CONSTRUÇÕES DE MOLDES DO CUBO
POR MEIO DE ROTAÇÕES E TRANSLAÇÕES

Sérgio Carrazedo Dantas
Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) – Campus Apucarana
sergio.dantas@unespar.edu.br

Em um grupo de discussões, um colega postou uma pergunta sobre como obter a planificação de um cubo utilizando o GeoGebra. Prontamente, os participantes do grupo escreveram recomendando que utilizasse dois comandos do software:

- Cubo[<Ponto>, <Ponto>]
- Planificação[<Poliedro>, <Número>]

Na Figura 1 aparece um cubo construído a partir dos pontos (0, 0, 0) e (1, 0, 0) e, para tanto, foi digitado cubo = Cubo[(0,0,0), (1,0,0)] no campo Entrada. Para obter a planificação foi utilizado o comando Planificação[cubo, 1].

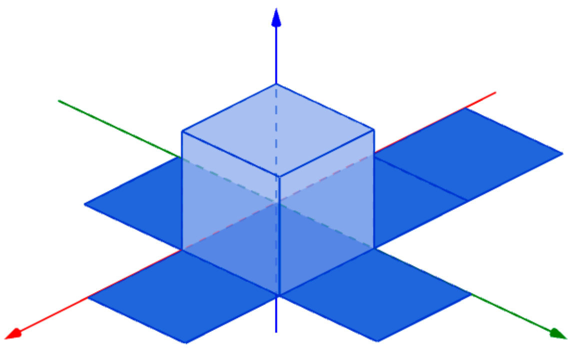

Figura 1: Um cubo e sua planificação

O parâmetro <Poliedro> é o nome do poliedro que, nesse caso, é cubo e, o parâmetro <Número>, substituído por 1 (um), indica que o molde do cubo deve estar completamente aberto, formando sua planificação. Esse parâmetro pode assumir qualquer valor no intervalo [0, 1] e, com isso, obtém o molde em estágios diferenciados de abertura. Os moldes da Figura 2 possuem os seguintes valores para esse parâmetro: 0.1, 0.5 e 0.8.

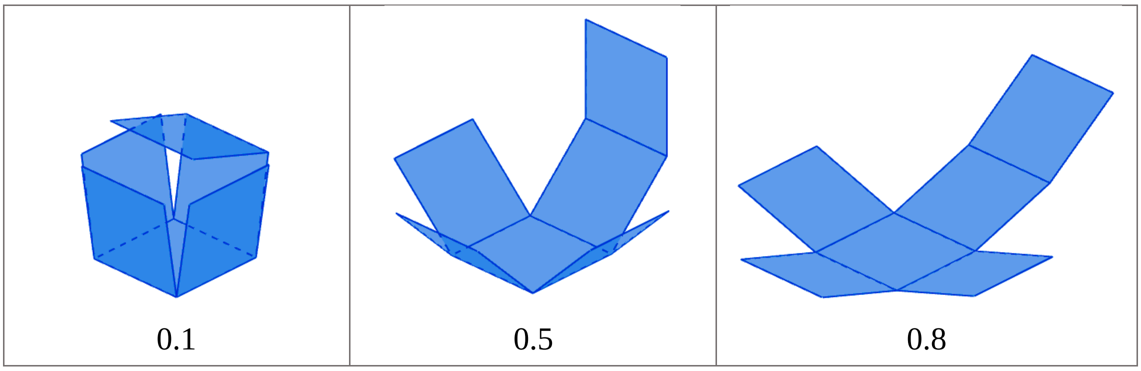

Figura 2: Moldes e três estágios de abertura

O colega do grupo não ficou completamente satisfeito com a resposta recebida, pois utilizando o comando de planificação do GeoGebra é possível obter apenas uma entre onze possibilidades de planificações do cubo.

