

Teoría – Tema 1

CCSS Teoría - 5 - Derivadas, crecimiento e interpretación geométrica

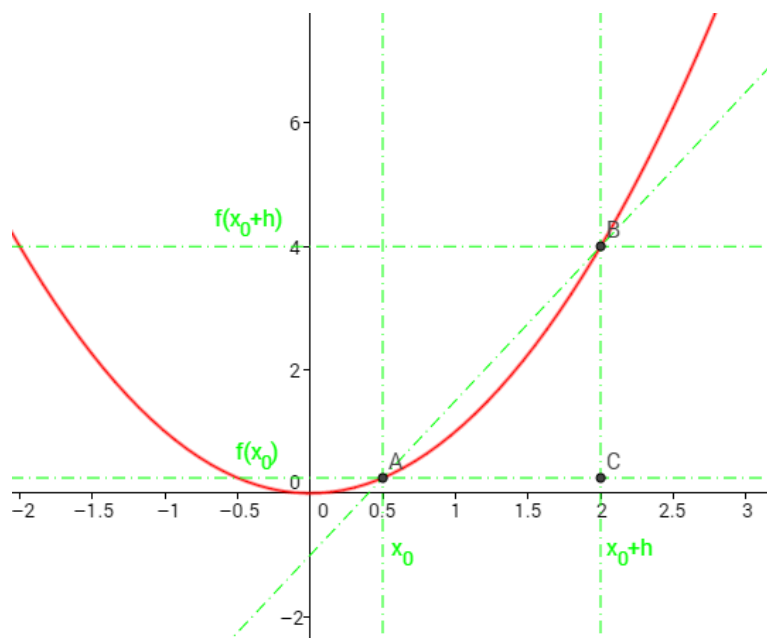
Incremento medio e incremento instantáneo de una función $f(x)$

Vamos a acercarnos al concepto de derivada de una función.

Supongamos una función genérica $f(x)$ y un punto x_0 perteneciente al dominio de la función. Consideremos una cantidad $h > 0$. Podemos definir la tasa de variación media o el **incremento medio de la función $f(x)$** para el intervalo $[x_0, x_0 + h]$ de la forma:

$$\text{Incremento medio de } f(x) \text{ en } [x_0, x_0 + h] = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

----- $f(x)$ arbitrario



Del triángulo rectángulo ABC representado en la gráfica podemos ver el incremento medio de $f(x)$ en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$ como el cociente entre la altura y la base del triángulo.

Altura $\rightarrow f(x_0 + h) - f(x_0)$

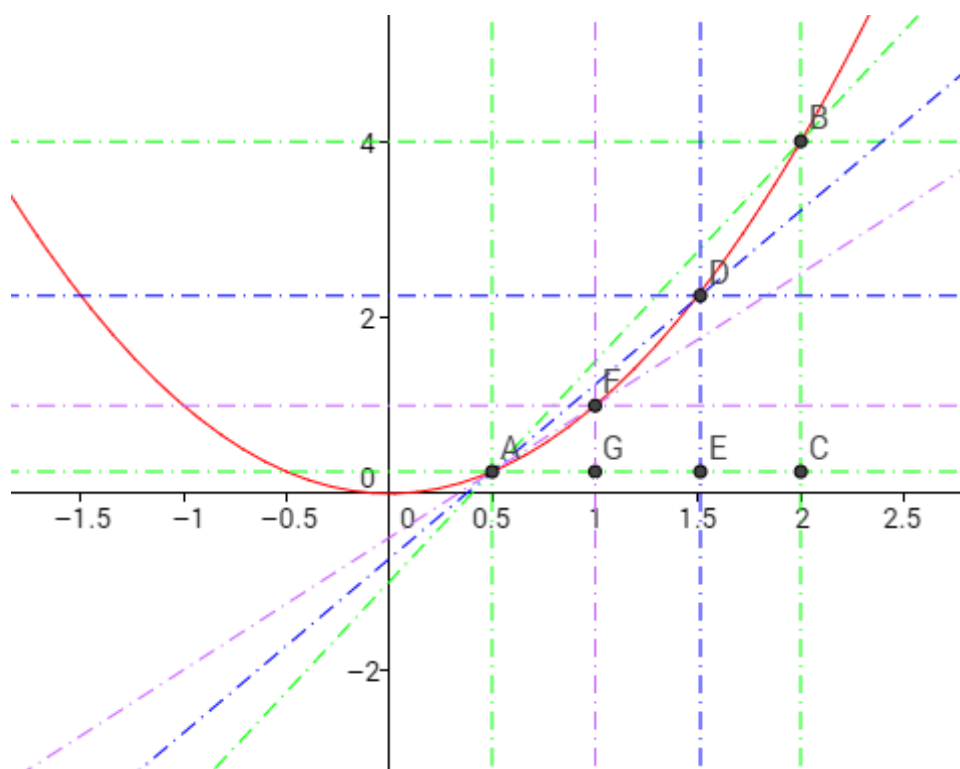
Base $\rightarrow x_0 + h - x_0 = h$

Es más, si consideramos el ángulo del vértice A podemos ver el incremento medio de $f(x)$ como la tangente del ángulo A .

$$\operatorname{tg}(A) = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado contiguo}} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Si tomamos valores de h cada vez más pequeños, el valor $x_0 + h$ se acercará progresivamente a x_0 .

