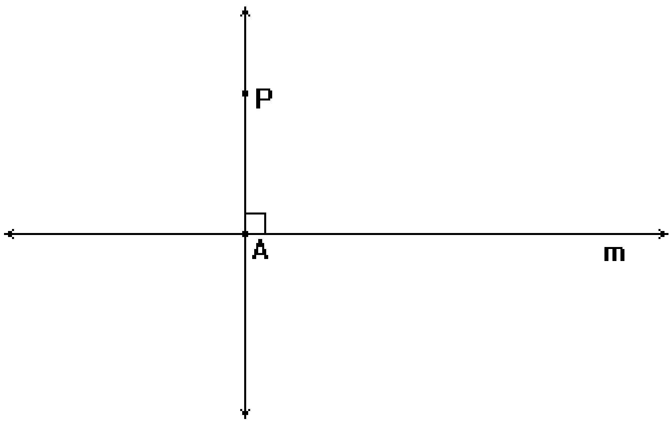
# RECTAS PERPENDICULARES Y PARALELAS

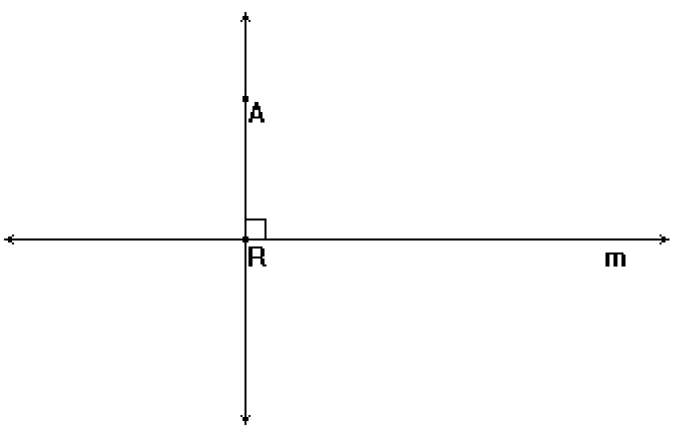
TEOREMA:
Por un punto exterior a una recta se puede trazar una y solamente una recta perpendicular a la recta dada.




HIPÓTESIS: $P \notin \overleftrightarrow{m}$

TESIS: 1) ***Existencia:*** Existe $\overleftrightarrow{PA} \perp \overleftrightarrow{m}$
2) ***Unicidad:*** $\overleftrightarrow{PA}$ es unica

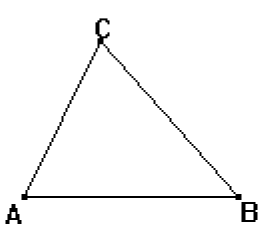
TEOREMA
Por un punto dado de una recta puede pasar una y solamente una recta perpendicular a la recta dada.




HIPÓTESIS: R$\in\overleftrightarrow{m}$

TESIS: 1) ***Existencia:*** Existe $\overleftrightarrow{AR} \perp \overleftrightarrow{m}$
2) ***Unicidad:*** $\overleftrightarrow{AR}$ es unica

TEOREMA
Un triángulo no puede tener dos ángulos rectos.




**De C bajarian dos perpendiculares, lo que contradice el primer teorema de perpendicularidad.**

PARALELISMO
El paralelismo es una relación de equivalencia, o sea que cumple las propiedades:

1. Propiedad reflexiva: $\overline{AB} \parallel \overline{AB}$
2. Propiedad simétrica: Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ entonces $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

3. Propiedad transitiva: Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$, entonces: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$

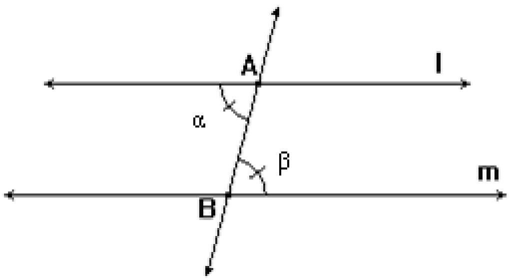
POSTULADO DE LAS PARALELAS

Se conoce como el quinto postulado de Euclides:

Por un punto exterior a una recta pasa una y solo una recta paralela a la recta dada.

TEOREMA

Si dos recta cortadas por una transversal forman ángulos alternos internos congruentes, entonces son paralelas.

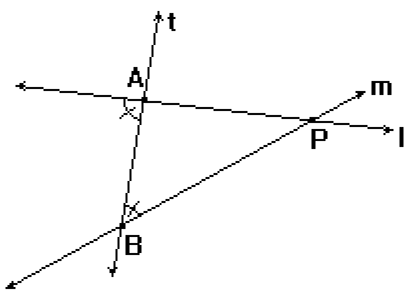



**HIPÓTESIS:** $\measuredangle\alpha \cong \measuredangle\beta$ y son alternos internos, t es una transversal que corta a $\overleftrightarrow{l}$ y a $\overleftrightarrow{m}$ en A y B respectivamente.