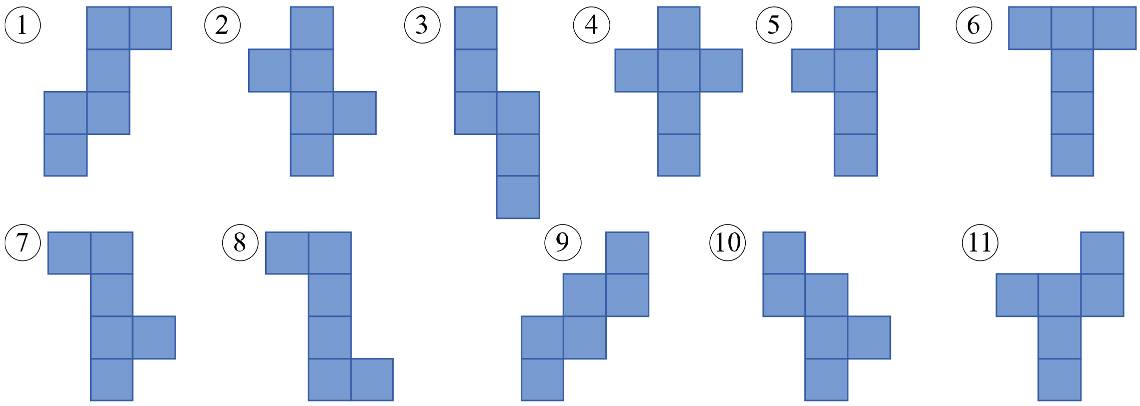

Figura 3: Onze possibilidades de planificação de um cubo

Esse texto tem o objeto de apresentar uma maneira de obter todas as possibilidades de planificação de um cubo. Para isso, serão utilizadas translações e rotações de um quadrado utilizando comandos do GeoGebra.

CONSTRUÇÃO DE UM MOLDE

Antes de iniciar a construção é necessário escolher uma das planificações do cubo, conforme exibidas na Figura 3. Em seguida, deve-se decidir qual das faces ficará fixa para que, a partir dela, as demais sejam obtidas por rotações e translações. Nessa seção do texto é tomada a planificação 2 que aparece na Figura 3 e a face F_1 é fixa.

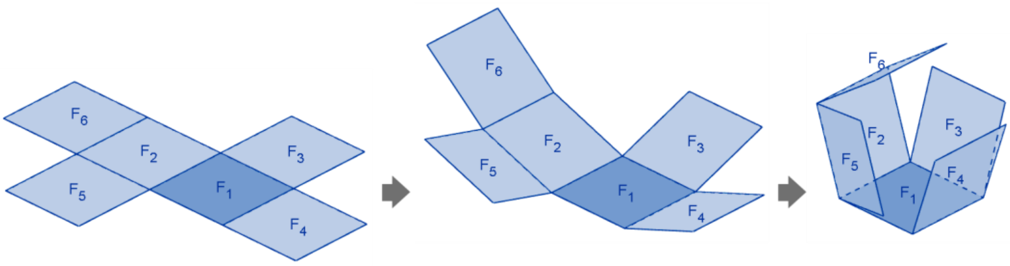

Figura 4: Molde 2 em processo de montagem do cubo

Para iniciar a construção, o GeoGebra deve exibir a Janela de Álgebra, a Janela de Visualização e a Janela de Visualização 3D. Para exibir ou ocultar essas janelas, clique no menu Exibir e acesse a opção relativa ao nome da janela.

Construa a primeira face do cubo digitando F_1 = Polígono[(0, 1, 0), (0, 0, 0), 4, EixoZ] no campo Entrada. Em seguida, construa também três vetores. Para construir o primeiro, digite u = (1,0,0) no campo Entrada. Para os demais, digite v = (0,1,0) e w = (0,0,1). Esses vetores e outros, obtidos a partir destes, serão uteis para transladar a face F_1 do cubo para obter outras faces.

Oculte os vetores u, v e w. Em seguida, clique na ferramenta Controle deslizante e construa, na Janela de Visualização, um controle α com valor mínimo 0º, valor máximo

90º e incremento 1º. Esse controle será utilizado para a medida do ângulo de rotação das faces derivadas de F_1.

Na Figura 5 é possível observar a posição de cada uma das faces do cubo em relação a F_1 e em relação aos eixos x e y.

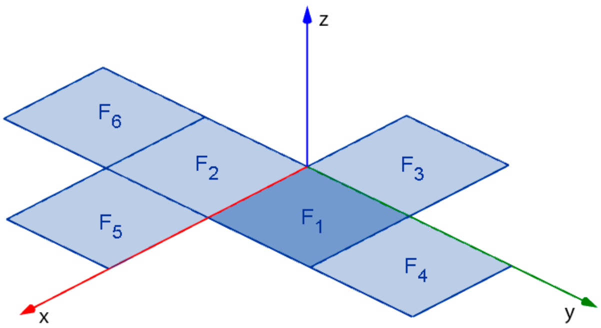

Figura 5: Planificação de um cubo

A face F_2 pode ser obtida por uma rotação de F_1 em torno do eixo x. Quando o cubo está montado F_2 é ortogonal a F_1, ou seja, formam um ângulo de 90º. Assim, F_2 deve ser obtida nessa construção por um giro de F_1, em torno do eixo x no sentido anti-horário, de 90º + α.

