EL TEOREMA DE FEUERBACH

UNA NUEVA DEMOSTRACIÓN PURAMENTE SINTÉTICA

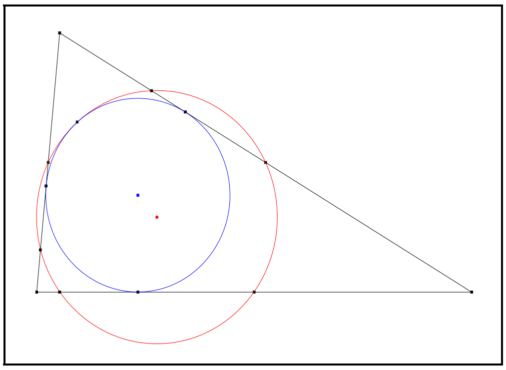
Jean-Louis AYME

Lycée Lislet Geoffroy, 97400 St.-Denis, Île de la Réunion, France

Resumen Presentamos una nueva demostración, completamente sintética, del teorema de Feuerbach que no hemos encontrado en la bibliografía geométrica, así como una breve nota biográfica de este geómetra alemán. La demostración se basa en tres lemas que se demuestran sintéticamente..

1. A propósito de Feuerbach

Karl Feuerbach, hermano del famoso filósofo Ludwig Feuerbach, nació en Jena, Alemania, el 30 de mayo de 1800, en una familia protestante. Hijo del jurista Paul Feuerbach y de Éva Troster, el brillante estudiante de la Universidad de Erlangen, y después de Friburgo, obtuvo a los 22 años su doctorado y comenzó a enseñar matemáticas en el Gymnasium de Erlangen, frecuentando un círculo de estudiantes de esta ciudad, conocido por su derroche y sus deudas. Ese mismo año publica en Nuremberg un librito de 62 páginas de título largo y difuso [**1**] en el que presenta, en la página 38 y demuestra analíticamente "el más bello teorema de geometría elemental descubierto desde la época de Euclides", según el historiador J. L. Coolidge [**2**] :

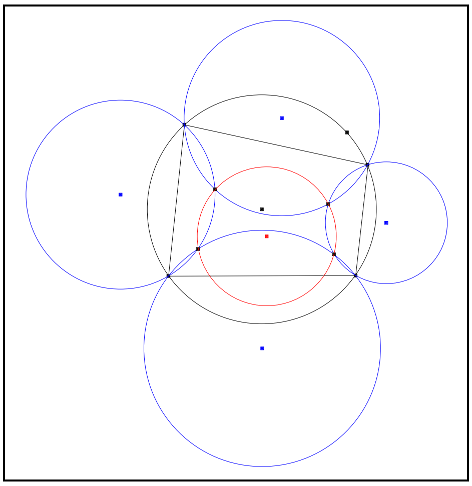


En un triángulo,el círculo inscrito es tangente al de Euler

En 1824, Feuerbach es detenido y encarcelado durante un año, junto con 19 estudiantes, en Munich, por sus posiciones políticas. Considerándose responsable de todo, sufre una depresión e intenta suicidarse en dos ocasiones, para salvar a sus compañeros, primero cortándose las venas y después tirándose por una ventana. Tras su liberación, vuelve a vivir con su familia y gracias a una intervención del rey consigue de nuevo un puesto de profesor en Hof, que deberá abandonar como consecuencia de una nueva depresión. En 1828, mejorada su salud, enseña de nuevo en Erlangen, hasta el día en que, desenvainando una espada en clase, amenaza con cortar la cabeza de los alumnos que no sepan resolver la ecuación que ha escrito en el encerado…. Abandonando la enseñanza, vivirá recluido los seis últimos años de su corta vida dejándose crecer el pelo, la barba y las uñas, contemplando las pinturas de su sobrino, el pintor Anselmo Feuerbach. Este profesor impulsivo y perturbado murió en Erlangen, el 12 de marzo de 1834.

