Lösungen - Aussichtsplattform

Aufgabenstellung 1

1. Gebogenes Glas

(1) Die innere und äußere Brüstung haben allgemein die Form eines Zylindermantels. Für die Berechnung des Materialbedarfs benötigen wir daher die Formel für den Mantel eines Zylinders:

$$M = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$

Die Höhe hat eine Länge von 1 m. Wir müssen noch den großen und kleinen Radius ermitteln.

$$r_{klein} = d : 2 = 2.50 : 2 = 1.25 \text{ m}$$

$$r_{groß} = r_{klein} + Breite\ der\ Plattform = r_{klein} + B = 1.25 + 2.00 = 3.25 \text{ m}$$

$$h = 1.00 \text{ m}$$

Eingesetzt in die Formel für den Zylindermantel erhalten wir:

$$M_{klein} = 2 \cdot 1.25 \cdot \pi \cdot 1 = 7.85 \text{ m}^2$$

$$M_{groß} = 2 \cdot 3.25 \cdot \pi \cdot 1 = 20.42 \text{ m}^2$$

Gesamter Materialbedarf (M_{gesamt}) :

$$M_{gesamt} = M_{klein} + M_{groß} = 7.85 + 20.42 = 28.27 \text{ m}^2$$

(2) Ausgehend von den vorherigen Berechnungen ersetzen wir nun bei der Berechnung der beiden Mantelflächen die Länge der Höhe durch 1.1 m.

$$M_{klein} = 2 \cdot 1.25 \cdot \pi \cdot 1.1 = 8.64 \text{ m}^2$$

$$M_{groß} = 2 \cdot 3.25 \cdot \pi \cdot 1.1 = 22.46 \text{ m}^2$$

$$M_{gesamt} = M_{klein} + M_{groß} = 8.64 + 22.46 = 31.10 \text{ m}^2$$

Die Prozent-Berechnung kann zB. mit Hilfe einer Schlussrechnung durchgeführt werden:

$$28.27 \text{ m}^2 \ldots\ldots 100\%$$

$$31.10 \text{ m}^2 \ldots\ldots x$$

$$28.27 \cdot x = 31.10 * 100$$

$$\frac{31.10 \cdot 100}{28.27} = x$$

$$110.01 = x$$

Der Glasbedarf erhöht sich also um ca. 10 %.

2. Plattform mit Wendeltreppe

(1) Mit Hilfe des zur Verfügung gestellten Applets können wir die Ansicht verändern und so besser ersichtlich machen welche geometrische Form die äußere und innere Brüstung annehmen.

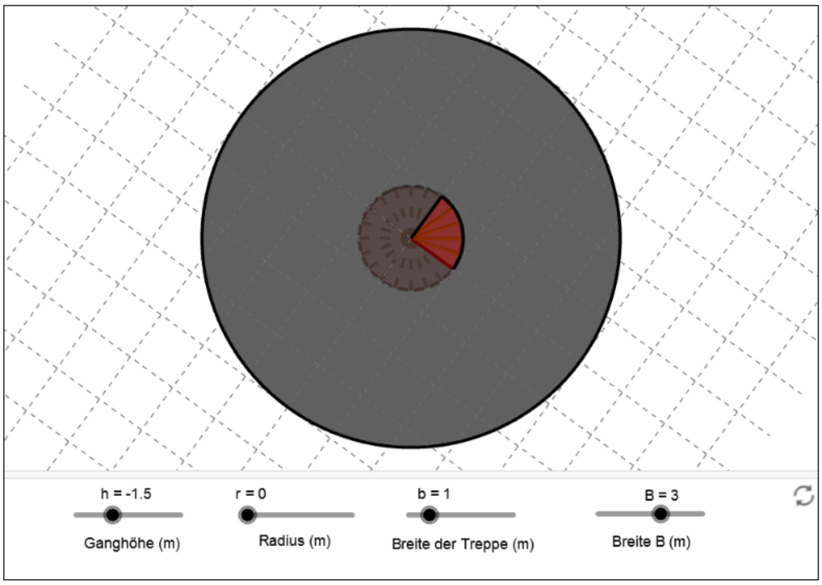

Abb.1: Aussichtsplattform mit Wendeltreppe (Bsp. 2)

Bei der inneren Brüstung (rote Fläche) handelt es sich um einen Viertelkreis (Kreissektor mit Öffnungswinkel α = 90°) mit Radius 1 (=b). Für die Berechnung des Flächeninhalts des Glases der inneren Brüstung benötigen wir vorerst einmal den Umfang des Kreissektors.Die Formel für den Umfang eines Kreissektors lautet allgemein:

$$U = 2 \cdot r + \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180}$$

Wie im Applet ersichtlich müssen wir jedoch berücksichtigen, dass der Zugang zur Wendeltreppe offen bleibt. Daher müssen wir bei obiger Formel noch die Länge eines Radius abziehen. Zusätzlich setzen wir α = 90° (Viertelkreis) und erhalten somit:

$$U = r + \frac{r \cdot \pi}{2}$$

Um nun den Flächeninhalt der inneren Brüstung berechnen zu können, müssen wir obige Formel nur mehr mit der Höhe multiplizieren. Den Flächeninhalt bezeichnen wir mit A_{klein}.

$$A_{klein} = (r + \frac{r \cdot \pi}{2}) \cdot h$$

Nun betrachten wir die äußere Brüstung. Diese entspricht wiederum der Mantelfläche eines Zylinders:

$$M = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$

Die Höhe der beiden Glaswände hat eine Länge von 1 m. Wir müssen nun nur noch den Radius für die Berechnung der inneren und äußeren Brüstung ermitteln und anschließend in die beiden obigen Formeln einsetzen.

$$r_{klein} = b = 1.00 \text{ m}$$

$$r_{groß} = r_{klein} + B = 1.00 + 3.00 = 4.00 \text{ m}$$

$$h = 1.00 \text{ m}$$

Wir erhalten:

$$A_{klein} = \left(1 + \frac{1 \cdot \pi}{2}\right) \cdot 1 = 2.57 \text{ m}^2$$

$$M_{groß} = 2 \cdot 4.00 \cdot \pi \cdot 1 = 25.13 \text{ m}^2$$

Gesamter Materialbedarf (M_{gesamt}):

$$M_{gesamt} = A_{klein} + M_{groß} = 2.57 + 25.13 = 27.70 \text{ m}^2$$

(2) Der Radius des Viertelkreises bzw. Kreissektors (innere Brüstung, rote Fläche) erhöht sich um den Wert 1.25 m (= r). Um denselben Wert vergrößert sich auch der Radius des äußeren Kreises (äußere Brüstung). Die Höhe der beiden Glaswände beträgt wiederum 1 m. Die beiden Radien setzen sich somit folgendermaßen zusammen:

$$r_{klein} = b + r = 1.50 + 1.25 = 2.75 \text{ m}$$

$$r_{groß} = r_{klein} + B = 2.75 + 2.00 = 4.75 \text{ m}$$

$$h = 1.00 \text{ m}$$

Für die Berechnung des Flächeninhalts der inneren Brüstung ergibt sich nach ähnlichen Überlegungen zu (1) folgende Formel:

$$A_{klein} = (2 \cdot r + \frac{r \cdot \pi}{2} - b) \cdot h$$

Die äußere Brüstung entspricht wiederum einer Mantelfläche eines Zylinders.Als Flächeninhalt für die innere und äußere Brüstung erhalten wir daher:

$$A_{klein} = \left(2 \cdot 2.75 + \frac{2.75 \cdot \pi}{2} - 1.50\right) \cdot 1 = 8.32 \text{ m}^2$$

$$M_{groß} = 2 \cdot 4.75 \cdot \pi \cdot 1 = 29.85 \text{ m}^2$$

Gesamter Flächeninhalt:

$$M_{gesamt} = A_{klein} + M_{groß} = 8.32 + 29.85 = 38.16 \text{ m}^2$$

(3) Mit Hilfe des Applets sehen wir, dass bei den vorgegebenen Werten die innere Brüstung die Form eines Rechtecks und äußere Brüstung erneut die Form eines Zylindermantels annimmt.