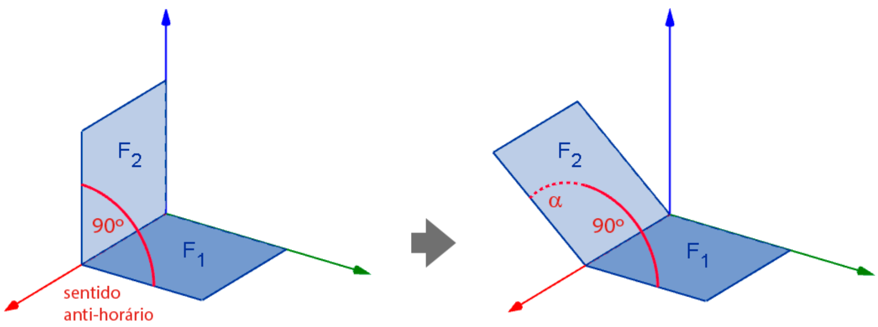

Figura 6: Processo de construção de F_2 a partir de F_1

No campo de Entrada digite a seguinte expressão que constrói F_2 por meio de um giro de F_1 por meio de um giro de 90º + α.

F_2 = Girar[F_1, 90° + α, EixoX]

A face F_3 é obtida de forma semelhante a F_2, por uma rotação de F_1. Porém, o giro é no sentido oposto e em relação ao eixo y. Para produzir o giro no sentido horário, o ângulo deve ser negativo.

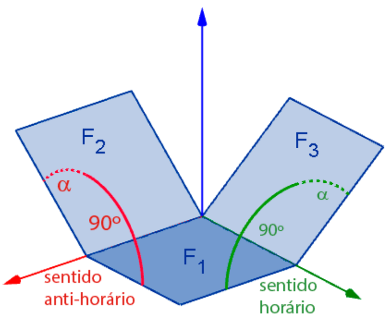

Figura 7: Processo de construção de F_3 a partir de F_1

Para obter a face F_3, no campo Entrada, digite o comando a seguir:

F_3 = Girar[F_1, -90° - α, EixoY]

A face F_4 deve ser obtida girando F_1 em torno do eixo x e, em seguida, transladando o resultado obtido na direção positiva do eixo y, utilizando o vetor v.

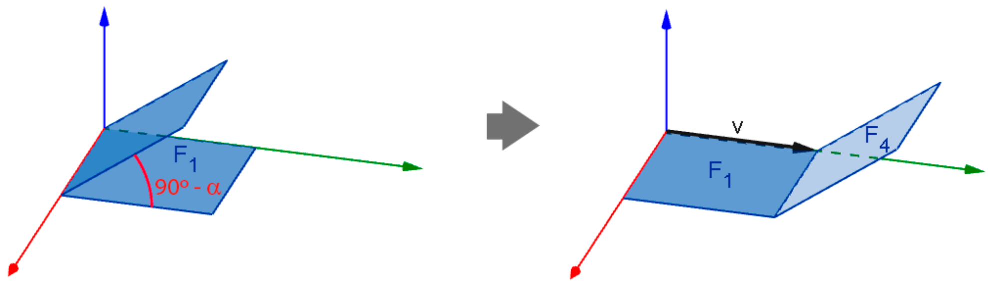

Figura 8: Movimento combinado para construção de F_4 a partir de F_1

Note que o ângulo de rotação utilizado (90º - α) é diferente dos utilizados para obter as faces F_1, (90º + α) e F_2, - (90º + α). No caso de F_3, subtrair α de 90º ao invés de adicionar, faz com que a face gire no sentido horário, ao invés de girar no sentido anti-horário.
Os movimentos de rotação e translação são obtidos por meio de uma combinação de dois comandos:

- Transladar[<Objeto>, <Vetor>]
- Girar[<Objeto>, <Ângulo>, <Eixo de Rotação>]

No campo de Entrada digite o seguinte comando:

F_4 = Transladar[Girar[F_1, 90° - α, EixoX], v]

Note que o comando Girar[F_1, 90° - α, EixoX] substitui o parâmetro <Objeto> no comando Transladar. Assim, o resultado final é um duplo movimento, uma rotação seguida de uma translação, que gera apenas a face F_4 como objeto final. Se fosse utilizado o comando Girar e, em seguida, o comando Transladar aplicado ao resultado de Girar, seriam obtidos dois objetos.

- A = Girar[F_1, 90° - α, EixoX]
- F_4 = Transladar[A, v]

Na planificação exibida na Figura 5, a face F_5 possui um lado adjacente a F_2, o que implica que nesse molde a face F_5 deve se movimentar acompanhando o movimento de F_2. Em outras palavras, F_5 deve ser sincronizada aos giros de F_2.
Para construir F_5 gire F_1 um ângulo de medida 90º - α em torno do eixo y, obtendo um polígono A.

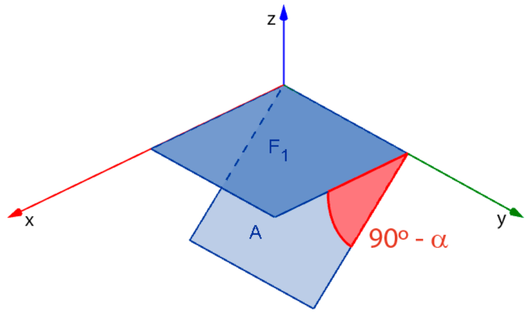

Figura 9: Primeira parte da construção de F_5 a partir de F_1

Em seguida, gire A, α + 90º em torno do eixo x. Esse último movimento é o mesmo utilizado para obter F_2 a partir de F_1.