**TESIS:** $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$

Se demuestra por el método indirecto.

1. l no es paralela a m — 1. Negación de la tesis
2. l y m se cortan en un punto P — 2. De 1. Porque no son paralelas.

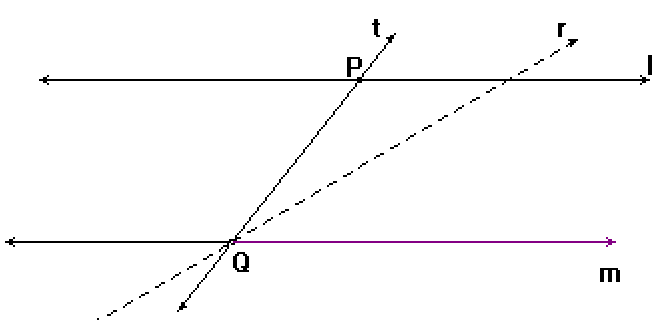



3. m ($\measuredangle\alpha$) > m ($\measuredangle\beta$) — 3. Por ser $\alpha$ un ángulo exterior del ABP
4. m ($\measuredangle\alpha$) = m ($\measuredangle\beta$) — 4. De hipótesis.
5. CONTRADICCIÓN — 5. De 3 y 4. Ley de la tricotomía.

Por lo tanto $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$

TEOREMA (RECIPROCO DEL ANTERIOR)

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces forman ángulos alternos internos congruentes.




HIPOTESIS: $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$; $\overleftrightarrow{t}$ es una transversal que corta a las rectas l y m en P y Q respectivamente.

$\measuredangle\alpha y \measuredangle\beta$ son alternos internos

TESIS: $\measuredangle\alpha \cong \measuredangle\beta$

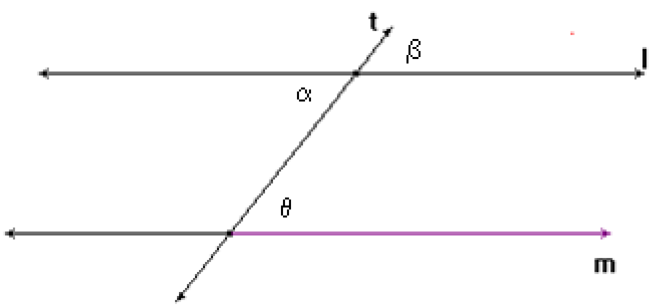
Se demuestra por reducción al absurdo. (Método indirecto)

| | |
|---|---|
| 1. $m(\measuredangle\alpha) \neq m(\measuredangle\beta)$ | 1. Negación de la tesis |
| 2. $m(\measuredangle\alpha) < m(\measuredangle\beta)$ o $m(\measuredangle\alpha) > m(\measuredangle\beta)$ | 2. De 1. Ley de la tricotomia |
| 3. $m(\measuredangle\alpha) < m(\measuredangle\beta)$ | 3. De 2. Suposición. |
| 4. Por Q pasa una recta r, tal que $\measuredangle\theta \cong \measuredangle\alpha$ | 4. Postulado de construcción de ángulos congruentes |
| 5. $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{r}$ | 5. De 4. Por formar ángulos alternos internos congruentes al ser cortadas por una transversal. |
| 6. $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ | 6. De hipótesis. |
| 7. CONTRADICCIÓN! | 7. De 5 y 6. Por Q se trazaron dos rectas paralelas a l, lo que contradice el postulado de Euclides. |

Falta la otra suposición $m(\measuredangle\alpha) > m(\measuredangle\beta)$. Continúe con la demostración.

TEOREMA

Si dos rectas son cortadas por una transversal y forman ángulos correspondientes congruentes, entonces son paralelas.




HIPOTESIS: $\measuredangle\beta$ y $\measuredangle\theta$ son correspondientes

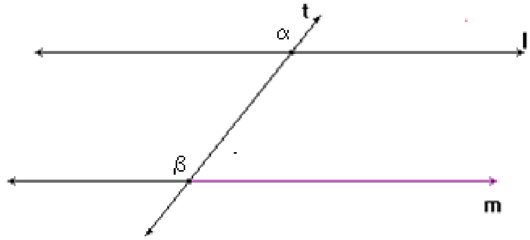
$\measuredangle\beta \cong \measuredangle\theta$

TESIS: $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$

| | |
|---|---|
| 1. $\measuredangle\beta \cong \measuredangle\alpha$ | 1. Por ser opuestos por el vértice. |
| 2. $\measuredangle\beta \cong \measuredangle\theta$ | 2. De hipótesis |
| 3. $\measuredangle\alpha \cong \measuredangle\theta$ | 3. De 1 y 2. Propiedad transitiva |
| 4. $\measuredangle\alpha$ y $\measuredangle\theta$ son alternos internos | 4. Definición de ángulos alternos internos. |
| 5. $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ | 5. De 3 y 4. Por formar ángulos alternos internos congruentes al ser cortadas por una transversal. |

TEOREMA

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son congruentes.