2. Tres lemas

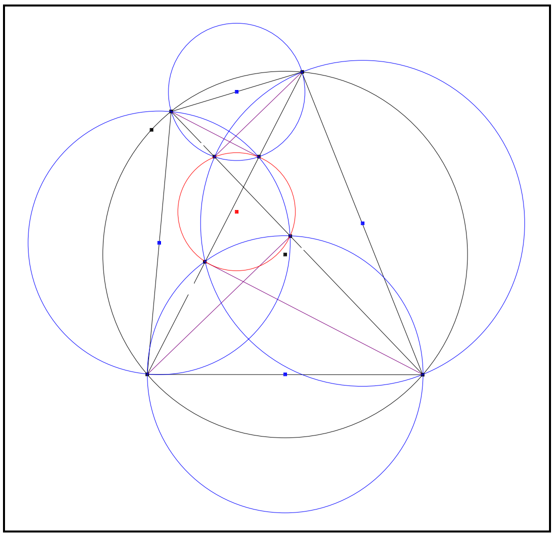
El geómetra francés Auguste Miquel ya era conocido en 1836 cuando todavía era alumno de la institución Barbet en Paris, publicando en el efímero periódico matemático *Le Géomètre*, fundado por Guillard, demostraciones de un teorema de Steiner, no probado. En 1844, publica en el *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de Liouville, el teorema de los seis círculos [**3**] :



Lema 1 o teorema de los seis círculos : *los círculos que tienen por cuerdas los lados de un cuadrilátero cíclico se vueven a cortar en cuatro puntos concíclicos.*

Observemos que Isaac Moisevitch Yaglom [**4**] considera que este "teorema bastante elegante no parece particularmente fecundo"; no obstante, añade que "las consecuencias de este teorema sencillo, como ocurre muchas veces en geometría, pueden, sin exageración, calificarse de notables".

Del lema 1 podemos deducir el caso particular siguiente :



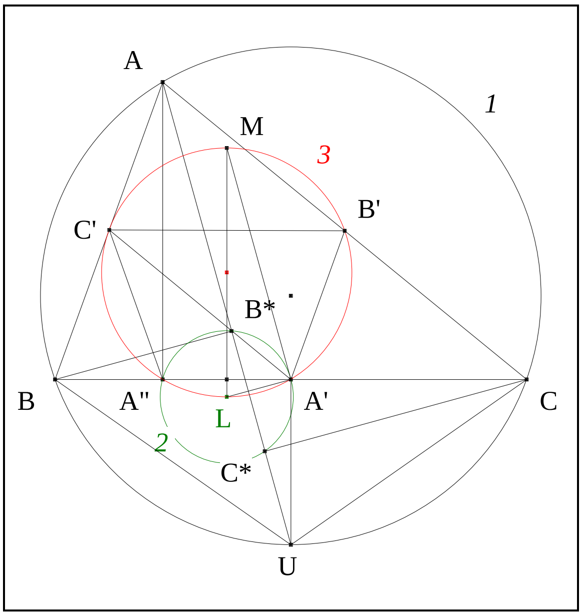
Los círculos cuyos diámetros son los lados de un cuadrilátero cíclico se vueven a cortar enlos vértices de un cuadrilátero cíclico

O bien

Las cuatro proyecciones de los vértices de un cuadrilátero cíclico sobre las diagonales son los vértices de un cuadrilátero cíclico

Vamos ahora a estudiar dos ejemplos de este caso particular en la geometría del triángulo.

Ejemplo 1.
El historiador alemán Max Simon [**5**] atribuye al teniente de Artillería Calabre y al profesor R. Malloizel [**6**] de la Escuela Sainte-Barbe en París el resultado siguiente :



En un triángulo ABC, *las proyecciones* B* y C* *de los vértices* B *y* C *sobre la bisectriz de* A, *el punto medio* A' *de* [BC] *el pie* A" *de la altura desde A, son cuatro puntos concíclicos; el centro del círculo que los contiene es el punto medio* L *del arco* A'A" *del círculo de Euler (o de los 9 puntos) que no contiene a C'.*

- Llamemos U al segundo punto de interseción de la bisectriz desde A con *1*.