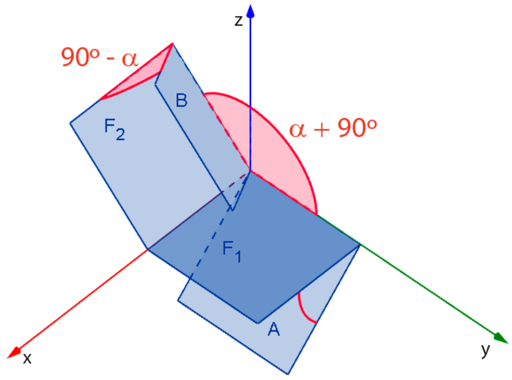

Figura 10: Rotação de A, α + 90º em torno do eixo x, para obter B

Para concluir a construção de F_5 translade B na direção positiva do eixo x, ou seja, pelo vetor u.

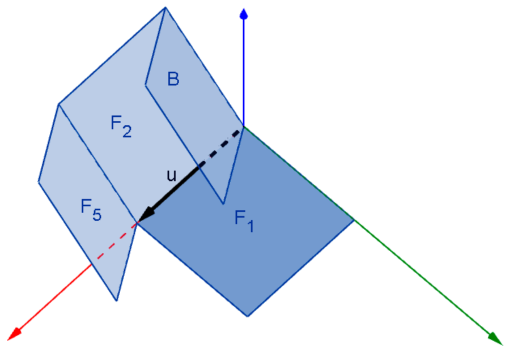

Figura 11: Translação de B na direção de u para obter F_5

O ângulo formado entre F_5 e F_2 é o suplementar ao ângulo formado entre F_2 e B, ou seja 180º - (90º - α) = 90º + α.
Os polígonos A e B que correspondem a estágios da construção de F_5 podem ser obtidos no GeoGebra, digitando os seguintes comandos:

- A = Girar[F_1, 90° - α, EixoY]
- B = Girar[A, α + 90°, EixoX]
- F_5 = Transladar[B, u]

Utilizando uma expressão de comandos combinados é possível obter apenas um objeto final. Para isso, é preciso fazer "F_5(B(A)))", ou seja,

F_5 = Transladar[Girar[Girar[F_1, 90° - α, EixoY], α + 90°, EixoX], u]

A última face a ser construída é F_6 que, como é possível observar na Figura 12, se movimenta em sincronia com o giro de F_2 em torno do eixo x. Assim, F_6 altera sua posição pelo giro 90º + α de F_2 em torno do eixo x, simultaneamente, sofre também um giro de 90º + α, conforme apresentado na Figura 12.

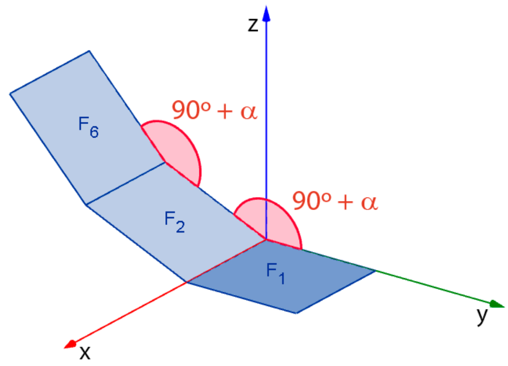

Figura 12: Movimento de F_6 em sincronia com F_2

Para obter F_6, gire F_1 em torno do eixo x, em um ângulo de medida 2(90º + α) = 180º +2α. Suprimindo 180º na medida anterior obtém-se o mesmo resultado, ou seja, um polígono por uma rotação de 2α em torno do eixo x.

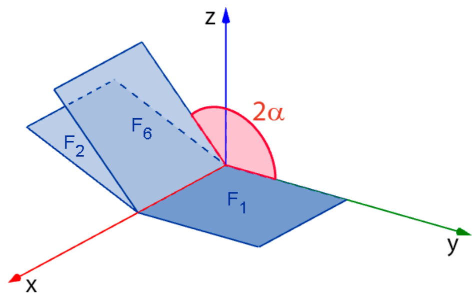

Figura 13: Giro de F_1, 2α em torno do eixo x, para obter F_6

F_6 deve ser transladada para que um de seus lados fique adjacente a um lado de F_2. Para isso, constrói-se um vetor com a mesma rotação de F_2 em relação ao eixo x. Esse vetor pode ser obtido girando v, em torno do eixo x, em um ângulo de medida 90º + α. Ou ainda, girando w, em relação ao eixo x, por um ângulo α.

