

Problemas – Tema 8

Problemas resueltos - 4 - propiedades de los determinantes

1. Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, obtener razonadamente el valor de los siguientes determinantes, escribiendo todos los pasos del razonamiento.

a) $|A+B|$ y $|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}|$

b) $|(A+B)^{-1} \cdot A|$ y $|A^{-1}(A+B)|$

c) $|2AB A^{-1}|$ y $|A^3 B^{-1}|$

a) $A+B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |A+B| = 0 + 20 + 4 - (0 + 0 + 0) = 24$

Calculamos el segundo determinante de este apartado.

$$|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}| \rightarrow \text{La matriz } (A+B)^{-1} \text{ es de orden 3} \rightarrow |\frac{1}{2}(A+B)^{-1}| = (\frac{1}{2})^3 |(A+B)^{-1}|$$

$$(\frac{1}{2})^3 |(A+B)^{-1}| = \frac{1}{8} \frac{1}{|A+B|} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{192}$$

b) $|(A+B)^{-1} \cdot A| = |(A+B)^{-1}| \cdot |A|$

Donde hemos utilizado que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes de cada matriz.

$$|(A+B)^{-1}| = \frac{1}{|(A+B)|} = \frac{1}{24}, \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 4 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 4$$

$$|(A+B)^{-1}| \cdot |A| = \frac{1}{24} \cdot 4 = \frac{1}{6}$$

Calculamos el segundo determinante de este apartado.

$$|A^{-1}(A+B)| = |A^{-1}| |A+B| = \frac{1}{|A|} |A+B| = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6$$

c) $|2 A B A^{-1}| \rightarrow$ Producto de matrices de orden 3 $\rightarrow |2 A B A^{-1}|=2^3 |A||B||A^{-1}|$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |B| = -4 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = -4$$

Sustituimos el valor de cada determinante.

$$2^3 |A||B||A^{-1}| = 8 \cdot 4 \cdot (-4) \cdot \frac{1}{4} = -32$$

Y terminamos con el segundo determinante de este apartado.

$$|A^3 B^{-1}| = |A| \cdot |A| \cdot |A| \cdot |B^{-1}| = 4^3 \cdot \frac{1}{|B|} = \frac{64}{-4} = -16$$

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ y $|A|=2$. Calcula $\begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

Desarrollamos los cuadrados de la primera fila:

$$\begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+2a+1 & b^2+2b+1 & c^2+2c+1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \rightarrow F'_1 = F_1 - 2F_2 - F_3 \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = |A| = 2$$

3. a) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ y $|A|=2$. Calcula $\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$.

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calcula $| (5A)^{-1} |$.

c) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ -3 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$. Obtener $|A^{10}|$

a) Aplicamos transformaciones lineales de filas y columnas hasta obtener el determinante de la matriz A y así poder aplicar el valor de $|A|=2$.

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Intercambiamos } F_1 \text{ con } F_3 \text{ con el consiguiente cambio de signo} \rightarrow$$

$$-\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ a-1 & b-1 & c-1 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Intercambiamos } F_2 \text{ con } F_3 \text{ lo cual genera un nuevo cambio de signo}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Sacamos factor común } 5 \text{ de la primera fila} \rightarrow$$

$$5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \end{vmatrix} \rightarrow F'_2 = F_2 + F_1, F'_3 = F_3 + F_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 5|A| = 5 \cdot 2 = 10$$

b) $|A| = -2 \rightarrow |(5A)^{-1}| = \frac{1}{|5A|} = \frac{1}{5^2|A|} = \frac{-1}{50}$

c) $A = \begin{pmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ -3 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Sarrus} \rightarrow \det(A) = (m+2)(m^2-1) + 0 + 0 - (0+0+0)$

$$\det(A) = (m+2)(m^2-1) \rightarrow |A^{10}| = |\det(A)|^{10} = (m+2)^{10}(m^2-1)^{10}$$

4. Sea M una matriz cuadrada que cumple $|M|=-1$ y $|(-2)M|=8$. ¿Cuál es el orden de la matriz cuadrada? Justifica tu respuesta.

$$|(-2)M|=(-2)^n|M|$$

Donde n es la dimensión de la matriz cuadrada M . Según el enunciado del problema:

$$|(-2)M|=8 \text{ y } |M|=-1$$

Por lo tanto:

$$(-2)^n|M|=8 \rightarrow (-2)^n(-1)=8 \rightarrow (-2)^n=-8 \rightarrow n=3$$

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ y sabemos que $|A|=2$. Calcula los siguientes determinantes, explicando adecuadamente los pasos que sigues para calcularlos:

a) $\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

a) Aplicamos transformaciones lineales de filas y columnas hasta obtener el determinante de la matriz A y así poder aplicar el valor de $|A|=2$.