- La primera parte es una aplicación directa del caso particular precedente al cuadrilátero ABUC.

- Para la segunda parte,
  Sean *1* el círculo circunscrito de ABC,
  B', C' los puntos medios de los lados [AC], [AB],
  2 el círculo que pasa por B*, C*, A' et A",
  3 el círculo de Euler de ABC ; pasa por A', B', C' y A" ;
  y L, M los puntos de intersección de la mediatriz de [A'A"] con *3*.

- La recta (B'C') que une los puntos medios de los lados [AC] y [AB] de ABC es paralela a (BC).

- El cuadrilátero cíclico A"A'B'C' tiene dos lados opuestos paralelos, así que es un trapecio isósceles;
  Como consecuencias, **(1)** (LM) es la mediatriz de [B'C']
  (2) [LM] es un diámetro de *3*.

  - al ser (LM) la mediatriz de [B'C'], M es el punto medio del arco B'C' que no contiene a A' ;
    Se deduce que (A'M) es la bisectriz de <C'A'B'.

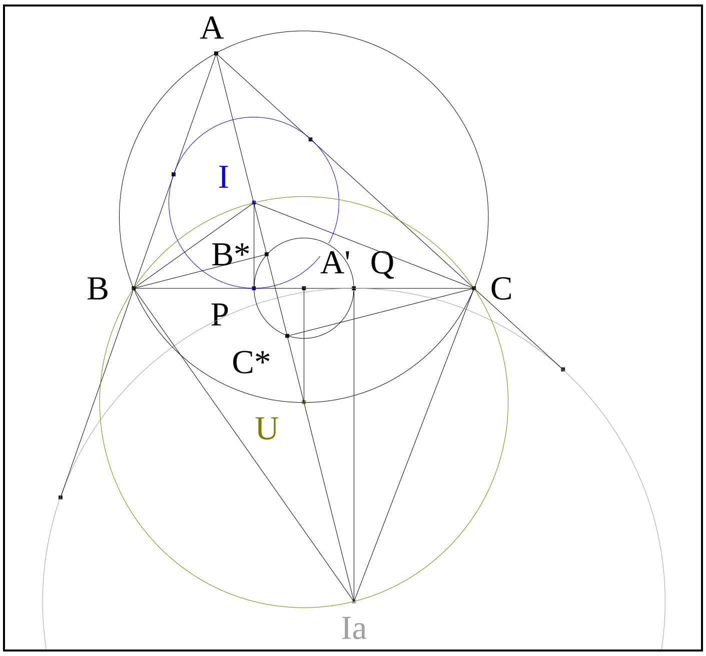
- Siendo A'B'AC' un paralelogramo las bisectrices (A'M) y (AU) de sus dos ángulos opuestos <C'A'B' y <B'AC' son parallelas.

- Siendo A'ML inscriptible en un semicírculo, (A'L) $\perp$ (A'M) ;
  Por tanto, (A'L) $\perp$ (AU) ;
  por hipótesis, (AU) $\perp$ (BB*) y (AU) $\perp$ (CC*) ;
  de ahí se deduce que (A'L), (BB*) y (CC*) son paralelas.

- Siendo A' el punto medio de [BC],y siendo paralelas las rectas (BB*) y (CC*) ,resulta que (A'L) es la mediatriz de [B*C*].

- **Conclusion :** siendo concíclicos los puntos B*, C*, A' y A" ,
L es el centro de *2* y el punto medio del arco A'A" que no contiene a C'.

