Πανεπιστήμιο Αθηνών
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα
Διδακτικής και Μεθοδολογίας
των Μαθηματικών

Ενσωμάτωση της Τεχνολογίας στη Δ.τ.Μ

δύναμη σημείου ως προς κύκλο

Διδακτική παρέμβαση για τη Β΄ Λυκείου

Μ. Τσιλπιρίδης
Μαθηματικός MSc Δ.τ.Μ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Μεταπτυχιακό Τμήμα

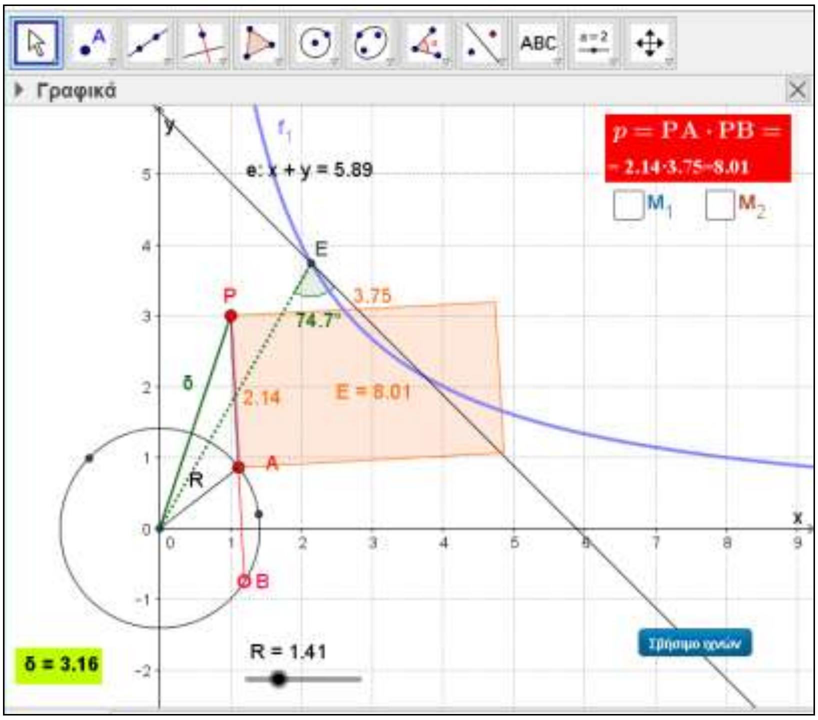
Τομέας: Διδακτική & Μεθοδολογία των Μαθηματικών

Ενσωμάτωση της Τεχνολογίας στη Δ.τ.Μ

Διδάσκων: Γ. Ψυχάρης

Δύναμη σημείου ως προς κύκλο:
“ένας αθέατος κόσμος συμμεταβολών”