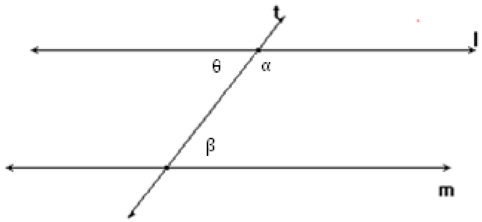



HIPÓTESIS: $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$; $\overleftrightarrow{t}$ es una transversal; $\measuredangle\alpha$ y $\measuredangle\beta$ son correspondientes.

TESIS: $\measuredangle\alpha \cong \measuredangle\beta$

La demostración se deja como tarea.

TEOREMA
Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos consecutivos interiores son suplementarios.

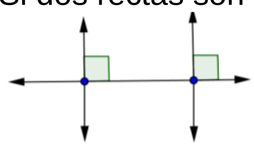



HIPOTESIS: $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}; \overleftrightarrow{t}$ es una transversal.
$\measuredangle\alpha \, y \measuredangle\beta$ son consecutivos interiores

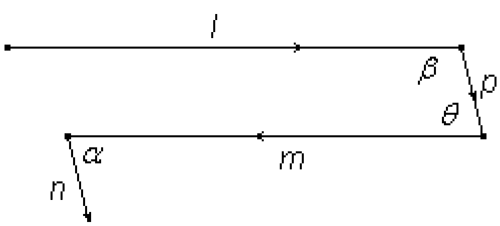
TESIS: $m(\measuredangle\alpha)+m(\measuredangle\beta)=180^{\circ}$

1. $\measuredangle\theta \cong \measuredangle\beta$ — 1. De hipótesis. Por ser alternos internos entre paralelas
2. m ($\measuredangle\alpha$) + m ($\measuredangle\theta$) = 180º — 2. Por formar un par lineal.
3. m ($\measuredangle\alpha$) + m ($\measuredangle\beta$) = 180º — 3. Sustitución de 1 en 2.

TEOREMA (RECIPROCO DEL ANTERIOR)
Si dos rectas son cortadas por una transversal, determinan ángulos consecutivos interiores suplementarios, las rectas son paralelas.
La demostración se deja como tarea.
COROLARIO
Si dos rectas son perpendiculares a la misma recta, entonces son paralelas



EJERCICIOS RESUELTOS
1)

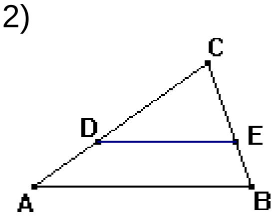



DATOS: $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}; \overleftrightarrow{p} \parallel \overleftrightarrow{n}$ ; $m(\beta)=130^{\circ}$

HALLAR: $m(\measuredangle\alpha)$

1. m ($\measuredangle\theta$) + m ($\measuredangle\beta$) = 180º — 1. Por ser consecutivos interiores entre paralelas
2. m ($\measuredangle\alpha$) = m ($\measuredangle\theta$) — 2. Por ser alternos internos entre paralelas
3. m ($\measuredangle\alpha$) + m ($\measuredangle\beta$) = 180º — 3. Sustitución de 2 en 1
4. m ($\measuredangle\alpha$) + 130º = 180º — 4. Dato
5. m ($\measuredangle\alpha$) = 50º — 5. De 4.

2)

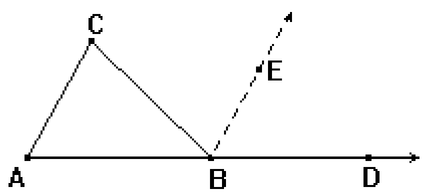



HIPÓTESIS: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
$\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

TESIS: $\overline{DE} \parallel \overline{DC}$

| | |
|---|---|
| 1. $\measuredangle$ C $\cong$ $\measuredangle$ B | 1. De hipótesis. En un triángulo a lados congruentes se oponen ángulos congruentes |
| 2. $\measuredangle$ B $\cong$ $\measuredangle$ CED | 2. De hipótesis. Por ser ángulos correspondientes entre paralelas. |
| 3. $\measuredangle$ C $\cong$ $\measuredangle$ CED | 3. De 1 y 2. Propiedad transitiva. |
| 4. DE $\cong$ DC | 4. De 3. En un triángulo a ángulos congruentes se oponen lados $\cong$s. |

TEOREMA
La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los interiores no adyacentes a él.