Ejemplo 2.
El geómetra estadounidense Nathan Altshiller-Court [**7**] atribuye a Eugène Catalan los dos resultados siguientes :



(a) I *es el centro del círculo inscrito, e* Ia *el del círculo exinscrito respecto de* A *en el triángulo* ABC,*entonces el círculo de diámetro* [IIa] *pasa por* B *y* C,*y tiene su centro* U en el círculo circunscrito de ABC. [**8**]

(b) *los puntos de tangencia* P *y* Q *de la rectae* (BC) *con los círculos inscrito y exinscritorelativos a ese lado, son dos puntos isotómicos de ese lado.* [**9**]

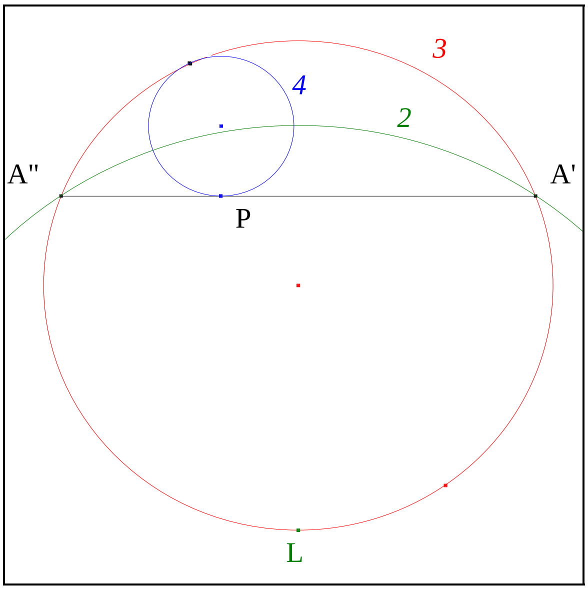
En 1813, Louis Gaultier de Tours [**10**] escribe, durante sus estudios en l'École Polytechnique, una memoria titulada "Les contacts des cercles" en el *Journal de l'École Polytechnique* en la que obtiene una notable propiedad del eje radical, es decir, de la cuerda común a dos círculos secantes :

Lema 2. **(a)** *un círculo ortogonal a dos círculos secantes tiene su centro sobre el eje radical de esos dos círculos*

(b) *Si un círculo tiene su centro sobre el eje radical de dos círculos secantes y es ortogonal a uno de ellos, entonces es ortogonal al otro.*

Al principio del siglo XX, el *Leybourn's Mathematical repository* propone un teorema [**12**] del que presentamos un recíproco.

Lema 3.

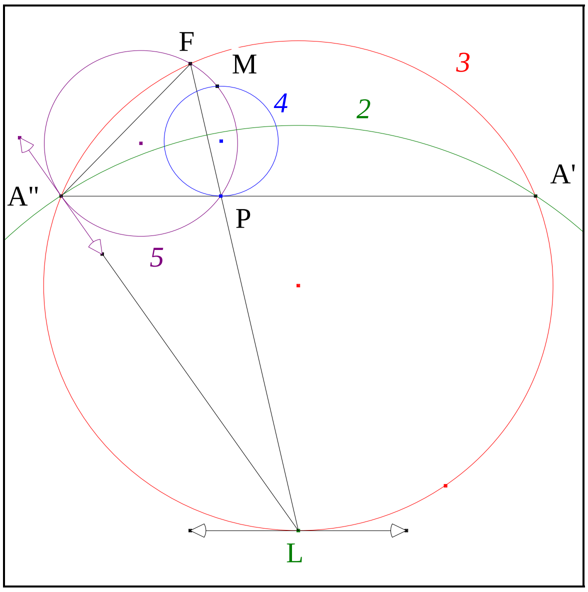


Hipótesis : *3* una circunferencia,
[A"A'] una cuerda horizontal de *3*,
L el polo sur de 3,
2 la circunferencia de centro L que pasa por A", A',
P un punto de [A"A']
y *4* una circunferencia nórdica, tangente a (A"A') en P y ortogonal a *2*.

Conclusión : *4* es tangente a *3*.

Esquema de la demostración.

- Las notaciones y los colores de las circunferencias corresponden a las introducidas previamente.