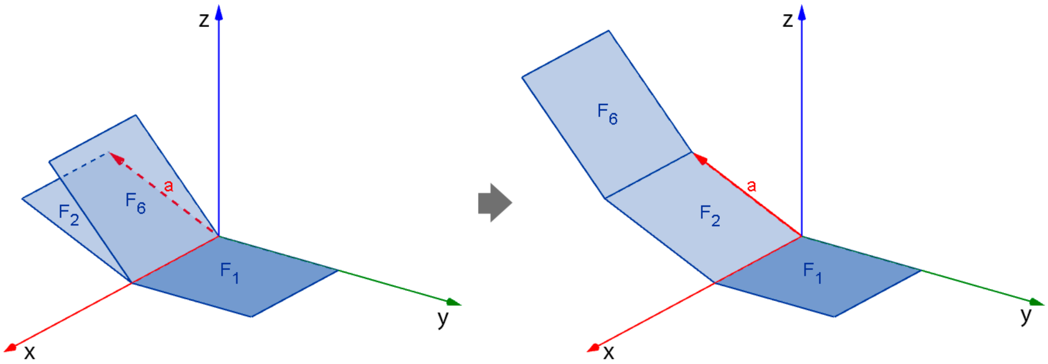

Figura 14: Translação de F_6 pelo vetor a

Para obter F_6, realizando as rotações e a translação apresentadas anteriormente, digite no campo Entrada a seguinte expressão de comandos combinados.

F_6 = Transladar[Girar[F_1, 2α, EixoX], a]

Após construir F_6 o molde do cubo fica completo. Variando o controle deslizante α de 0º (cubo montado) a ângulos maiores que zero, obtém-se estágios de abertura do molde e, com α = 90º, obtêm-se a planificação do cubo.

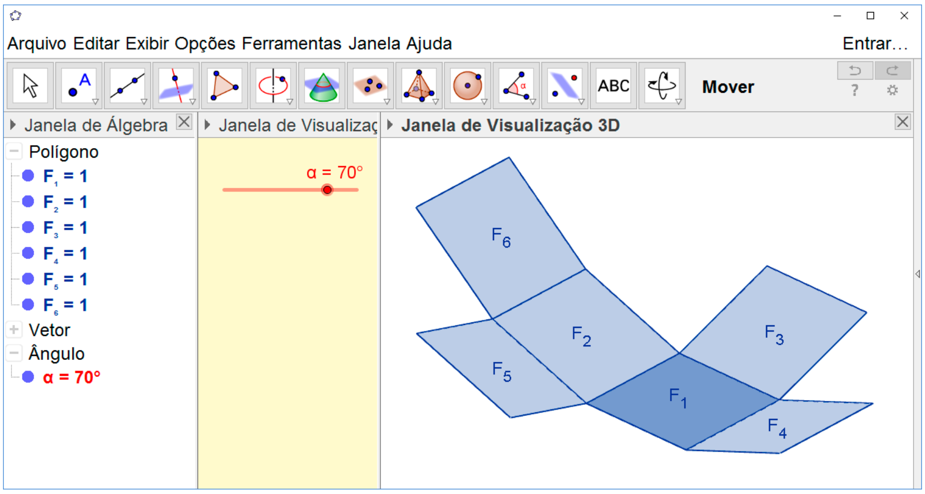

Figura 15: Molde do cubo

MOLDE DO CUBO COM ÂNGULOS INDEPENDENTES

O molde cuja construção foi apresentada na seção anterior é baseado em apenas um ângulo α. Na prática isso faz com que todas as faces formem o mesmo ângulo (90º + α) com outra face adjacente. Nessa seção propõe-se uma alteração na construção para que as angulações entre pares de faces adjacentes sejam controladas de forma independente.

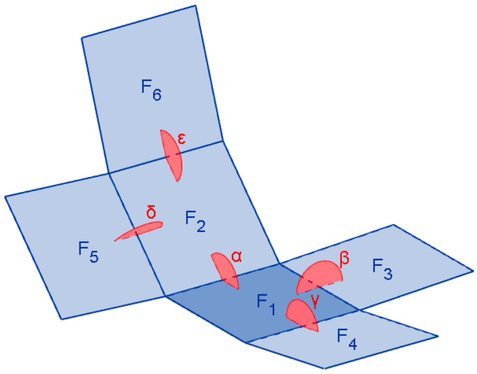

Figura 16: Molde do cubo com ângulos entre faces adjacentes

Retome o molde do cubo construído na seção anterior e acrescente quatro controles deslizantes β, χ, δ e ε, todos com mínimo 0º, máximo 90º e incremento 1º.
Em seguida, redefina os comandos utilizados para construir as faces F_2, F_3, F_4 e F_5, apenas modificando o parâmetro do ângulo.

