

تست ۱: اگر دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & -2 \\ 3 & a-2 \end{bmatrix}$ برابر ۵ باشد، آن گاه دترمینان ماتریس $B = \begin{bmatrix} 3a & -3 \\ 2 & a^2+1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) -۶ (۲) ۱۲ (۳) -۱۲ (۴) ۶

تست ۲: اگر $A = \begin{bmatrix} 4|A| & 3 \\ 1 & |A| \end{bmatrix}$ ، آنگاه دترمینان ماتریس A برابر کدام است؟

(۱) ۱ و -۲ (۲) ۱ و $-\frac{3}{4}$ (۳) ۳ و $-\frac{1}{2}$ (۴) ۳ و $-\frac{4}{3}$

مثال ۱: دترمینان ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

یافتن دترمینان ماتریس های 3×3 به کمک روش بسط

خودش قرینه‌اش خودش

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \times \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} \\ - \begin{bmatrix} b \times \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} \\ + \begin{bmatrix} c \times \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$|A| = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

یافتن دترمینان ماتریس های 3×3 به کمک روش بسط

برای یافتن دترمینان ماتریس 3×3 به صورت زیر عمل می‌کنیم:

(۱) یک سطر (یا یک ستون) از ماتریس را به دلخواه انتخاب می‌کنیم.

(۲) هر درایه سطر (ستون) انتخابی را در دترمینان 2×2 حاصل از حذف سطر و ستون درایه موردنظر ضرب می‌کنیم.

(۳) در مرحله (۲)، هر درایه‌ای که جزء چهار رأس لوزی می‌باشد، علامت منفی برای آن در نظر می‌گیریم. و یا به جز درایه‌های روی قطر اصلی و قطر فرعی درایه‌های دیگر قرینه می‌شوند.

(۴) نتایج حاصل از مرحله (۲) را با هم جمع می‌کنیم و عدد حاصل، دترمینان ماتریس 3×3 است.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$$

یافتن دترمینان ماتریس‌های 3×3 به کمک روش بسط

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{دترمینان ماتریس}$$

یک سطر یا ستون را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. مثلاً سطر اول را برمی‌گزینیم. (در این حالت می‌گوییم بسط نسبت به سطر اول صورت می‌گیرد.)

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{سطر و ستون درایه (2) حذف می‌شود}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{درایه (2) ضرب می‌شود}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow (2) \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

دترمینان 2×2
حاصل از حذف
سطر و ستون
درایه 2

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{سطر و ستون درایه (4) حذف می‌شود}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{درایه (4) ضرب می‌شود}} (4) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

دترمینان 2×2
حاصل از حذف
سطر و ستون
درایه 4

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{سطر و ستون درایه (-1) حذف می‌شود}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{درایه (-1) ضرب می‌شود}} (-1) \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

دترمینان 2×2
حاصل از حذف
سطر و ستون
درایه -1

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \square & \square & \square \end{vmatrix} a_{11} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} a_{12} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} a_{13} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

دترمینان 2×2
حاصل از حذف
سطر و ستون
درایه 2

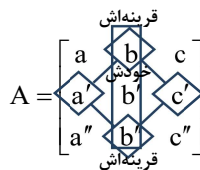
دترمینان 2×2
حاصل از حذف
سطر و ستون
درایه 4

دترمینان 2×2
حاصل از حذف
سطر و ستون
درایه -1

$$= (2)(-15) - (4)(3) + (-1)(10) = -52$$

خودش قرینه‌اش خودش

یافتن دترمینان ماتریس‌های 3×3 به کمک روش بسط



دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ (بسط نسبت به ستون دوم)

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{سطر و ستون درایه 4 حذف می‌شود}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{درایه 4 ضرب می‌شود}} (4) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

دترمینان 2×2
حاصل از حذف
سطر و ستون
درایه 4

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{سطر و ستون درایه 5 حذف می‌شود}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{درایه 5 ضرب می‌شود}} (5) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

دترمینان 2×2
حاصل از حذف
سطر و ستون
درایه 5

توجه کنید برای درایه صفر انجام عملیات بالا بی‌مورد است، زیرا حاصل ضرب درایه صفر در دترمینان 2×2 برابر صفر است.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = - (4) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + (5) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -52$$

درایه 4 جزء چهار رأس لوزی است
پس علامت منفی برای آن در نظر گرفته می‌شود.

همان طور که ملاحظه می‌شود، مقدار دترمینان، به انتخاب سطر یا ستون جهت عملیات بسط، ارتباطی ندارد و در هر دو حالت بالا، پاسخ یکسان است. اما واضح است در بسط نسبت به ستون دوم، به دلیل وجود درایه صفر، عملیات بسط سریع‌تر صورت پذیرفت.

نتیجه:

- (۱) در محاسبه دترمینان 3×3 ، بهتر است سطر (ستونی) انتخاب شود که تعداد درایه صفر بیشتری دارد.
- (۲) اگر در یک ماتریس تمام اعداد یک سطر (یا یک ستون) برابر با صفر باشند، آن گاه دترمینان آن ماتریس، صفر است. دترمینان ماتریس مربعی صفر، است.

تست ۳: اگر دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & a & 5 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ برابر ۶ باشد، آن گاه a کدام است؟

(۴) $-12/5$

(۳) $12/5$

(۲) $-8/5$

(۱) $8/5$