7 Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen

Eine Gerade und eine Ebene können

- parallel sein
  Gleichsetzen von Gerade und Ebene führt zu keiner Lösung
- sich einmal schneiden
  Gleichsetzen von Gerade und Ebene führt zu genau einer Lösung
- sich in unendlich vielen Punkten „schneiden“ (die Ebene enthält die Gerade)
  Gleichsetzen von Gerade und Ebene führt zu unendlich vielen Lösungen

Rechnerisch findet man die Lösung, indem man

a) die Gerade der Parameterform der Ebene gleichsetzt und eine, bzw. keine, bzw. unendlich viele Lösung(en) findet.

b) die Gerade in die parameterfreie Form der Ebene einsetzt und eine, bzw. keine, bzw. unendlich viele Lösung(en) findet.

Für beide Fälle werden wir das Vorgehen an Beispielen erläutern.

7.1 Ebene in Parameterform

Gegeben seien

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen E und g gleich und erhalten drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} -1+\lambda &= 1-5\sigma+3\tau \\ 8-4\lambda &= 6\sigma+2\tau \\ -7+3\lambda &= -1+2\sigma-8\tau \end{aligned}$$

Umsortieren:

$$\begin{aligned} \lambda+5\sigma-3\tau &= 2 \\ 4\lambda+6\sigma+2\tau &= 8 \\ 3\lambda-2\sigma+8\tau &= 6 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem lösen wir mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 8 \\ 3 & -2 & 8 & 6 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & -14 & 14 & 0 \\ 0 & -17 & 17 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & -14 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Wir erhalten: Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. g ist also in E enthalten.

7.2 Ebene in parameterfreier Form

Wesentlich einfacher ist die Schnittpunkt-Berechnung, wenn die Ebene in Koordinatenform vorliegt: Gegeben seien

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E: \ 25x_1 - 42x_2 + 6x_3 + 12 = 0.$$

Aus der Geradengleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= -3 + 4\lambda \\ x_3 &= 2 + 3\lambda \end{aligned}$$

und setzen dies in die Ebenengleichung ein:

$$\begin{aligned} & 25 \cdot 3 - 42 \cdot (-3 + 4\lambda) + 6 \cdot (2 + 3\lambda) + 12 = 0 \\ \Leftrightarrow \ & 75 + 126 - 168\lambda + 12 + 18\lambda + 12 = 0 \\ \Leftrightarrow \ & 225 - 150\lambda = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda = 1,5 \end{aligned}$$

Diesen Wert setzen wir nun in die Geradengleichung ein und erhalten als Schnittpunkt

$$\overrightarrow{0S} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1,5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6,5 \end{pmatrix}.$$ Gerade und Ebene schneiden sich in S(3/3/6,5).

7.3 Aufgabe 1

1) Gegeben ist die Gerade $a: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Untersuche die Lage von g bzgl. der Ebene

   a) $E: \ x_1 - 2x_2 + x_3 - 1 = 0$

b) $F: -x_1 - x_2 + 2x_3 - 8 = 0$

2) $E:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad g_c:\ \vec{X} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1+c \\ 1-c \end{pmatrix}$

Wie muss c gewählt werden, dass g_c echt parallel zu E liegt?

Lösung

1) $a:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $E:\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 1 = 0$
Wir setzen die Koordinaten der Gerade in die Ebenengleichung ein:

$$\begin{aligned} & 1+\alpha-2(2+\alpha)+4+\alpha-1=0 \\ \Leftrightarrow\ & 1+\alpha-4-2\alpha+4+\alpha-1=0 \\ \Leftrightarrow\ & 0=0 \end{aligned}$$

Es gibt unendlich viele Lösungen, d.h. a ist in E enthalten.

b) $F: -x_1 - x_2 + 2x_3 - 8 = 0$
Wir setzen die Koordinaten der Gerade in die Ebenengleichung ein:

$$\begin{aligned} & -(1+\alpha)-(2+\alpha)+2(4+\alpha)-8=0 \\ \Leftrightarrow\ & -1-\alpha-2-\alpha+8+2\alpha-8=0 \\ \Leftrightarrow\ & -3=0 \end{aligned}$$

Wir erhalten keine Lösung, d.h. a und F sind echt parallel.

2) $E:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad g_c:\ \vec{X} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1+c \\ 1-c \end{pmatrix}$

Wir setzen gleich und erhalten

$$\begin{aligned} -1+3\mu &= \gamma \\ 2+\lambda-\mu &= \gamma(1+c) \\ 3+\lambda+\mu &= \gamma(1-c) \end{aligned}$$

Umsortieren und Vertauschen der ersten und zweiten Zeile:

$$\begin{aligned} -\lambda+\mu+(1+c)\gamma &= 2 \\ 3\mu-\gamma &= 1 \\ \lambda+\mu+(-1+c)\gamma &= -3 \end{aligned}$$

Zur Lösung verwenden wir den Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 1+c & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1+c & -3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 1+c & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2c & -1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 1+c & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6c+2 & -5 \end{array}$$

Es ist $\gamma = \frac{-5}{6c+2}$. Wir erhalten einen Schnittpunkt für $c \neq -\frac{1}{3}$. Für $c = -\frac{1}{3}$ sind Gerade und Ebene echt parallel.

7.4 Aufgabe 2

1) Bestimme die Lage der Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   bzgl. der Ebene $G: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Gegeben seien $E_k: 2x_1 + k - x_3 = 0$ und $h_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 2 \\ 4-2a \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} a-2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Für welche Werte von k und a gibt es genau einen Schnittpunkt?

Lösung

1) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad G: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Wir setzen gleich und erhalten

$$\begin{aligned} -\sigma-\tau &= 3-2\lambda \\ 8+2\sigma &= 8+2\lambda \\ \sigma+\tau &= 6+\lambda \end{aligned}$$

Aus der ersten und dritten Gleichung erhalten wir $3 - 2\lambda = -6 - \lambda$, also $\lambda = 9$.
Nun könnten wir bereits das gefundene λ in die Gerade einsetzen und den Schnittpunkt bestimmen. Wir lösen aber das Gleichungssystem noch vollständig auf, um sicher zu gehen, dass nicht noch irgendwo ein Widerspruch entsteht.
Aus der zweiten Zeile erhalten wir $\sigma = \lambda$, also $\sigma = 9$.
Alles eingesetzt in die erste oder in die dritte Zeile liefert uns $\tau = 6$, insgesamt kein Widerspruch.
Wir setzen $\lambda = 9$ in die Geradengleíchung ein und erhalten den Schnittpunkt S(15/26/15).

2) $E_k: \; 2x_1 + k - x_3 = 0$ und $h_a: \; \vec{X} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 2 \\ 4-2a \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} a-2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wir setzen die Koordinaten der Gerade in die Ebenengleichung ein:

$$\begin{aligned} & 2\left[2 - a + \eta(a-2)\right] + k - (4-2a) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 4 - 2a + 2a\eta - 4\eta + k - 4 + 2a = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (4 - 2a + k - 4 + 2a) + \eta(2a-4) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & k + \eta(2a-4) = 0 \end{aligned}$$

Es ist also

$$\eta = \frac{-k}{2a-4}.$$

Um mindestens einen Schnittunkt zu erhalten, muss $a \neq 2$ sein, da wir sonst im Nenner Null stehen hätten.
Für $a = 2$ und $k \neq 0$ sind Gerade und Ebene echt parallel.
Für $a = 2$ und $k = 0$ ist die Gerade in der Ebene enthalten.