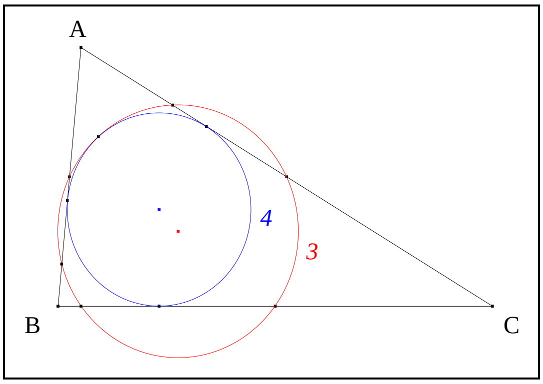
- Sean F el segundo punto de intersección de la recta (PL) con 3
  5 la circunferencia que pasa por A", P y F;
  y M el segundo punto de intersección de *5* y *4*.

- Según el teorema de Reim (v. Apéndice) aplicado a las circunferencias *2* y *5*, como (PA") es parallela a la tangente a *3* en L, la recta (A"L) es tangente a *5* en A" ;
  en consecuencia, por ser la tangente a *2* en A" un diámetro de *5*, *2* es ortogonal a *5*.

- Según el lema 2-a, por ser *2* ortogonal a *5*, el centro L de *3* está en el eje radical (PM) de *4* y *5* ;
  en consecuencia, M coincide con F , es decir, *3* y *4* pasan por F.

- Conclusión : siendo paralelas las tangentes a *4* en P y a *3* en L , *4* es tangente a *3* en F.

3. La nueva demostración del teorema de Feuerbach

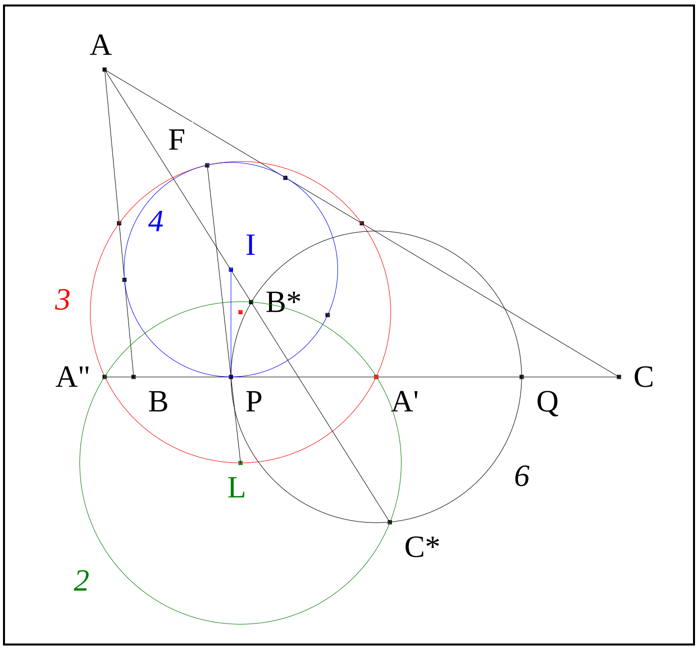


Hipótesis :	ABC	un triángulo
	3	el círculo de Euler de ABC
y	*4*	el círculo inscrito en ABC.

Conclusión : *4* es tangente a *3*.

Esquema de la demostración :

- Las notaciones y colores de las circunferencias corresponden a los introducidos previamente.



- Según el lema 1-ejemplo 2, los puntos P, B*, Q y C* son concíclicos.

- Sea *6* la circunferencia que los contiene.

- Por definición, *6* es ortogonal à 3.

• Por el lema 1-ejemplo 2 y el lema 2-b, los puntos B*, C*, A' et A" son concíclicos.

• Por el lema 2-b, *4* es ortogonal a *2*.

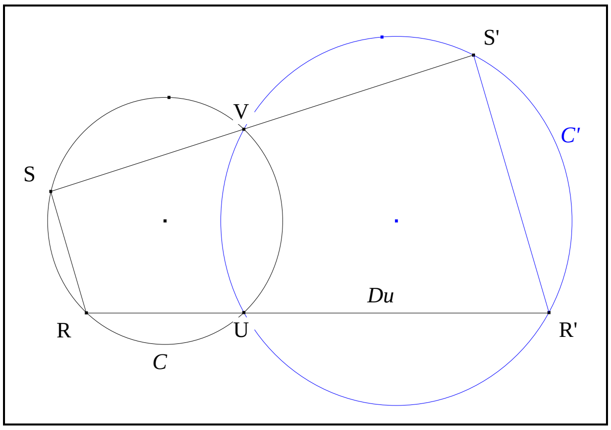
• Conclusión : Por ser P un punto de la cuerda [A"A'] del círculo *3*, y según el lema 3, *4* es tangente à *3*.