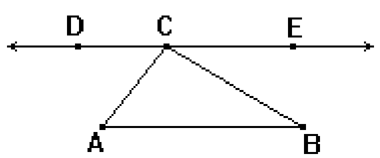



HIPÓTESIS: $\measuredangle CBD$ es exterior del triángulo ABC
A – B – D

TESIS: $m(\measuredangle CBD) = m(\measuredangle A) + m(\measuredangle C)$

| | |
|---|---|
| 1. Se traza $\overrightarrow{BE} \parallel \overline{AC}$ | 1. Por un punto exterior a una recta se puede trazar una paralela a ella. |
| 2. m($\measuredangle$ C) = m ($\measuredangle$ CBE) | 2. De 1. Por ser alternos internos entre paralelas. |
| 3. m ($\measuredangle$ DBE) = m($\measuredangle$ A) | 3. De1. Por ser ángulos correspondientes entre paralelas. |
| 4. m ($\measuredangle$ CBD) = m ($\measuredangle$ CBE)+m($\measuredangle$ DBE) | 4. Adición de ángulos. |
| 5. m ($\measuredangle$ CBD) = m($\measuredangle$ C) + m($\measuredangle$ A) | 5. Sustitución de 2 y 3 en 4 |

TEOREMA
La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.




HIPÓTESIS: Triangulo ABC cualquiera. D – C – E

TESIS: $m(\measuredangle ACB) + m(\measuredangle B) + m(\measuredangle C) = 180º$

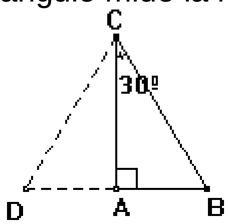
| | |
|---|---|
| 1. Por C se traza $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ | 1. Por un punto exterior a una recta se puede trazar una paralela |
| 2. m ($\measuredangle$ DCA) = m($\measuredangle$ A) y m($\measuredangle$ ECB) = m($\measuredangle$ B) | 2. De 1. Por ser alternos internos entre paralelas. |
| 3. m ($\measuredangle$ DCA) + m ($\measuredangle$ ACB) + m ($\measuredangle$ ECB) = 180º | 3. De 1. Por formar un par lineal. |
| 4. m ($\measuredangle$ A) + m($\measuredangle$ ACB) + m($\measuredangle$ B) = 180º | 4. Sustitución de 2 en 3 |

COROLARIO 1.
En un triángulo no puede haber más de un ángulo interior que mida 90º o más de 90º

COROLARIO 2
Si un triángulo tiene dos de sus ángulos respectivamente congruentes a dos ángulos de otro triangulo, entonces el tercer ángulo del primero es congruente al tercer ángulo del segundo.

COROLARIO 3
Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

TEOREMA. (30 – 60 – 90)
Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo agudo de 30º, entonces el cateto opuesto a este ángulo mide la mitad de la hipotenusa.



