UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Curso: Licenciatura em Matemática

Disciplina: Geometria **Professores:** Ana Eliza Cordeiro e Fabio Simas

Atividade de sala de aula - ângulos inscritos em circunferências[1]

Despertar para as diferentes posições possíveis do circuncentro de um triângulo em relação ao próprio triângulo, deduzir a relação entre um ângulo inscrito e central numa circunferência, definir o arco capaz com ênfase no ângulo reto e justificar as condições angulares equivalentes a um quadrilátero ser inscritível. Em termos de habilidades: desenhar suas próprias figuras, desenvolver estratégias para se provar uma afirmação (o que tenho vs. o que quero e a contrapositiva). Como começar?

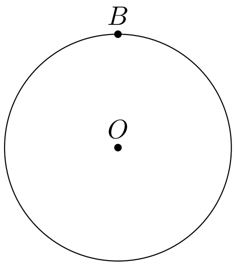
Questão 1: (Visualização e análise) No link a seguir mova os pontos e utilize as ferramentas do Geogebra para observar a relação entre os ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{AOC}$ em diferentes posições dos pontos A e C (observação: todo ângulo diferente de $360°k$ com $k \in \mathbb{Z}$ divide o plano em duas *regiões angulares*. Para esta questão $\widehat{ABC}$ e $\widehat{AOC}$ representam as regiões que determinam o mesmo arco na circunferência e em que $0 < \widehat{ABC} < 180°$).

`https://www.geogebra.org/m/ukRFrPpp`

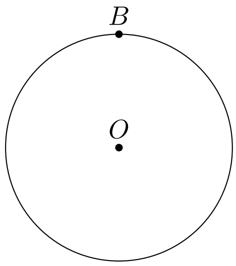
Registre a relação observada entre os ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{AOC}$.

Questão 2: (Dedução formal) Nesta questão pretende-se justificar a proposição realizada na questão anterior. Nas circunferências a seguir esboce triângulos ABC com circuncentro nas posições determinadas em relação ao triângulo e explique por que $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC}$ em cada uma das situações acima.

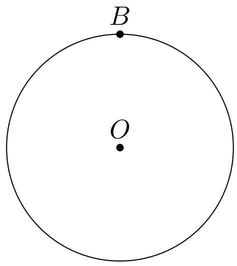
circuncentro no interior



circuncentro sobre um dos lados

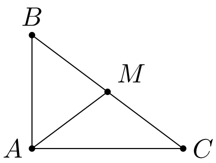


circuncentro no exterior

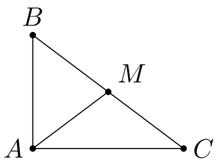


Questão 3: Dado um triângulo ABC e M o ponto médio de BC, mostre que $\widehat{A} = 90°$ se, e somente se, $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$.

Prova: $\Leftarrow$) $\widehat{A} = 90° \Leftarrow \overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$.



$\Rightarrow$) $\widehat{A} = 90° \Rightarrow \overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$.



Questão 4: Dado um segmento BC num plano π. Descreva geometricamente o conjunto $\left\{P \in \pi \mid \widehat{BPC} = 90°\right\}$.

Definição. *Dado um segmento BC e um ângulo $0 < \alpha < 180°$, o conjunto dos pontos P do plano tais que $\widehat{BPC} = \alpha$ é chamado o* **arco capaz de ângulo α sobre o segmento BC**.

Questão 5: Motivado pela atividade anterior, é natural se perguntar qual é o aspecto visual do conjunto

$$AC_{\alpha,BC} = \left\{P \in \pi \mid \widehat{BPC} = \alpha\right\}$$

para outros valores de α. Em `https://www.geogebra.org/m/Fr4AgZ3U` faça o que se pede:

a) Movimente o ponto P e tente identificar qual é o lugar geométrico deste ponto no plano. Quando julgar que sua reflexão a respeito foi suficiente, marque a caixa "Solução parcial".

b) Encontramos um subconjunto de $AC_{\alpha,BC}$. Reflita e discuta que outros pontos do plano devem estar em $AC_{\alpha,BC}$ e então clique em "Solução completa". Mova o ponto P novamente para entender porque este novo conjunto também está em $AC_{\alpha,BC}$. Descreva geometricamente o ponto P' em relação a P.

c) Marque a caixa "Alterar o valor do ângulo" e mova o ponto A para observar como o $AC_{\alpha,BC}$ se modifica quando se altera o ângulo para valores maiores que $90°$.

d) Prove que não há pontos de $AC_{\alpha,BC}$ fora da união dos dois arcos da figura.

Solução do item d)

Questão 6: (Aplicação) Condições necessárias e suficientes para que um quadrilátero seja inscritível numa circunferência em termos de ângulos.

a) (Condição necessária) Se $ABCD$ é inscritível numa circunferência, então a soma dos ângulos oposto é $180°$.

b) (Condição necessária) Se $ABCD$ é inscritível numa circunferência, então o ângulo de um lado com uma diagonal é igual ao ângulo do lado opostos com a outra diagonal.

c) Prove que as condições acima também são suficientes. Enuncie os resultados claramente antes de justificar.