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

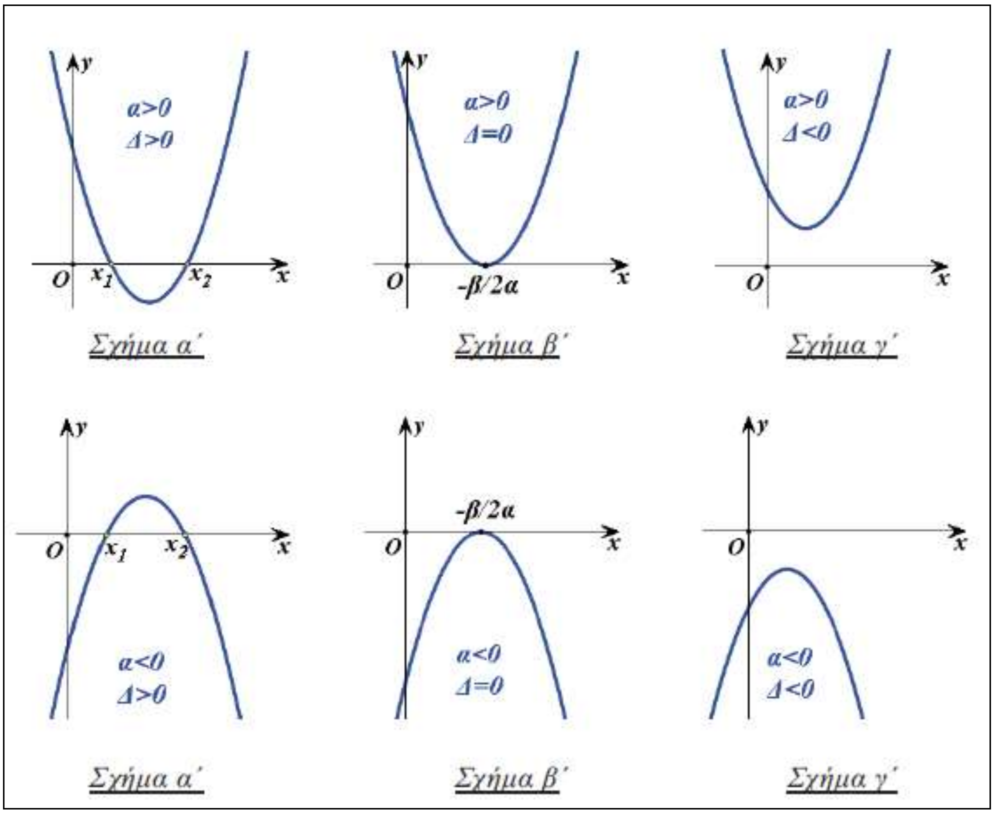


[17/12/2015]

Μ. Τσιλπιρίδης – Μαθηματικός MSc Δ.τ.Μ

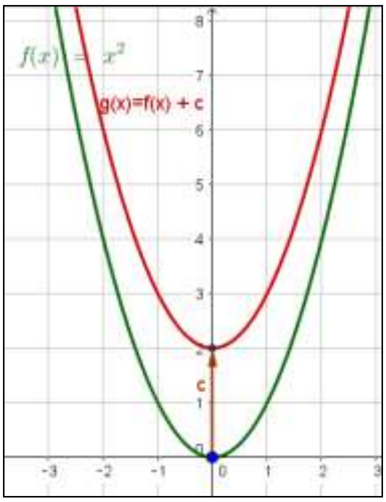
Υπενθυμίσεις Βασικών Γνώσεων

I. Η συνάρτηση του τριωνύμου: $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$

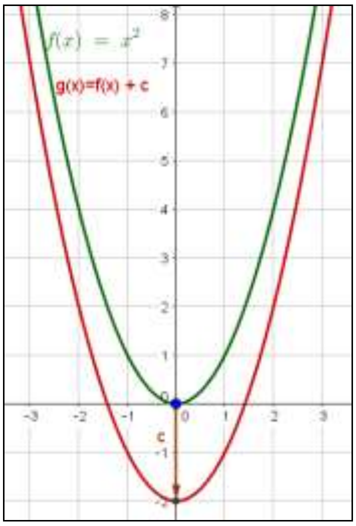


II. **Κατακόρυφες μετατοπίσεις της συνάρτησης:** $f(x)=x^2$

c>0



c<0



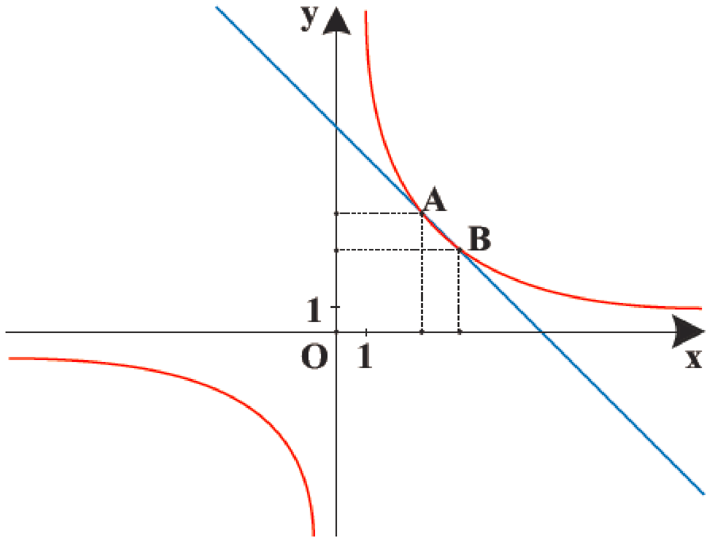
III. Σχετική θέση υπερβολής και ευθείας. Γραφική επίλυση μη γραμμικών συστημάτων (Εφαρμογή σχολικού Άλγεβρας σελ. 25.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ο Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x+y=5 & (1) \\ xy=6 & (2) \end{cases}$.

ΣΧΟΛΙΟ

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος x+y=5 παριστάνει ευθεία, ενώ η δεύτερη εξίσωση xy=6 παριστάνει την υπερβολή $y=\frac{6}{x}$. Επομένως οι συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της υπερβολής θα μας δώσουν τις λύσεις του συστήματος.



Φύλλο Εργασίας ([1])

1η Φάση

Στη δραστηριότητα υπάρχουν:

Ένα σημείο P, ένας κύκλος (O,R) που η ακτίνα του μεταβάλλεται από το δρομέα R η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία P, A και B. Επίσης, υπάρχει η μέτρηση για το γινόμενο $p = PA \cdot PB$.[2]

1. Μετακινήστε το σημείο B στην περιφέρεια του κύκλου. Τι παρατηρείτε για την τιμή του γινομένου $p = PA \cdot PB$;

Ότι είναι σταθερό

2. Προσπαθήστε να εντοπίσετε τις παραμέτρους που καθορίζουν τις τιμές του γινομένου p.

Οι τιμές του γινομένου p εξαρτάται από την ακτίνα R του κύκλου και την απόσταση δ του P από το κέντρο O

3. Πλησιάστε πολύ κοντά τα σημεία A και B. Τι φαίνεται να ισχύει για τη σχετική θέση της ευθείας PAB και του κύκλου;

Ότι είναι εφαπτομένη του κύκλου

4. Πώς μπορείτε να αξιοποιήσετε την προηγούμενη παρατήρηση ώστε να βρείτε τον τύπο που υπολογίζει την τιμή του γινομένου p.

Εφαρμόζουμε Π. Θ στο ορθογώνιο τρίγωνο OPB (όπου PA=PB) και παίρνουμε ότι: $PB^2 = PA \cdot PB = p = \delta^2 - R^2$

5. I. Επαναλάβετε τα βήματα 1 & 2 όταν το σημείο P είναι μέσα στον κύκλο. Ισχύουν τώρα ανάλογα συμπεράσματα με τα βήματα 1 & 2; ☐ Ναι ☐ Όχι

   II. Προσπαθήστε να δώσετε τώρα τον τύπο που δίνει την τιμή του γινομένου p.

Ναι

---

[1] Στα κενά κουτιά δίνονται οι αναμενόμενες από τους μαθητές απαντήσεις.

[2] Για τη δημιουργία ενός μοντέλου, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι η όλη διάταξη είναι αναπαράσταση ενός γεωργικού ποτιστικού μηχανισμού.

Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΡΑ ώστε $OP \perp AB$ και εφαρμόζουμε Π.Θ στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΡ. Τότε θα είναι αντίστοιχα: $p = R^2 - \delta^2$

6. Γενικεύστε τα συμπεράσματα των ερωτήσεων 4 και 5 στο επόμενο πλαίσιο.

7. Βρείτε ένα γεωμετρικό μέγεθος που να περιγράφει το γινόμενο p [3].

Το γινόμενο p μπορεί να περιγράφει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου Ε, με πλευρές PA και PB.

8. Με το σημείο P να είναι εξωτερικό του κύκλου, ανοίξτε το διακόπτη [**Αναπαράσταση**]. Εμφανίζεται ένα ορθογώνιο Ε με πλευρές PA και PB και η μέτρηση τ = PA+PB της ημιπεριμέτρου του.

I. Πειραματιστείτε για διάφορες θέσεις του σημείου Β στον κύκλο (Ο,R) και παρατηρείστε τις τιμές της ημιπεριμέτρου τ. Τί φαίνεται να ισχύει για την περίπτωση που το Β τείνει να ταυτιστεί με το Α;

Η τιμή της ημιπεριμέτρου τ, φαίνεται να παίρνει μια ελάχιστη τιμή.

II. Αλλάξτε διαδοχικά την ακτίνα R του κύκλου (Ο,R) και την απόσταση δ και επαναλάβετε τον πειραματισμό. Διατυπώστε στο πλαίσιο την εικασία σας.

Όταν το Β τείνει να ταυτιστεί με το Α, η τιμή της ημιπεριμέτρου τ, γίνεται ελάχιστη.

9. Τι σχήμα φαίνεται να αποκτά το ορθογώνιο Ε, όταν το Α τείνει να ταυτιστεί με το Β; Δικαιολογείστε την απάντηση σας.