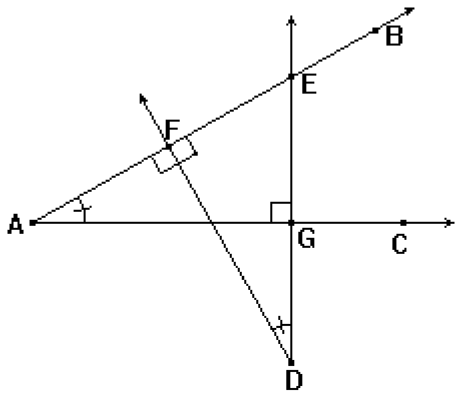

HIPÓTESIS: Triangulo ABC es rectángulo en $\measuredangle$ A

TESIS: $AB = \frac{CB}{2}$

| | |
|---|---|
| 1. En $\overrightarrow{BA}$ existe un punto D, tal que $\overline{DA} \cong \overline{AB}$ | 1. Construcción |
| 2. Trazamos $\overline{CD}$ | 2. Dos puntos determinan un segmento |
| 3. m($\measuredangle$ A) = 90º | 3. De hipótesis |
| 4. $\overline{CA}$ es altura en $\Delta DCB$ | 4. De 3. Definición de altura |
| 5. $\overline{CA}$ es mediana en $\Delta DCB$ | 5. De 1. A es punto medio de DB |
| 6. $\Delta DCB$ es isósceles | 6. De 5 y 4. Por ser isósceles una altura es mediana. |
| 7. m($\measuredangle$ D) = m($\measuredangle$ B) | 7. En un triángulo isósceles los ángulos de la base son congruentes. |
| 8. m($\measuredangle$ B) = 60º | 8. De hipótesis. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios. |
| 9. m ($\measuredangle$ D) = 60º | 9. Sustitución de 8 en 7 |
| 10. m($\measuredangle$ DCB) = 60º | 10. De 8 y 9. Los ángulos interiores del triángulo DBC suman 180° |
| 11. El triángulo DCB es equilátero. | 11. De 8, 9 y 10. Un triángulo equilátero es equiángulo. |
| 12. $\overline{CB} \cong \overline{DB}$ | 12. De 11. En un triángulo equilátero los lados son congruentes. |
| 13. DB = 2AB | 13. De 1. Definición de punto medio |
| 14. CB = 2AB | 14. Sustitución de 12 en 13 |
| 15. $AB = \frac{CB}{2}$ | 15. De 14. Aritmética. |

TEOREMA

En un plano, si dos ángulos tienen sus lados respectivamente perpendiculares, entonces son congruentes.




HIPÓTESIS: $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{DF} \perp \overrightarrow{AB}$

TESIS: $\measuredangle A \cong \measuredangle D$

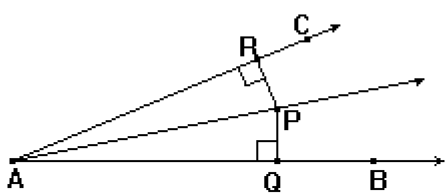
| | |
|---|---|
| 1. $\Delta AGE$ es rectángulo | 1. De hipótesis. Definición de triangulo rectángulo |
| 2. $\measuredangle$ AEG es el complemento de $\measuredangle$ A | 2. De 1. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios |
| 3. $\Delta EFD$ es rectángulo | 3. De hipótesis. Definición de triangulo rectángulo |
| 4. $\measuredangle$ AEG es el complemento de $\measuredangle$ D | 4. La misma razón de 2 |
| 5. $\measuredangle A \cong \measuredangle D$ | 5. De 2 y 4. Por tener el mismo complemento. |

DEFINICIÓN: La distancia de un punto a una recta, es la longitud del segmento perpendicular trazado del punto a la recta.

LUGAR GEOMÉTRICO: Es el conjunto de puntos de un plano que cumplen una o varias condiciones.

TEOREMA

La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de puntos que equidistan de los lados del ángulo.




HIPOTESIS: $\overrightarrow{AP}$es bisectriz del angulo BAC

$\overline{PQ} \perp \overrightarrow{AB}$

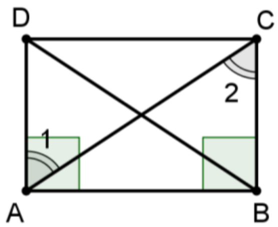
$\overline{PR} \perp \overrightarrow{AC}$

TESIS: $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$

| | |
|---|---|
| 1. $\Delta AQP$ es rectángulo, $\Delta$ ARP es rectángulo | 1. De hipótesis. Definición de triangulo rectángulo |
| 2. $\overline{AP} \cong \overline{AP}$ | 2. Propiedad reflexiva |
| 3. $\measuredangle$ PAR $\cong$ $\measuredangle$ PAQ | 3. De hipótesis. Definición de bisectriz |
| 4. Triángulo AQP $\cong$Triángulo ARP | 4. De 1, 2, 3. Por ser triángulos rectángulos con la hipotenusa y un ángulo agudo congruentes |
| 5. $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$ | 5. De 4. Lados correspondientes en triángulos congruentes. |

## **EJERCICIOS** RESUELTOS

1)




HIPÓTESIS: $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

$\overline{AD} \perp \overline{AB}$

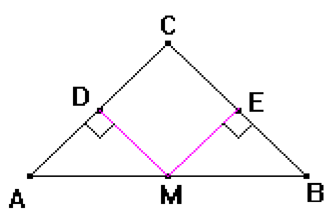
$\overline{BC} \perp \overline{AB}$

TESIS: $1)\overline{DC} \cong \overline{AB}$

$2)\overline{DC} \parallel \overline{AB}$

| | |
|---|---|
| 1. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ | 1.De hipótesis |
| 2. $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ <br> $\overline{BC} \perp \overline{AB}$ | 2.De hipótesis |
| 3. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ | 3. De 2 por ser perpendiculares a la misma recta. |
| 4. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ | 4. De 3, por ser ángulos alternos internos entre paralelas |
| 5.Los triángulos DAB y CBA son rectángulos | 5. De 2. Definición de triangulo rectángulo. |
| 6. $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ | 6. Propiedad reflexiva |
| 7. $\Delta DAB \cong \Delta ABC$ | 7. De 6, 5 y 1, cateto – hipotenusa |
| 8. $\overline{BD} \cong \overline{AC}$ | 8. De 7, por ser hipotenusas de triángulos rectángulos congruentes. |
| 9. $\Delta ADC \cong \Delta ABC$ | 9. De 8,4 y 5, hipotenusa – ángulo agudo |
| 10. $\overline{DC} \cong \overline{AB}$ | 10. De 9, por ser lados de triángulos congruentes |
| 11. $\measuredangle DCA \cong \measuredangle BAC$ | 11.De 9, por ser ángulos correspondientes en triángulos congruentes. |
| 12. $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ | 12. De 11, por formar ángulos alternos internos congruentes. |

2)




**HIPÓTESIS:** M es punto medio de $\overline{AB}$

$\overline{MD} \perp \overline{AC}; \overline{ME} \perp \overline{BC}$

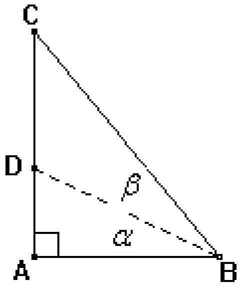
$\overline{MD} \cong \overline{ME}$

**TESIS:** $\Delta ABC$ es isósceles.

| | |
|---|---|
| 1. $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ | 1. De hipótesis. Definición de punto medio. |
| 2. $\overline{MD} \cong \overline{ME}$ | 2. De hipótesis. |
| 3. $\Delta ADM$ y $\Delta BEM$ son rectángulos | 3. De hipótesis. Definición de triangulo rectángulo |
| 4. $\Delta ADM \cong \Delta BEM$ | 4. De 1,2, 3. Por tener la hipotenusa y un cateto respectivamente congruentes. |
| 5. $\measuredangle A \cong \measuredangle B$ | 5. De 4. Por ser ángulos correspondientes en triángulos congruentes. |

| | |
|---|---|
| 6. $\Delta ABC$ es isósceles. | 6. De 5. Un triángulo que tenga dos ángulos congruentes, es isósceles. |

3)

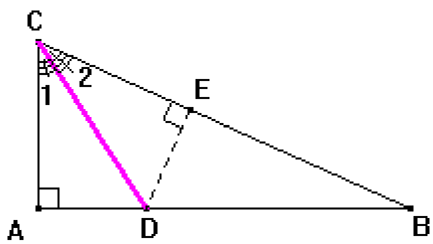



HIPÓTESIS: Triangulo ABC es rectángulo en $\measuredangle$ A
$\overline{BD}$ es bisectriz del ángulo CBA
$\measuredangle C \cong \measuredangle \beta$

TESIS: $AB = \frac{CB}{2}$

| | |
|---|---|
| 1. m($\measuredangle$ABC)+ m($\measuredangle$C) = 90º | 1. De hipótesis. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios. |
| 2. m($\measuredangle\alpha$)+m($\measuredangle\beta$)+m($\measuredangle$C) = 90º | 2. De 1. Adición de ángulos. |
| 3. m($\measuredangle\alpha$) = m($\measuredangle\beta$) | 3. De hipótesis. Definición de bisectriz |
| 4. m($\measuredangle$C) = m($\measuredangle\beta$) | 4. De hipótesis. |
| 5. m($\measuredangle$C)+ m($\measuredangle$C)+ m($\measuredangle$C) = 90º | 5. Sustitución de 3 y 4 en 2. |
| 6. m($\measuredangle$C) = 30º | 6. De 5. Algebra. |
| 7. AB = CB/2 $\Rightarrow$ 2(AB) = CB | 7. De hipótesis. Y de 6. Teorema 30 – 60 – 90 |

4)

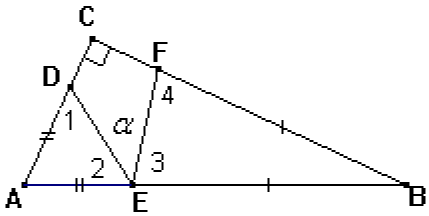



**HIPÓTESIS:** $\overline{CD}$ es bisectriz de $\measuredangle ACB$
$\Delta CAB$ es rectángulo en $\measuredangle$ A.
A – D – B

**TESIS:** $DB > AD$

| | |
|---|---|
| 1. Se traza $\overline{DE} \perp \overline{CB}$, C – E – B | 1. Construcción |
| 2. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ | 2. De hipótesis. Definición de bisectriz |
| 3. DA = DE | 3. De hipótesis. Un punto de la bisectriz equidista de los lados del ángulo. |
| 4. $\Delta CAD \cong \Delta CED$ | 4. De 1 y 3. Por ser triángulos rectángulos con cateto y ángulo agudo congruente. |
| 5. En $\Delta DEB, DB > DE$ | 5. En un triángulo rectángulo la hipotenusa es mayor que cualquier cateto. |
| 6. $DB > DA$ | 6. Sustitución de 3 en 5 |