- F_2 = Girar[F_1, **β** + 90°, EixoX]
- F_3 = Girar[F_1, -90° - **χ**, EixoY]
- F_4 = Transladar[Girar[F_1, 90° - **δ**, EixoX], v]
- F_5 = Transladar[Girar[Girar[F_1, 90° - **δ**, EixoY], α + 90°, EixoX], u]

A face F_6 sofre alterações em elementos além do ângulo, pois, como ela é obtida por dois giros simultâneos em torno do eixo x, na construção inicial, esses ângulos foram somados e combinados em um único movimento. Para utilizar os ângulos α e ε, os giros simultâneos em torno do eixo x devem ser escritos em movimentos separados. Assim, a expressão que gera F_6 deve ser modificada para:

- F_6 = Transladar[Girar[Girar[F_1, **α**, EixoX], **ε**, EixoX], a]

Realizada as alterações descritas anteriormente obtém-se uma construção com o qual é possível obter moldes com os seguintes aspectos.

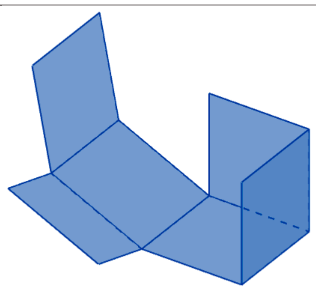	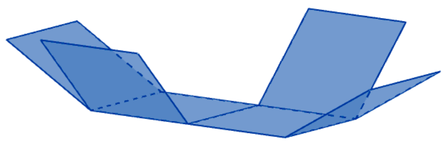
α = 65º, β = 0º, χ = 0º, δ = 65º e ε = 36º	α = 65º, β = 0º, χ = 0º, δ = 65º e ε = 36º

Figura 17: Moldes de um cubo com ângulos diferentes entre faces adjacentes

CONSTRUÇÃO DE TODOS OS MOLDES DO CUBO

Nas seções anteriores foi abordado como construir cinco faces de um cubo a partir de uma face fixada. Para isso, explorou-se noções de rotação e translação no GeoGebra, que foram apresentadas por meio da construção de um molde do cubo.

No texto que segue são apresentados os comandos do GeoGebra, construídos a partir de rotações e translações, que permitem obter as onze planificações de um cubo. Na Figura 18 é apresentado o layout final do arquivo proposto nesta seção. Note que na Janela de Álgebra há 18 faces, das quais estão exibidas apenas seis, F_1, F_2, F_3, F_7, F_8, F_{14} para construir um molde do cubo.

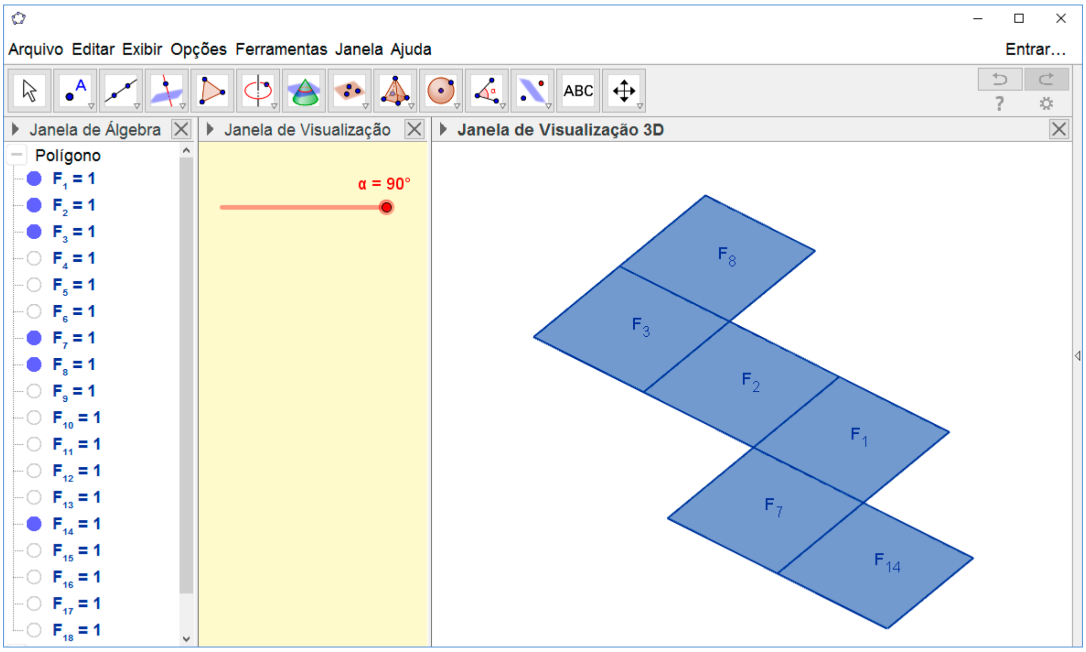

Figura 18: Layout do arquivo com as faces 1, 2, 3, 7, 8 e 14 exibidas

Para iniciar, construa três vetores u, v e w, o controle deslizante α e a face F_1, conforme descrito no início da seção "Construção de um molde". No próximo passo, deve-se obter outros três vetores:

- a = Girar[w, α, EixoX]
- b = Girar[w, -α, EixoX]
- c = Girar[Girar[v, α - 90°, EixoX], (-90)° - α, EixoY].