----- $f(x)$ arbitrario



Es fácil intuir que en el caso límite $h \rightarrow 0$ tendremos $x_0 + h \rightarrow x_0$, y la recta que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ ya no cortará a la gráfica de $f(x)$ en dos puntos sino únicamente en el punto $(x_0, f(x_0))$. Para $h \rightarrow 0$ ya no hablamos de incremento medio sino de **incremento instantáneo de $f(x)$** .

Es decir, en el caso límite $h \rightarrow 0$ la recta que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ será tangente a $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ y su pendiente (tangente del ángulo A) será igual al valor del incremento instantáneo de $f(x)$.

$$\text{Incremento instantáneo de } f(x) \text{ en } x_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Para un punto genérico x este incremento instantáneo de $f(x)$ es su derivada. Y su **interpretación geométrica nos dice que la derivada de $f(x)$ en el punto genérico x es igual al valor de la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto x .**

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leftrightarrow \frac{d[f(x)]}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Esta expresión se conoce como definición formal o analítica de la derivada de $f(x)$. **Si una función es derivable en x_0 también será continua en x_0 . El inverso, no siempre es cierto.**

Un ejemplo de aplicación de la definición formal de derivada

Vamos a aplicar, a modo de ejemplo, la definición formal de derivada a la función $f(x) = \frac{1}{x}$.

Recordamos la definición analítica de derivada.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Aplicado a nuestra función.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - x - h}{x \cdot (x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{x \cdot (x+h) \cdot h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{x \cdot (x+h)} : \frac{h}{1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{xh \cdot (x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x \cdot (x+h)}$$

Evaluamos el límite (fíjate que la variable del límite es h y no x).

$$f'(x) = \frac{-1}{x \cdot (x+0)} = \frac{-1}{x^2}$$

Por lo tanto.

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

Realizar este proceso para derivar cualquier función es largo, tedioso y puede convertirse en un proceso nada trivial. Por eso recurriremos a las famosas **tablas de derivación**, para aprender la forma de las derivadas de las funciones y de la composición de funciones más usuales.

La derivada es una medida del crecimiento

Conocemos la definición formal de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En el límite, encontramos un cociente. El numerador es una diferencia de valores de la imagen. El denominador es una diferencia de valores de la variable independiente. Este valor h tiende a 0, pero por definición es una cantidad siempre positiva porque $x+h$ es siempre mayor que x .

Por lo tanto, si el numerador es positivo, todo el cociente será positivo. Y si el denominador es negativo, todo el cociente será negativo.

¿Qué significa numerador positivo? Significa que el valor $f(x+h)$ es mayor que $f(x)$. Y esto provoca una función que crece estrictamente en el intervalo $[x, x+h]$.

¿Qué significa numerador negativo? Significa que el valor $f(x+h)$ es menor que $f(x)$. Y esto provoca una función que decrece estrictamente en el intervalo $[x, x+h]$.

Consecuencia: si la función es estrictamente creciente, la derivada es positiva. Y si la función es estrictamente decreciente, la derivada es negativa.

Si la función es constante (gráfica horizontal) la derivada es nula, al no ser ni estrictamente creciente ni estrictamente decreciente.

Ejemplo 1 resuelto

La gráfica de la función $p(x) = \frac{x^2}{x-1}$ muestra claramente una curva estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y estrictamente decreciente en el intervalo $(0, 1)$.

Comprueba numéricamente que la derivada de la función es positiva en cualquier valor que tomemos en el intervalo $(-\infty, 0)$ y que es negativa en cualquier valor del intervalo $(0, 1)$.

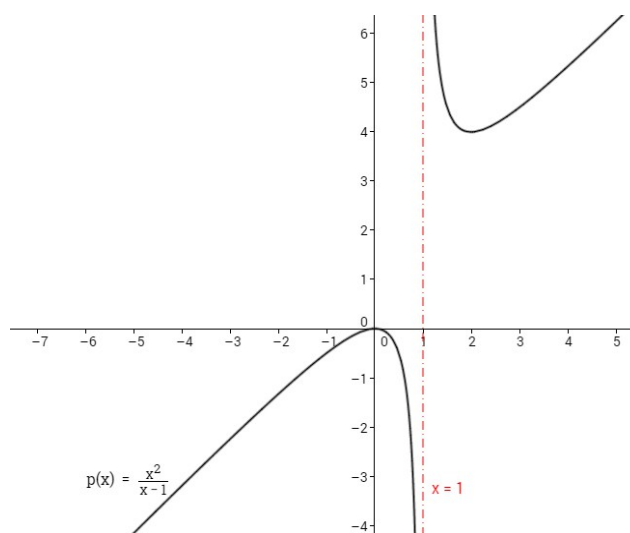
$$p'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2(1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