5)



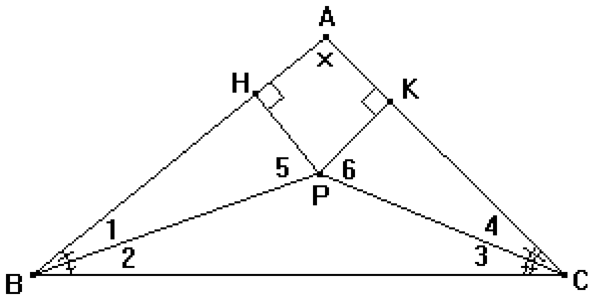

HIPÓTESIS: Triangulo ABC rectángulo en C

$\overline{BF} \cong \overline{BE}; \overline{AD} \cong \overline{AE}$

TESIS: Hallar $m(\measuredangle\alpha)$

| | |
|---|---|
| 1. $m(\measuredangle A) + m(\measuredangle B) = 90º$ | 1. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios. |
| 2. $m(\measuredangle 1) = m(\measuredangle 2)$ | 2. De hipótesis. En el DAE a lados congruentes se oponen ángulos congruentes |
| 3. $m(\measuredangle 3) = m(\measuredangle 4)$ | 3. De hipótesis. En el FEB a lados congruentes se oponen ángulos congruentes. |
| 4. $m(\measuredangle A)+m(\measuredangle 1)+m(\measuredangle 2) = 180º$ | 4. Los ángulos interiores de un triángulo suman 180º |
| 5. $m(\measuredangle A)+m(\measuredangle 2)+m(\measuredangle 2) = 180º$ $\Rightarrow m(\measuredangle A) + 2m(\measuredangle 2) = 180°$ | 5. Sustitución de 2 en 4 |
| 6. $m(\measuredangle B)+m(\measuredangle 3)+m(\measuredangle 4) = 180º$ | 6. Los ángulos interiores de un triángulo suman 180º |
| 7. $m(\measuredangle B)+m(\measuredangle 3)+m(\measuredangle 3) = 180º$ $\Rightarrow m(\measuredangle B) + 2m(\measuredangle 3) = 180°$ | 7. Sustitución de 3 en 6. |
| 8. $m(\measuredangle A)+2m(\measuredangle 2)+m(\measuredangle B)+2m(\measuredangle 3) = 360º$ | 8. Suma de 5 y 7 |
| 9. $90º+2[m(\measuredangle 2)+m(\measuredangle 3)] = 360º$ | 9. De 1 y 8 |
| 10. $2[m(\measuredangle 2)+m(\measuredangle 3)] = 270º$ $\Rightarrow m(\measuredangle 2) + m(\measuredangle 3) = 135°$ | 10. De 9 |
| 11. $m(\measuredangle 2)+m(\measuredangle \alpha)+m(\measuredangle 3) = 180º$ | 11. Por formar un ángulo llano |
| 12. $m(\measuredangle \alpha) + 135º = 180º \Rightarrow m(\measuredangle\alpha) = 45°$ | 12. Sustitución de 10 en 11 |

6) Las bisectrices de los ángulos B y C del triángulo ABC se cortan en P. Desde P se trazan $\overline{PH} \perp \overline{AB}; \overline{PK} \perp \overline{AC}$ . Si X es la medida del ángulo A, demostrar que:




1. $m\left(BPC\right) = 90° + \dfrac{x}{2}$
2. P pertenece a la bisectriz de $\measuredangle$ BAC
3. $AB - BH = AC - CK$