Escolios : **(1)** el punto de contacto de *4* y *3*, llamado F, es el punto de Feuerbach de ABC ; Es conocido como X_{11} en ETC [**13**].

(2) F es el segundo punto de intersección de la recta (PL) con el círculo *3* ó *4*.

4. Apéndice

A principios del siglo XX, Frère Gabriel-Marie, cuyo verdadero nombre era Edmond Brunhes, presenta en sus *Exercices de Géométrie*, el resultado de Anton Reim [**11**] del que proponemos un recíproco :



Hipótesis : *C*, *C'* dos círculos secantes,
U, V los puntos de intersección de *C* y *C'*,
Du una recta que pasa por U,
R, R' los segundos puntos de intersección de Du con *C* y *C'*,
S un punto de *C*
y S' un punto de *C'* tal que (R'S') sea paralela a (RS).

Conclusión : los puntos S, V y S' están alineados.

Escolio : si los puntos S y V coinciden, entonces la recta (SVS') es la tangente a *C* en V.

5. Referencias (históricas y académicas)

[1] Feuerbach, *Eigenschaften einiger merkwurdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren.*
R. A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, New York (1960) 200-205.
[2] Coolidge, The Heroic Age of Geometry, *Bulletin of the American Mathematical Society* **35**, 1229.
[3] Miquel A., Mémoire de Géométrie, *Journal de Liouville*, vol. X (1844) 347.
F. G.-M., Théorème 142, *Exercices de Géométrie* 6-ième édition, Rééditions J. Gabay, Paris (1991) 298.
[4] I. M. Yaglom , *Géométrie des nombres complexes*, Éditions Mir, Moscou (1973) 35.
[5] M. Simon, *Über die Entwicklung der Elementar Geometrie im XIX-Jahrhundert*, Leipzig, Teubner (1906) 128.
[6] R. Malloizel, *Journal de Mathématiques Élémentaires* de Bourget (1878) 97.
T. Lalesco, *La Géométrie du Triangle*, Rééditions Jacques Gabay, Paris (1987) 7.

Problem #11006, *Amer. Math. Montly* **110** (2003) 340.
[7] N. Altshiller-Court, Theorem 453, *College Geometry*, Richmond (1936) 75-77.
E. Catalan, Théorème 21, *Théorèmes et problèmes de Géométrie Élémentaire*, Dunod, Paris (1879) 46.
[8] E. Catalan, Théorème 20, *Théorèmes et problèmes de Géométrie Élémentaire*, Dunod, Paris (1879) 44.
N. Altshiller-Court, Theorem 160, *College Geometry*, Richmond (1936) 88-89.
[9] L. Gaultier (de Tours), Les contacts des cercles, *Journal de l'École Polytechnique Cahier* **16** (1812) 124-214.
N. Altshiller-Court, Theorem 453, *College Geometry*, Richmond (1936) 205.
[10] Voir référence 9.
[11] F. G.-M., Théorème 124, *Exercices de Géométrie*, sixième édition (1920), Rééditions Jacques Gabay, Paris (1991) 283.
[12] *Leybourn's Mathematical repository* (New series) **6** tome I, p. 209.
Shirali Shailesh, On the generalized Ptolemy theorem, *Crux Mathematicorum*, **2**, vol. 22 (1996) 48-53.
[13] Kimberling Clark, Triangle Centers and Central Triangles, *Congressus Numerantium*, 129 (1988) 1-285.
http://faculty.evansville.edu/ck6/.

Agradecimientos. Agradezco profundamente al Profesor Francisco Bellot Rosado la lectura y traducción de este artículo.

Jean-Louis Ayme jeanlouisayme@yahoo.fr

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI