGebra nutzen.
- Auf die Nullstellen-Berechnung erweitern!

5.4 3D-Geometrie: Oktaeder

- „Oktaeder des Grauens“ im Zentralabitur NRW 2008



e) Von dem Oktaeder werden sechs Pyramiden mit dem gleichen Volumen V_p so abgeschitten, dass jede Ecke des Oktaeders die Spitze einer Pyramide und die Grundfläche jeder abgeschrittenen Pyramide parallel zur gegenüberliegenden Würfelfläche ist (vgl. Aufgabenteil d)). Es entsteht ein Restkörper R_6 ($0 < a \leq \frac{1}{2}$).

Beschreiben Sie die Eigenschaften dieses Restkörpers R_6 für $a = \frac{1}{3}$ und $a = \frac{1}{2}$ hinsichtlich der Anzahl und Eigenschaften seiner Seitenflächen. (8 Punkte)

5.4 3D-Geometrie: Oktaeder



5.4 3D-Geometrie: Oktaeder

- Klassisch: ? Weitgehend Fehlanzeige.
- Dynamische Visualisierung.
- Systematisches Variieren.
- Lernumgebung erstellen. Einblenden/ Ausblenden von Objekten.
- Im digitalen Modell kann man systematisch experimentieren, wie es real nicht möglich ist.
- Schulung der Raumvorstellung.

5.5 Analysis: Steigung, Funktionenlupe

- Klassischer Ansatz analytisch: Sekanten, Differenzenquotient, Grenzwert bilden.
- Regeln für Grundfunktionen und zusammengesetzte Funktionen herleiten.
(x^n)' = $n \cdot x^{n-1}$, ($f(g(x))$)' = $g'(x) \cdot f'(g(x))$ usw.
- Kein graphischer Zugang.

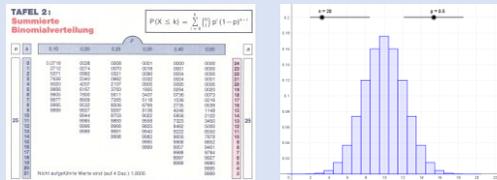
5.5 Analysis: Steigung, Funktionenlupe



5.5 Analysis: Steigung, Funktionenlupe

- Dynamische Visualisierung (Idee Funktionenmikroskop von Kirsch).
- Systematisches Variieren.
- Fehlvorstellungen vorbeugen.
- Mächtige Tools von GeoGebra nutzen.
- Entlastung von längeren und fehleranfälligen Rechnungen („Rechenknecht“).
- Konzentration auf das mathematisch Wesentliche.

5.6 Stochastik: Binomialverteilung



Analog: Tafelwerk mit ausgewählten einzelnen Werten

Digital: Gesamte Verteilung als Diagramm samt Kenngrößen.
Einzelne Werte natürlich auch möglich.

5.6 Stochastik: Binomialverteilung

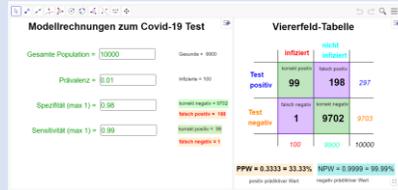
- Klassischer Ansatz: Einzelne Werte aus Tafelwerken.
Modern aber immer noch klassisch: Rechnen mit TR/ GTR.
- Verteilungsfunktionen: mühsam, aufwändig.
- Daher gerne Approximation durch Normalverteilung.
- Alternativ: Direkt zu Verteilungen als solchen.

5.6 Stochastik: Binomialverteilung

- Dynamische Visualisierung.
- Systematisches Variieren, Entdecken.
- Mächtige Tools von GeoGebra nutzen.
- Die ganze Verteilung im Blick und als Objekt.
- Entlastung von längeren und fehleranfälligen Rechnungen („Rechenknecht“),
keine Beschränkung auf tabellierte Werte.
- Konzentration auf das mathematisch Wesentliche.

5.8 Stochastik: Vierfeldertafel

- Zuverlässigkeit von Covid 19 Tests



6. Fazit

6 Fazit

Immer wieder auftretend:

- Dynamische Visualisierung.
- Systematische Variation.
- Gesetzmäßigkeiten entdecken (Invarianzen) und Sonderfälle.
- Fehlvorstellungen vorbeugen.
- Entlastung von längeren und fehleranfälligen Rechnungen.
- Konzentration auf das mathematisch (!) Wesentliche.

6 Fazit

Digitale Werkzeuge und **digitale Lernumgebungen** können

- Lernprozesse initiieren, unterstützen, fördern
- geometrische Ansätze gegenüber Algebra- und Analysis-lastigen Ansätze unterstützen
- Anschauung fördern und unterstützen
- von Rechnungen entlasten und die Konzentration auf das Wesentliche fördern
- wichtige Themen (ggf. wieder) lebendig machen.

6 Fazit

- Es soll aber nicht „alles nur noch mit dem Computer gemacht werden“. Eine Entschleunigung und eine Verbindung mit Handlungsorientierung (Heintz, 2016) ist wichtig.
- Der Computer ist an sich ein Verstärker:
Richtig eingesetzt kann man mit ihm guten MU besser machen.
Falsch eingesetzt kann er schlechten MU auch schlechter machen.
„Auf den Lehrer kommt es an!“
- Ein Werkzeug zum Instrument machen: Instrumentelle Genese.
Parallele: Gitarrenlehrer – Mathelehrer.
- Wenn **neue Werkzeuge** entstehen, kann man sie nicht dauerhaft verhindern.
Sinnvolles Herangehen: Aufgaben anpassen, **neue Aufgabenkultur**.
- Es braucht eine Strategie zur systematischen Entwicklung von **Digitalität**.



Kontakt

elschenbroich@t-online.de

Literatur

- Barzel, Rärbel (2016): Arbeiten mit CAS aus fachdidaktischer Perspektive. In: Heintz, G., Pinkernell, G. & Schacht, F. (Hrsg.): Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht. MNU. S. 154 - 165
- Elschenbroich, H.-J. Beiträge zur Digitalisierungsdebatte. GeoGebra Book <https://www.geogebra.org/m/tdc33heb>
- Elschenbroich, H.-J. (2019): Digitalisierung oder Digitalität? In: MNU journal 5/2019. S. 256 - 257
- Elschenbroich, H.-J. (2016): Gedanken zum Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht. In: MNU Journal 6/2016. S. 370 - 374.
- Elschenbroich, H.-J. (2011): Digitale Medien und Werkzeuge im Mathematikunterricht. In: Elschenbroich, H.-J. & Greefrath, G. (Hrsg.): Mathematikunterricht mit digitalen Medien und Werkzeugen. MV-Wissenschaft. S. 8 - 10
- Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (2011 - 2014): Geometrie entdecken! Mit GeoGebra. Teil 1 - 3. coTec (mittlerweile MasterTool.shop)
- Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (2018): Funktionen erkunden. Ideenreiche Arbeitsblätter mit GeoGebra. Friedrich Verlag.
- Elschenbroich, H.-J. & Heintz, G. (2008): Kompetenzen und Methoden. In: Elschenbroich, H.-J. & Heintz, G. (Hrsg.): Medien - Methoden - Kompetenzen. Der Mathematik-Unterricht 6/2008. Friedrich Verlag
- Heintz, G., Elschenbroich, H.-J., Laakmann, H., Langlotz, H., Rößig, M., Schacht, F., Schmidt, R. & Trietz, C. (2017): Werkzeugkompetenzen. Kompetent mit digitalen Werkzeugen Mathematik betreiben. MNU, Verlag Medienstadt
- Heintz, G. (2016): Handlungsorientierung mit alten und neuen Werkzeugen. In: Heintz, G., Pinkernell, G. & Schacht, F. (Hrsg.): Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht. MNU. S. 36 - 50
- Heintz, G., Pinkernell, G. & Schacht, F. (2016): Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge. In: Heintz, G., Pinkernell, G. & Schacht, F. (Hrsg.): Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht. MNU. S. 12 - 21
- Lankau, R. (2017): Kein Mensch lernt digital. Beltz