Τετράγωνο, αφού τότε PA=PB

10. Συνδυάζοντας τις παρατηρήσεις σας από το 7^o και 8^o βήμα, διατυπώστε έναν ισχυρισμό που να αφορά στα ευρήματα αυτών των βημάτων.

Από όλα τα ορθογώνια με το ίδιο εμβαδόν, το τετράγωνο έχει την ελάχιστη περίμετρο

[3] Το ορθογώνιο με πλευρές PA και PB, θα μπορούσε να είναι κάποιο πρόσθετο εξάρτημα στο ποτιστικό μηχάνημα που προαναφέρθηκε.

$2^η$ Φάση

11. I. Αν θέσουμε PA=x και PB=y, γράψτε ένα σύστημα (Σ) δύο εξισώσεων με αγνώστους τα x και y που να περιγράφει τα μεγέθη p και τ.

$$\begin{cases} x \cdot y = p \\ x + y = \tau \end{cases} \quad (\Sigma)$$

II. Να δείξετε ότι το σύστημα (Σ) οδηγεί στην εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού: $x^2 - \tau x + p = 0$

12. Ανοίξτε το διακόπτη [q(x)]: Εμφανίζεται η γραφική παράσταση της παραβολής: $q(x) = x^2 - \tau x + p$.

Πειραματιστείτε για διάφορες τιμές των R και δ, καθώς και για διάφορες θέσεις του σημείου B.

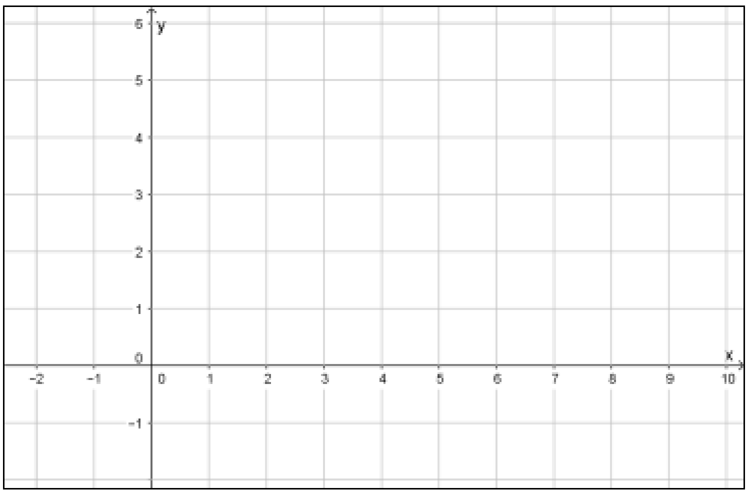
- Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τη σχετική θέση της παραβολής με τον άξονα xx΄;
- Πώς μεταφράζεται αυτό αλγεβρικά;

Η παραβολή q(x) ή τέμνει ή εφάπτεται στον άξονα xx΄ . Επομένως θα ισχύει ότι $\Delta \geq 0$.

13. Με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις σας να αποδείξετε τον ισχυρισμό που διατυπώσατε στην $9^η$ ερώτηση.

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \tau^2 - 4p \geq 0 \Leftrightarrow \tau \geq 2\sqrt{p}$ και τότε $\tau_{min} = 2\sqrt{p}$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει ότι: $x = y = \sqrt{p}$

14. Τί παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος (Σ) σε ένα σύστημα συντεταγμένων xOy; Να τις αναπαραστήσετε προσεγγιστικά παρακάτω.



15. Πλησιάστε αρκούντως κοντά τα σημεία B και A.

A. Τι φαίνεται να ισχύει για τη σχετική θέση των γραμμών που περιγράψατε στο προηγούμενο ερώτημα;

B. Τι φαίνεται να ισχύει για τη γωνία OEZ; Να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

Η ευθεία x+y=τ φαίνεται να εφάπτεται στην υπερβολή xy=p και η γωνία ΟΕΖ να είναι ορθή. Τελικά η ΟΕ είναι κάθετη στην ευθεία (ε): x+y=τ Από το 13^{o} ερώτημα έχει αποδειχθεί ότι: $A=B \Leftrightarrow x=y=\sqrt{p}$ οπότε σε αυτή την περίπτωση θα είναι: $\overrightarrow{OE}=(\sqrt{p},\sqrt{p}) \Rightarrow \lambda_{\overrightarrow{OE}}=1$