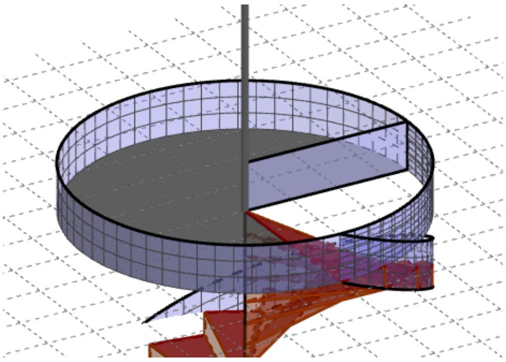

Abb. 3: Aussichtsplattform mit Wendeltreppe (Bsp. 3)

Für die Berechnung des Flächeninhalts des Glases für die Plattform benötigen wir daher einerseits wiederum die Formel für den Mantel eines Zylinders, andererseits die Flächeninhaltsformel für ein Rechteck.

Der Radius des Zylinders entspricht der Öffnung der Wendeltreppe (= b). Die Länge des Rechtecks entspricht dem Radius des Zylinders, also ebenso der Öffnung der Wendeltreppe (= b).
Die Höhe der Brüstung beträgt 1 m, welche beim Rechteck (innere Brüstung) der Breite entspricht.

Wir erhalten daher für die innere und äußere Brüstung:

$$M_{Zylinder} = 2 \cdot 3.50 \cdot \pi \cdot 1.00 = 21.99 \text{ m}^2$$

$$A_{Rechteck} = 3.50 \cdot 1 = 3.50 \text{ m}^2$$

Gesamten Flächeninhalt:

$$M_{gesamt} = M_{Zylinder} + A_{Rechteck} = 21.99 + 3.50 = 25.49 \text{ m}^2$$

Aufgabenstellung 2

1. Größe der Plattform

(1) Mit Hilfe des Applets erkennen wir, dass der Bodens der Plattform einen Kreisring darstellt.

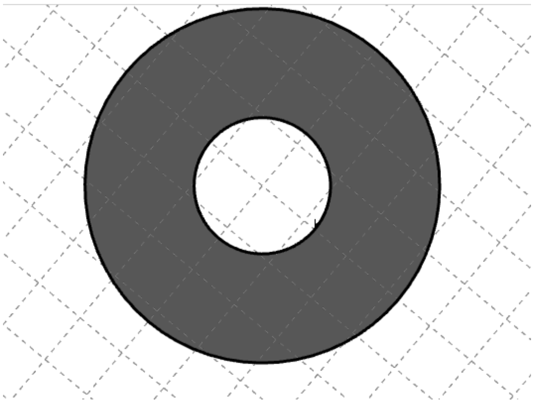

Abb.3: Aussichtsplattform Boden

Für die Berechnung des Flächeninhalts des Bodens können wir die Formel für den Flächeninhalt eines Kreisrings verwenden. Diese setzt sich so folgendermaßen zusammen:

$$A_{Ring} = R^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi = \ (R^2 - r^2) \cdot \pi$$

wobei *R* für den Radius des großen und *r* für den Radius des kleinen Kreises steht.