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Intercambiamos } F_1 \text{ con } F_3 \text{ con el consiguiente cambio de signo} \rightarrow$$

$$-\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ a-1 & b-1 & c-1 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Intercambiamos } F_2 \text{ con } F_3 \text{ lo cual genera un nuevo cambio de}$$

signo $\rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Sacamos factor común } 5 \text{ de la primera fila} \rightarrow$

$$5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \end{vmatrix} \rightarrow F'_2 = F_2 + F_1, F'_3 = F_3 + F_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 5|A| = 5 \cdot 2 = 10$$

b) Desarrollamos los cuadrados de la primera fila:

$$\begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+2a+1 & b^2+2b+1 & c^2+2c+1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \rightarrow F'_1 = F_1 - 2F_2 - F_3 \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = |A| = 2$$

6. Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula:

a) $|A|$ b) $|B|$ c) $|A \cdot B|$ d) $|A| \cdot |B|$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2+0+0) - (0+0+0) = 2$

b) $|B| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2+0+0) - (0+2+0) = -2-2 = -4$

c) Según las propiedades de los determinantes, el determinante de A por B es lo mismo que el determinante de A por el determinante de B:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot (-4) = -8$$

d) $|A| \cdot |B| = 2 \cdot (-4) = -8$

7. Sea A una matriz cuadrada de orden 4 con determinante $|A|=2$. Hallar:

a) $|3A^{-1}|$

b) $|(3A)^{-1}|$

a) $|3A^{-1}|=3^4|A^{-1}|=81\frac{1}{|A|}=\frac{81}{2}$

b) $|(3A)^{-1}|=\frac{1}{|3A|}=\frac{1}{3^4|A|}=\frac{1}{81\cdot 2}=\frac{1}{162}$

8. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calcula:

a) $|A^{-1}|$ b) $|((5A)^{-1})|$ c) $|5A|$

a) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

$$|A| = -1 - 1 = -2 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{-1}{2}$$

b) $|((5A)^{-1})| = \frac{1}{|5A|} = \frac{1}{5^2 \cdot |A|} = \frac{1}{25 \cdot (-2)} = \frac{-1}{50}$

c) $|5A| = 5^2 \cdot |A| = 25 \cdot (-2) = -50$

9. Razonar de manera adecuada los siguientes apartados:

a) Sea $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3. Comprobar $C^2 = 2C - I$ y calcula la matriz C^4 .

b) El valor del determinante de la matriz $(3A^4) \cdot (4A^2)^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale -1 .

c) La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad $B \cdot B = B$.

$$a) C^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2C - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se cumple: $C^2 = 2C - I$

Además:

$$C^4 = C^2 \cdot C^2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

b) Utilizando propiedades de determinantes:

$$|(3A^4) \cdot (4A^2)^{-1}| = |3A^4| \cdot |(4A^2)^{-1}| = 3^4 \cdot |A^4| \cdot \frac{1}{|4A^2|} = 3^4 \cdot |A^4| \cdot \frac{1}{4^4 \cdot |A^2|} = \frac{81}{256} \cdot |A^2| = \frac{81}{256} \cdot |A|^2 = \frac{81}{256}$$

c) La definición de matriz identidad I es ser el elemento neutro del producto, de tal forma que $B \cdot I = B$. Además, la matriz identidad admite inversa por ser su determinante distinto de cero.

En consecuencia, $B = I \rightarrow I \cdot I = I$

10. Sea $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determinar P^{-1}

b) Determinar B^{-1} , inversa de la matriz $B = P^{-1} J^{-1}$

c) Calcular el determinante de A^2 , siendo $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$

a) Ya sea por Gauss-Jordan o por adjuntos, puedes utilizar la web www.matrixcalc.org/es para comprobar los pasos para obtener la matriz inversa de P y de J :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $B = P^{-1} J^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1/2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & -1/2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) El determinante de A es igual al producto de determinantes:

$$|A| = |P| \cdot |J| \cdot |P^{-1}| = |P| \cdot |J| \cdot \frac{1}{|P|} = |J| = -2 \rightarrow |A^2| = |A| \cdot |A| = 4$$

11. Calcula la potencia A^{2017} de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = A$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = A^2$$

$$A^6 = A^5 \cdot A = A^3$$

Es decir, la potencia A^n se repite cada tres términos.

Si hacemos la división entre 3 y miramos el resto $\rightarrow 2017 : 3 \rightarrow \text{Resto} = 1 \rightarrow A^{2017} = A$

En este ejercicio no hemos aplicado inducción matemática, ya que no teníamos una regla general para cualquier valor de n , sino tres reglas generales para valores de n cuyo resto con el número 3 fuese igual a 0, 1 y 2.

En este tipo de ejercicios con formas distintas de la matriz n -ésima, es suficiente con razonar tal y como lo hemos realizado.

12. Si $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \end{pmatrix}$ determina los valores de x para los que se cumple que $|B|=1$,
siendo $B = \frac{1}{2}A$.

$$B = \frac{1}{2}A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |B| = \left| \frac{1}{2}A \right| = \left(\frac{1}{2} \right)^3 |A|$$

Donde hemos aplicado propiedad de determinantes: un número real sale del determinante elevado a la dimensión de la matriz sobre la que está multiplicando.

$$\text{Si } |B|=1 \rightarrow 1 = \frac{1}{8}|A| \rightarrow 8 = |A|$$

Por lo tanto, debemos realizar el determinante de A e igualarlo a 8. Y podremos despejar los valores de x

$$|A| = 4x + 0 + (x-1)^2 - (4 + 0 + 2(x-1)) = 4x + (x-1)^2 - 4 - 2(x-1)$$

$$|A| = 4x + x^2 + 1 - 2x - 4 - 2x + 2 = x^2 - 1$$

$$\text{Si } |A|=8 \rightarrow x^2 - 1 = 8 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$$