Efectivamente, se cumple:

$$x = -2 \rightarrow p'(-2) = \frac{(-2)^2 - 2(-2)}{(-2-1)^2} = \frac{8}{9} > 0 \rightarrow \text{derivada positiva} \rightarrow \text{función estrict. creciente}$$

$$x = -1 \rightarrow p'(-1) = \frac{(-1)^2 - 2(-1)}{(-1-1)^2} = \frac{3}{4} > 0 \rightarrow \text{derivada positiva} \rightarrow \text{función estrict. creciente}$$

$$x = 0.5 \rightarrow p'(0.5) = \frac{(0.5)^2 - 2(0.5)}{(0.5-1)^2} = -3 < 0 \rightarrow \text{derivada negativa} \rightarrow \text{función estrict. decreciente}$$



Derivada de una función y recta tangente a la función

Para un punto genérico x este incremento instantáneo de $f(x)$ lo hemos llamado derivada. Y su **interpretación geométrica nos dice que la derivada de $f(x)$ en el punto genérico x es igual al valor de la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto x .**

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leftrightarrow \frac{d[f(x)]}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Es decir, si tenemos la función $f(x)$ y su derivada es $f'(x)$, la pendiente m de la recta tangente a la función que pase por el punto $A(x_0, y_0)$ será:

$$m = f'(x_0) \rightarrow \text{La pendiente es el valor de la derivada evaluada en } x_0$$

Y si tenemos la pendiente m y el punto $A(x_0, y_0)$, podemos escribir la ecuación punto pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Ejemplo 1 resuelto

Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^2 - 1$ en el punto de abscisa $x = 2$.

La derivada de la función será $\rightarrow f'(x) = 2x \rightarrow$ El valor de la pendiente de la recta tangente en el punto $x = 2$ será $m = f'(2) = 4$.

El valor del punto $x = 2$ en la función será $\rightarrow f(2) = 2^2 - 1 = 3 \rightarrow$ Obtenemos el punto $(2, 3)$.

La ecuación de la recta tangente a la función en el punto es:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \rightarrow 4 = \frac{y - 3}{x - 2} \rightarrow y = 4x - 5$$

Ejemplo 2 resuelto

Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la función $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$ en el punto de abscisa $x = e$.

La derivada de la función será $\rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \rightarrow$ El valor de la pendiente de la recta tangente en el

punto $x=e$ será $m=f'(e)=\frac{-1}{e^2}+\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e^2}$.

El valor del punto $x=e$ en la función será $\rightarrow f(e)=\frac{1}{e}+\ln(e)=\frac{1}{e}+1=\frac{1+e}{e} \rightarrow$ Obtenemos el punto $(e, \frac{1+e}{e})$.

La ecuación de la recta tangente a la función en el punto es:

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0} \rightarrow \frac{e-1}{e^2}=\frac{y-\frac{1+e}{e}}{x-e}$$

La recta normal es perpendicular a la recta tangente, por lo que el producto de las pendientes de ambas rectas debe ser igual a -1 . Es decir:

$$m_{normal}=\frac{e^2}{1-e}$$

Y la ecuación de la recta normal en el punto $(e, \frac{1+e}{e})$ resulta:

$$\frac{e^2}{1-e}=\frac{y-\frac{1+e}{e}}{x-e}$$

Derivabilidad de una función en un punto

Una vez obtenida la definición analítica de la derivada de $f(x)$ podemos preguntarnos por la **derivabilidad de la función en un punto x_0** . Es decir:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Si este límite existe y es finito, decimos que la función es derivable en $x = x_0$. Y si el límite es finito, como el denominador vale 0, el numerador también debe valer 0.

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0+h) - f(x_0)] = 0 \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

Si hacemos $x = x_0 + h$, nuestra expresión queda: $\lim_{h \rightarrow 0} f(x) = f(x_0)$

Y si $h \rightarrow 0$, significa que $x \rightarrow x_0$. Por lo tanto: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Es decir, el límite de la función $f(x)$ cuando $x \rightarrow x_0$ es igual al valor de la función en x_0 . Y esta es la definición de continuidad en un punto. Por lo tanto, **si una función es derivable en x_0 también será continua en x_0 . El inverso, no siempre es cierto.**

De la misma manera que en continuidad estudiamos los límites laterales (en asíntotas verticales, en funciones definidas a trozos, etc.), en derivabilidad también podemos hablar de derivada por la izquierda y derivada por la derecha.

$$f'(x_0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \rightarrow \text{derivada lateral izquierda}$$

$$f'(x_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \rightarrow \text{derivada lateral derecha}$$

Si ambos límites existen, son finitos e iguales, decimos que existe la derivada de la función en el punto x_0 .

$$f'(x_0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \rightarrow \exists f'(x_0)$$

Concluyendo: **para afirmar la derivabilidad de una función $f(x)$ en un punto x_0 debemos:**

1. Demostrar la continuidad de $f(x)$ en x_0 .

2. Aplicar la definición analítica de derivada en x_0 y comprobar si el resultado es finito. En funciones definidas a trozos, deberemos calcular las derivadas laterales y confirmar que son iguales y finitas.