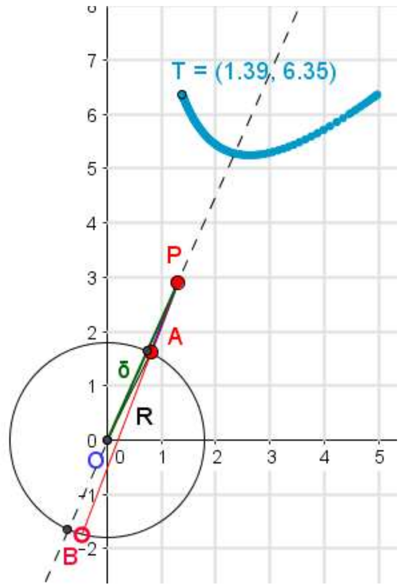
16. A. Όταν το σημείο P είναι εξωτερικό του κύκλου, ανοίξτε το διακόπτη [τ(max)] και δώστε κίνηση στο σημείο B (διακόπτης [κίνηση B]). Εμφανίζεται το ίχνος του σημείου T που έχει συντεταγμένες $(x, x+\frac{p}{x})$ όπου $x=PA$ και $p=PA\cdot PB$.

- Έχει ακρότατα αυτή η συνάρτηση;
- Αν ναι, τι είδους ακρότατα έχει και σε ποιες θέσεις του σημείου B εμφανίζονται;

Παρατηρούμε ότι υπάρχει **ελάχιστο** όταν Β=Α και **μέγιστο** σε 2 θέσεις στις οποίες τα σημεία P, O και B είναι συνευθειακά.

B. Να δικαιολογήσετε αλγεβρικά τα προηγούμενα ευρήματα.

Για την περίπτωση Β=Α έχει διαπιστωθεί και στα ερωτήματα 9 & 10 και έχει αποδειχθεί στο 13^{o} ερώτημα.



Για το **μέγιστο** σε 2 θέσεις στις οποίες τα σημεία P, O και B είναι συνευθειακά. Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση είναι: PA+PB=(δ-R)+(δ+R)=2δ και επομένως αρκεί να αποδειχθεί ότι:

$$PA+PB \le 2\delta \overset{PA=x}{\underset{PA\cdot PB=p}{\Leftrightarrow}} x+\frac{p}{x} \le 2\delta \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2+p}{x} \le 2\delta \Leftrightarrow x^2-2\delta x+p \le 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-\delta)^2+p-\delta^2 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-\delta)^2+\delta^2-R^2-\delta^2 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-\delta-R)(x-\delta+R) \le 0$$

Το τελευταίο ισχύει γιατί:

(Ι) $PI \le PA \le PK \Rightarrow \delta-R \le x \le \delta+R$

3η Φάση – Άσκηση[4]

1. Ορίζουμε το σημείο M_1 με συντεταγμένες $(\delta, f(\delta))$ με $f(\delta) = \delta^2 - R^2$ ([5]) (διακόπτης M_1). Πειραματιστείτε για διάφορες θέσεις του σημείου P και παρατηρήστε τη γραμμή που διαγράφουν τα ίχνη του σημείου M_1.

   - Ποιο τμήμα γνωστής γραφικής παράστασης, φαίνεται να είναι αυτή η γραμμή; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

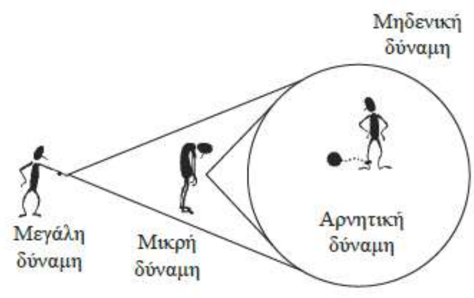
Τμήμα παραβολής x^2-R^2 αφού το δ μεταβάλλεται και το R είναι σταθερό.

2. Εξετάστε για ποιες θέσεις του σημείου P συμβαίνουν οι περιπτώσεις: f(δ)>0, f(δ)=0 και f(δ)<0. Βρείτε στο σχολικό σας βιβλίο Γεωμετρίας σχετικό εδάφιο, που να δικαιολογεί γεωμετρικά, τα ευρήματα σας.

f(δ)>0 αν και μόνο αν το P: εξωτερικό του κύκλου

f(δ)<0 αν και μόνο αν το P: εσωτερικό του κύκλου

f(δ)=0 αν και μόνο αν το P: σημείο του κύκλου



Σχήμα 20

(σελ. 202 σχολικό Ευκλείδεια Γεωμετρία)

3. Κλείστε το διακόπτη M_1. Ορίζουμε τώρα το σημείο M_2 με συντεταγμένες $(R, g(R))$ όπου $g(R) = \delta^2 - R^2$.

   Πειραματιστείτε για διάφορες τιμές του R (διακόπτης → Μεταβολή R) και παρατηρήστε τη γραμμή που διαγράφουν τα ίχνη του σημείου M_2.

[4] Μπορεί να δοθεί ως άσκηση για υλοποίηση στο σπίτι ανάλογα με τον προσφερόμενο χρόνο.

[5] Η παράσταση $\delta^2 - R^2$ καλείται **δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R)** και συμβολίζεται με: $\mathscr{D}^{P}_{(O,R)}$

Ποιο τμήμα γνωστής γραφικής παράστασης, φαίνεται να είναι αυτή η γραμμή; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

Τμήμα παραβολής δ^2-x^2 αφού το R μεταβάλλεται και το δ είναι σταθερό.

4. Εξετάστε τα σημεία της $2^{ης}$ ερώτησης και για την περίπτωση του σημείου M_2.

5. Με ανοικτό το διακόπτη M_2 ανοίξτε και το διακόπτη M_1 και δώστε πάλι [Μεταβολή του R].

- Τι παρατηρείτε τώρα για τη γραμμή που διαγράφουν τα ίχνη του σημείου M_1;
- Είναι γραφική παράσταση συνάρτησης;
- Πού οφείλεται αυτή η αλλαγή σε σχέση με την $1^η$ Ερώτηση;

Το σημείο M_1 έχει οριστεί ως εξής: $M_1(\delta,\delta^2-R^2)$. Επομένως όταν δ=σταθερό και R: μεταβαλλόμενο, το σημείο M_1 κινείται στην κατακόρυφη ευθεία x=δ που ως γνωστό δεν είναι συνάρτηση.

6. Επαναλάβετε τον προηγούμενο πειραματισμό μεταβάλλοντας το δ. Τι παρατηρείτε για τη γραμμή που διαγράφει τώρα το σημείο M_2; Πού οφείλεται αυτή η αλλαγή σε σχέση με την $3^η$ ερώτηση;

Το σημείο M_2 έχει οριστεί ως εξής: $M_2(R,R^2-\delta^2)$. Επομένως όταν R=σταθερό και δ: μεταβαλλόμενο, το σημείο M_2 κινείται στην κατακόρυφη ευθεία x=R που ως γνωστό δεν είναι συνάρτηση.

7. Βρείτε στο σχολικό σας βιβλίο (Μαθηματικά Προσανατολισμού Β΄ Λυκείου – Κεφ. $3^ο$ Κωνικές Τομές) σχετικό εδάφιο που να ερμηνεύει αλγεβρικά τον ισχυρισμό σας στην ερώτηση 15.Α.

15Α. Αυτό οφείλεται στο ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση που προκύπτει από τις δύο αυτές εξισώσεις έχει διακρίνουσα Δ=0 όταν Α=Β. Σχετικό εδάφιο σελ. 128:

Σχετική Θέση Ευθείας και Κωνικής

Ας θεωρήσουμε μία ευθεία $y=\lambda x+\beta$ και μία κωνική τομή $Ax^2+By^2+\Gamma x+\Delta y+E=0$. Η ευθεία ε και η κωνική C έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία, αφού το σύστημα

$$\begin{cases} y=\lambda x+\beta & (1) \\ Ax^2+By^2+\Gamma x+\Delta y+E=0 & (2) \end{cases}$$

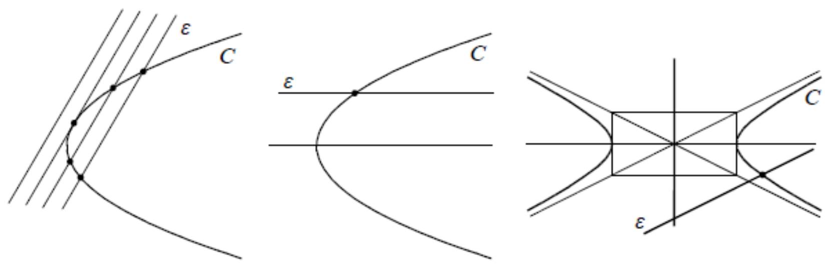
έχει το πολύ δύο διακεκριμένες λύσεις.