Für die Berechnung müssen wir nur noch den kleinen und großen Radius ermitteln.

$$r = d : 2 = 2.50 : 2 = 1.25 \text{ m}$$

$$R = r + B = 1.25 + \ 2.00 = 3.25 \text{ m}$$

Wir erhalten:

$$A_{Ring} = (3.25^2 - 1.25^2) \cdot \pi$$

$$A_{Ring} = 28.27 \text{ m}^2$$

(2) Wir überprüfen die Behauptung des Betreibers, indem wir die entsprechenden Größen in die Flächeninhaltsformel des Kreisrings einsetzen. Wie in der Tabelle beim Applet erkennbar, ist der Radius des kleinen Kreises bei den folgenden Berechnungen immer gleich groß. (Details der Berechnungen siehe Lösungen von Arbeitsauftrag 1)

1. $A_{Ring} = 28.27 \text{ m}^2$
2. $A_{Ring} = 81.68 \text{ m}^2$
3. $A_{Ring} = 160.22 \text{ m}^2$

Mit Hilfe der Berechnungen können wir erkennen, dass sich bei Verdopplung der Breite der Plattform der Flächeninhalt nicht verdoppelt.

(3) Die Aussagen überprüfen wir am besten auf Richtigkeit mit Hilfe der Flächeninhaltsformel eines Kreises. Diese lautet:

$$A_{Kreis} = r^2 \cdot \pi$$

- „Wird der Radius eines Kreises halbiert, so beträgt der Flächeninhalt nur mehr ein Viertel.“
  Richtig, denn es gilt:
  $$A = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot \pi$$
  $$A = \frac{r^2 \cdot \pi}{4} = \frac{A_{Kreis}}{4}$$

- Wird der Radius eines Kreises verdreifacht, so versechsfacht sich der Flächeninhalt.“
  Falsch. Der Flächeninhalt wird verneunfacht.
  Begründung: obiger Punkt (setze n = 3) bzw.:
  $$A = (r \cdot 3)^2 \cdot \pi = 9 \cdot r^2 \cdot \pi = 9 \cdot A_{Kreis}$$
- „Wird der Radius eines Kreises verdoppelt, so verdoppelt sich der Flächeninhalt.“
  Falsch. Der Flächeninhalt vervierfacht sich.
  Begründung: wie bei Punkt 2 (setze n = 2), d.h.:
  $$A = (r \cdot 2)^2 \cdot \pi = 4 \cdot r^2 \cdot \pi = 4 \cdot A_{Kreis}$$

- „Wird der Radius eines Kreises halbiert, so halbiert sich der Flächeninhalt.“
  Falsch. Richtige Antwort bzw. Begründung: siehe Punkt 1.

- „Wird der Radius eines Kreises verdreifacht, so verneunfacht sich der Flächeninhalt.“
  Richtig. Begründung siehe Punkt 3.

- „Wird der Radius eines Kreises verdoppelt, so halbiert sich der Flächeninhalt.“
  Falsch. Begründung bzw. richtige Antwort siehe Punkt 4.

- „Wird der Radius eines Kreises verdoppelt, so vervierfacht sich der Flächeninhalt.“
  Richtig. Begründung siehe Punkt 4.

- „Wird der Radius eines Kreises ver-n-facht, so steigt der Flächeninhalt auf das 2n-fache.“
  Falsch. Der Flächeninhalt wird ver-n^2-facht,weil:
  $$A = (n \cdot r)^2 \cdot \pi$$
  $$A = n^2 \cdot r^2 \cdot \pi = n^2 \cdot A_{Kreis}$$

- „Wird der Radius eines Kreises ver-n-facht, so ver-n^2-facht sich der Flächeninhalt.“
  Richtig. Begründung siehe Punkt 2.

Forschungsfrage

(1) Wir verschieben den Schieberegler für die Breite der Plattform und erkennen, dass die Breite der Plattform auf ca. 3.18 m vergrößert werden muss um eine Verdopplung des Flächeninhalts zu erzielen.

(2) Den Flächeninhalt der Plattform bei einer inneren Öffnung von 2.5 m und einer Breite von 2 m haben wir bereits bei Aufgabenstellung 2 (Nr.1) berechnet:

$$A_{Ring} = 28.27 \text{ m}^2$$

Wir wollen nun wissen, wie groß B gewählt werden muss, sodass sich der Flächeninhalt der Plattform (A_{Ring}) verdoppelt. Dazu stellen wir folgende Gleichung auf und formen diese auf B um:

$$2 \cdot A_{Ring} = ((1.25 + B)^2 - 1.25^2) \cdot \pi$$

$$\frac{2 \cdot A_{Ring}}{\pi} = (1.25 + B)^2 - 1.25^2$$

$$\frac{2 \cdot A_{Ring}}{\pi} + 1.25^2 = (1.25 + B)^2$$

$$\sqrt{\frac{2 \cdot A_{Ring}}{\pi} + 1.25^2} = 1.25 + B$$

$$\sqrt{\frac{2 \cdot A_{Ring}}{\pi} + 1.25^2} - 1.25 = B$$

Bemerkung: Streng genommen würde man hier $\mp\sqrt{\frac{2 \cdot A_{Ring}}{\pi} + 1.25^2} - 1.25$ *erwarten. Da die Breite B der Plattform jedoch nur positive Werte annehmen kann, geben wir nur die positive Lösung an.*

Wir setzen nun für A_{Ring} die Flächengröße 28.27 m^2 ein und erhalten für *B* folgenden Wert:

$$B = 3.17 \text{ m}$$

Dieser Wert stimmt sehr gut mit der bei Arbeitsauftrag 1 ermittelten Lösung überein.

(3) Da bei dieser Aufgabe eine allgemeine Lösung gesucht wird, bezeichnen wir den ursprünglichen (einfachen) Flächeninhalt des Kreisringes mit A_1. Den doppelt so großen Flächeninhalt kennzeichnen wir mit A_2.

Für A_1 und A_2 erhalten wir folgende Gleichungen:

$$A_1 = (R^2 - r^2) \cdot \pi$$

$$A_2 = 2 \cdot A_1 = ((k \cdot R)^2 - r^2) \cdot \pi$$

Bemerkung: k stellt den Faktor dar, mit dem der äußere Radius multipliziert werden muss, um einen doppelt so großen Flächeninhalt zu erhalten.

In der zweiten Gleichung setzen wir für A_1 die erste Gleichung ein und formen anschließend die Gleichung auf *k* um.

$$2 \cdot (R^2 - r^2) \cdot \pi = \left((k \cdot R)^2 - r^2\right) \cdot \pi$$

$$2 \cdot (R^2 - r^2) = (k \cdot R)^2 - r^2$$

$$2 \cdot R^2 - 2 \cdot r^2 = k^2 \cdot R^2 - r^2$$

$$2 \cdot R^2 - k^2 \cdot R^2 = r^2$$

$$R^2 \cdot (2 - k^2) = r^2$$

$$2 - k^2 = \frac{r^2}{R^2}$$

$$2 - \frac{r^2}{R^2} = k^2$$

$$\sqrt{2 - \frac{r^2}{R^2}} = k$$

Bemerkung: Streng genommen würde man hier die Lösungen $\mp\sqrt{2 - \frac{r^2}{R^2}}$ *erwarten. Da ein negativer Wert für den multiplikativen Faktor für den äußeren Radius nicht sinnvoll ist, geben wir hier nur die positive Lösung an.*

Mit dem so erhalten Faktor *k* muss man also den äußeren Radius *R* multiplizieren um eine Verdopplung des Flächeninhalts zu erhalten.

Multiplizieren wir nun *R* mit *k*, so stellen wir fest, dass sich für eine Verdopplung des Flächeninhalts der äußere Radius *R* auf folgenden Wert ändern muss:

$$k \cdot R = \sqrt{2 - \frac{r^2}{R^2}} \cdot R = \sqrt{2 \cdot R^2 - r^2}$$