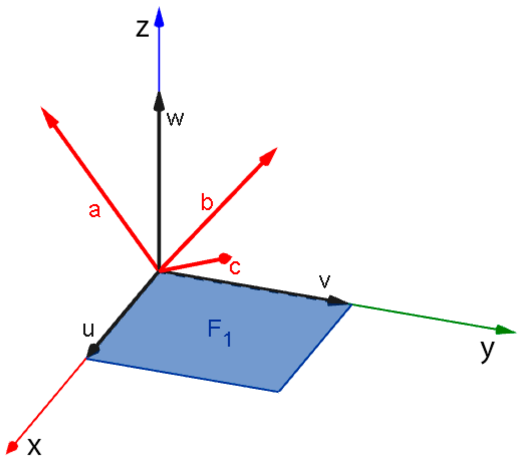

Figura 19: Elementos básicos para construção das faces 2 a 18

Para obter as faces 2 a 18, digite cada uma das expressões que seguem no campo Entrada. Em seguida, oculte todos os polígonos obtidos.

- F_2 = Girar[F_1, α + 90°, EixoX]
- F_3 = Transladar[Girar[F_1, 2α, EixoX], a]
- F_4 = Transladar[Girar[F_1, 90° - α, EixoX], v]
- F_5 = Transladar[Girar[F_1, 180° - 2α, EixoX], v + b]
- F_6 = Girar[F_1, -90° - α, EixoY]
- F_7 = Transladar[Girar[F_1, α - 90°, EixoY], u]
- F_8 = Transladar[Girar[Girar[F_1, 90° + α, EixoY], 2α, EixoX], a]
- F_9 = Transladar[Girar[Girar[F_1, 90° - α, EixoY], α + 90°, EixoX], u]
- F_{10} = Girar[Girar[F_1, α + 90°, EixoY], α + 90°, EixoX]
- F_{11} = Transladar[Girar[Girar[F_1, -90° - α, EixoY], 90° - α, EixoX], v]
- F_{12} = Transladar[Girar[Girar[F_1, -α - 90°, EixoY], 180° - 2α, EixoX], v + b]
- F_{13} = Transladar[Girar[Girar[F_1, α + 90°, EixoX], α - 90°, EixoY], u]
- F_{14} = Transladar[Girar[Girar[F_1, 90° - α, EixoX], α - 90°, EixoY], u + v]
- F_{15} = Transladar[Girar[Girar[F_1, α - 90°, EixoX], -90° - α, EixoY], v]
- F_{16} = Transladar[Girar[Girar[Girar[F_1, -α + 90°, EixoX], α + 90°, EixoY], 90° + α, EixoX], a]
- F_{17} = Transladar[Girar[Girar[F_1, 2α + 180°, EixoX], -90° - α, EixoY], v + c]
- F_{18} = Girar[Girar[F_1, -α - 90°, EixoX], -90° - α, EixoY]

Cada uma das faces F_2, F_3,..., F_{18} são obtidas a partir de F_1. Por exemplo, F_8 foi construída com a seguinte sequência de comandos:

1. A = Girar[F_1, 90° + α, EixoY]
2. B = Girar[A, 2α, EixoX]
3. F_8 = Transladar[B, a]

Nos passos 1, 2 e 3 a expressão F_8 = Transladar[Girar[Girar[F_1, 90° + α, EixoY], 2α, EixoX], a] foi reescrita em comandos únicos. Esse processo de "desmonte" da expressão de F_8 é conhecido como engenharia reversa, o que, nesse caso, consiste em reescrever a expressão de comandos combinados a partir do mais "interno" para os "externos". Assim, para construir F_8, primeiramente, girou a F_1, em torno do eixo y um ângulo de medida 90º + α. Em seguida, girou 2α em torno do eixo x. Por último, transladou por meio do vetor a.