Για την επίλυση του συστήματος θέτουμε στη (2), όπου $y=\lambda x+\beta$, οπότε προκύπτει μια δευτεροβάθμια εξίσωση.

— Αν η εξίσωση αυτή έχει δύο ρίζες άνισες ή μια απλή ρίζα (όταν είναι 1ου βαθμού), τότε η ευθεία και η κωνική τέμνονται.

— Αν η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες, δηλαδή αν είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=0$, τότε αποδεικνύεται ότι η ευθεία εφάπτεται της κωνικής.

—Τέλος, αν η εξίσωση δεν έχει ρίζες, τότε η ευθεία και η κωνική δεν έχουν κοινά σημεία.



Παράρτημα

Η σχέση (Ι), στο $16^{ο}$ ερώτημα λαμβάνει υπόψη την άσκηση 4 (σελ. 64) του σχολικού βιβλίου στην οποία ορίζεται η **απόσταση ενός (εξωτερικού) σημείου από έναν κύκλο**.

i) $M\hat{A}B > M\hat{A}\Gamma$,

ii) $\frac{\beta-\gamma}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$,

iii) $\mu_\alpha+\mu_\beta+\mu_\gamma < 2\tau$.

4. *Έστω κύκλος (Ο, R) διαμέτρου ΑΒ και σημείο Σ της ημιευθείας ΟΑ. Για κάθε σημείο Μ του κύκλου να αποδειχθεί ότι ΣΑ ≤ ΣΜ ≤ ΣΒ. (Το τμήμα ΣΑ λέγεται απόσταση του Σ από τον κύκλο).*

5. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Αν η διχοτόμος δ_α τέμνει κάθετα τη διάμεσο μ_β, να αποδείξετε ότι:*

Σχετικά με την ακολουθούμενη διαδικασία στη 2η φάση (ερωτήματα 11, 12, και 13) για την απόδειξη ελαχιστοποίησης της περιμέτρου ενός ορθογωνίου με σταθερό εμβαδόν, επισημαίνουμε ότι ασφαλώς και υπάρχουν συντομότεροι τρόποι απόδειξης.

- Για παράδειγμα αναφέρουμε:

  Το τριώνυμο $q(x) = x^2 - \tau x + p$ θα πρέπει απαραίτητα να έχει μη αρνητική διακρίνουσα, αφού το x εκφράζει τη διάσταση ενός κατασκευασμένου ορθογωνίου.

- Εναλλακτικά:

  Ισχύει ότι: $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy = (x-y)^2 + 4p \geq 4p$

  Επομένως, προκύπτει ότι $x + y = \min \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$, από την οποία προκύπτει ότι το τετράγωνο έχει την ελάχιστη περίμετρο.

Σημειώνουμε εδώ όμως ότι και στις δύο περιπτώσεις, η αυτενέργεια των μαθητών θα ήταν από απίθανη έως ελάχιστα πιθανή.

Επιπλέον. Η ακολουθούμενη διαδικασία έχει ως βασική επιδίωξη την ερμηνεία των δυναμικών αναπαραστάσεων του ψηφιακού δομήματος από τους μαθητές από το αλγεβρικό στο γεωμετρικό ισοδύναμο και αντίστροφα.

Σε κάθε περίπτωση, εκτιμούμε ότι προσεγγίσεις όπως αυτές που προτείνονται στο παρόν φύλλο εργασίας, μειώνουν τις πεποιθήσεις των μαθητών για την αυθεντία του διδάσκοντα και αυξάνουν το ποσοστό των μαθητών που αναγνωρίζουν τη σημασία της διδασκαλίας των Μαθηματικών. [6]

[6] Από την άλλη «..φαίνεται να αγνοείται ότι η αξιοπιστία δεν προέρχεται, πρωτίστως, από *αυστηρούς* ελέγχους ορθότητας *τυπικών* ισχυρισμών, αλλά από *προσεκτική* σκέψη και *κριτική* θεώρηση των μαθηματικών *ιδεών*. (W. Thurston, 1994)

«Τα μαθηματικά γενικά και ειδικά η απόδειξη, παρουσιάζονται σαν ένα τελειωμένο προϊόν. Ο μαθητής δεν είναι συμμέτοχος στην κατασκευή της γνώσης αλλά περισσότερο ένας παθητικός δέκτης της.» (Alibert&Thomas, 1991)