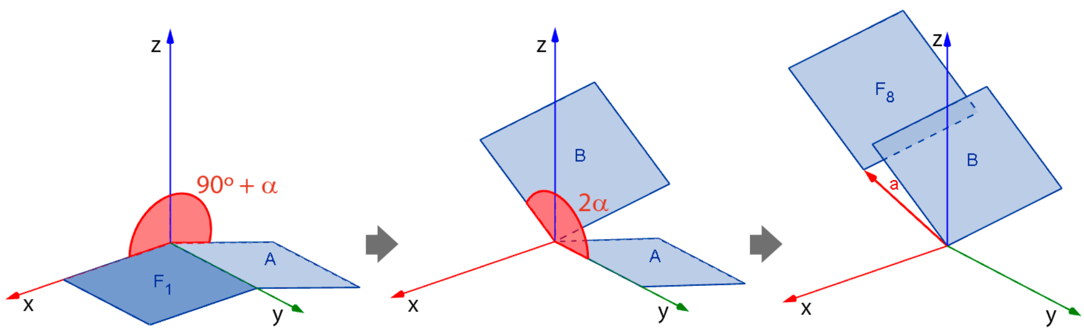

Figura 20: Composição de comandos para construir F_8 a partir de F_1

Essa sequência de comandos faz com que F_8 seja construída em função de F_1 e, a medida que α é modificado, F_8 realiza um movimento sincronizado com as faces F_2 e F_3. Realizando o mesmo processo nos demais comandos é possível explicitar os movimentos realizados em F_1 a fim de obter as demais faces.

Para obter cada uma das planificações apresentadas na Figura 3, exiba somente as faces indicadas na linha correspondente da tabela.

molde	faces					
1	1	2	3	7	8	14
2	1	2	3	4	6	9
3	1	2	3	6	15	17
4	1	2	4	5	6	7
5	1	2	4	5	7	10
6	1	2	4	5	9	10
7	1	2	4	5	9	11
8	1	2	4	5	9	12
9	1	2	7	10	14	16
10	1	4	5	7	11	13
11	1	4	5	6	7	18

Tabela 1: Faces a serem exibidas para obter moldes do cubo

Escolhendo uma combinação de faces diferente das apresentadas na Tabela 1 é possível obter moldes que não formam um cubo para $\alpha = 0°$.

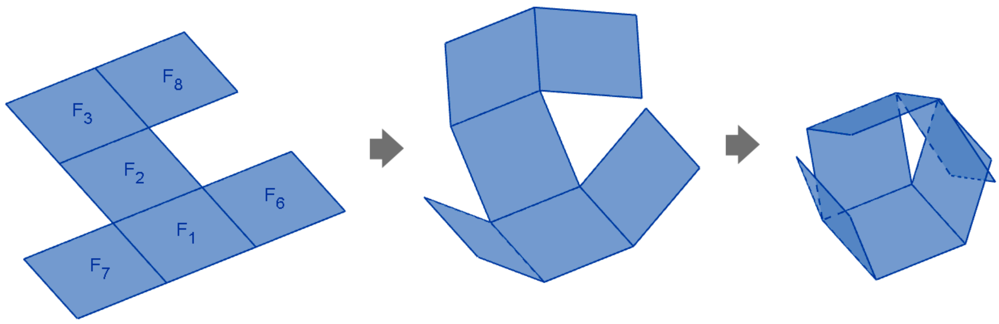

Figura 21: Exemplo de combinação de faces que não forma um cubo

As propostas de construção apresentadas neste texto são fruto do estudo do autor em busca de responder à pergunta de um colega postada em um grupo de discussões. No entanto, o assunto está longe de ser esgotado, pois uma das perguntas que deixo para o leitor é a seguinte: - Como construir um mesmo molde que se dobra a partir de uma face escolhida?

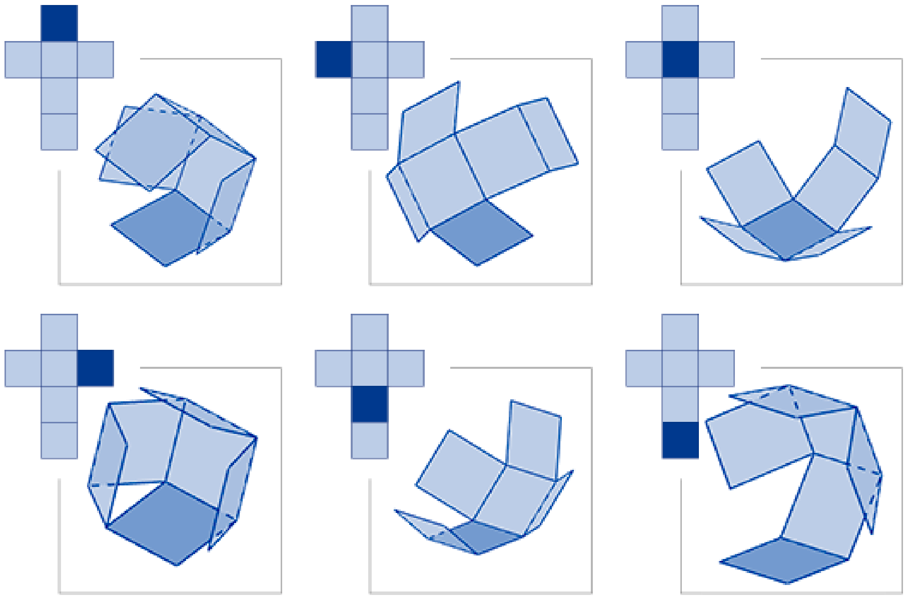

Figura 22: Moldes do cubo com diferentes faces fixadas