| | |
|---|---|
| 1. $x + m\left(\measuredangle AHP\right) + m\left(\measuredangle AKP\right) + m\left(\measuredangle HPK\right) = 360°$ | 1. La suma de los ángulos interiores de un cuadriláteros es 360° |
| 2. $x + 90° + 90° + m(\measuredangle HPK) = 360°$ $\Rightarrow m\left(\measuredangle HPK\right) = 180° - x$ | 2. De 1 y de hipótesis, algebra |
| 3. $m\left(\measuredangle 1\right) + m\left(\measuredangle 2\right) + m\left(\measuredangle 3\right) + m\left(\measuredangle 4\right) + x = 180°$ | 3. La suma de los ángulos interiores del triángulo ABC suman 180° |
| 4. $m\left(\measuredangle 1\right) = m\left(\measuredangle 2\right); m\left(\measuredangle 3\right) = m\left(\measuredangle 4\right)$ | 4. De hipótesis. Definición de bisectriz |
| 5. $2m\left(\measuredangle 1\right) + 2m\left(\measuredangle 4\right) + x = 180°$ | 5. Sustitución de 4 en 3 |
| 6. $m\left(\measuredangle 1\right) + m\left(\measuredangle 4\right) + \dfrac{x}{2} = 90°$ | 6. De 5. Algebra |
| 7. $m\left(\measuredangle 1\right) = 90° - m\left(\measuredangle 5\right); m\left(\measuredangle 4\right) = 90° - m\left(\measuredangle 6\right)$ | 7. En un triángulo rectángulo los ángulos agudos son complementarios. |
| 8. $90° - m\left(\measuredangle 5\right) + 90° - m\left(\measuredangle 6\right) + \dfrac{x}{2} = 90°$ $\Rightarrow 90° + \dfrac{x}{2} = m\left(\measuredangle 5\right) + m\left(\measuredangle 6\right)$ | 8. Sustitución de 7 en 6 y algebra. |
| 9. $m\left(\measuredangle 5\right) + m\left(\measuredangle 6\right) + m\left(\measuredangle HPK\right) + m\left(\measuredangle BPC\right) = 360°$ | 9. Los ángulos alrededor de un punto suman 360° |
| 10. $90° + \dfrac{x}{2} + m\left(\measuredangle HPK\right) + m\left(\measuredangle BPC\right) = 360°$ | 10. Sustitución de 8 en 9. |
| 11. $90° + \dfrac{x}{2} + 180° - x + m\left(\measuredangle BPC\right) = 360°$ $\Rightarrow m\left(\measuredangle BPC\right) = 90° + \dfrac{x}{2}$ | 11. Sustitución de 2 en 10 y algebra. |
| 12. P es el incentro | 12. De hipótesis. P es el punto donde se cortan dos bisectrices |
| 13. $\overrightarrow{AP}$ es bisectriz de $\measuredangle$ BAC | 13. Las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo se cortan |

en un punto llamado el incentro.

14. $\measuredangle HAP \cong \measuredangle PAK$ — 14. De 13. Definición de bisectriz

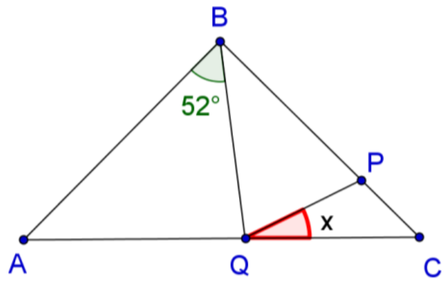
15. $\overline{AP} \cong \overline{AP}$ — 15. Propiedad reflexiva

16. $\Delta AHP \cong \Delta AKP$ — 16. De 14 y 15. Por ser triángulos rectángulos con hipotenusa y ángulo agudo congruente.

17. AH = AK — 17. De 16. Por ser lados correspondientes en triángulos congruentes.

18. $AB - BH = AC - CK$ — 18. De 17. Resta de segmentos.

7)




Datos:

$m(\sphericalangle ABQ) = 52°$

$\overline{BA} \cong \overline{BC}$

$\overline{BQ} \cong \overline{BP}$

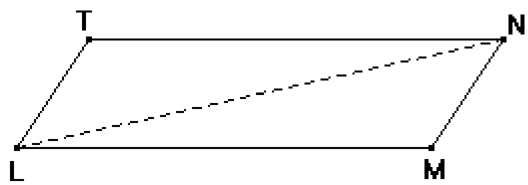
*HALLAR* m(∢PQC)=x

| | |
|---|---|
| 1. $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle C)$ | 1. ¿De dónde y porque? |
| 2. $m(\sphericalangle BQP) = m(\sphericalangle BPQ)$ | 2. ¿De dónde y porque? |
| 3. $m(\sphericalangle BPQ) = x + m(\sphericalangle C)$ | 3. ¿De dónde y porque? |
| 4. $m(\sphericalangle BQP) = x + m(\sphericalangle C)$ | 4. ¿De dónde y porque? |
| 5. $m(\sphericalangle CQB) = 52° + m(\sphericalangle A)$ | 5. ¿De dónde y porque? |
| 6. $x + m(\sphericalangle BQP) = 52° + m(\sphericalangle A)$ | 6. ¿De dónde y porque? |
| 7. $x + m(\sphericalangle BQP) = 52° + m(\sphericalangle C)$ | 7. ¿De dónde y porque? |
| 8. $x + x + m(\sphericalangle C) = 52° + m(\sphericalangle C)$ | 8. ¿De dónde y porque? |
| 9.2x = 52° | 9. ¿De dónde y porque? |
| 10.x = 26° | 10.¿De dónde y porque? |

Profesor: José Manuel Montoya Misas

EJERCICIOS SOBRE RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES.

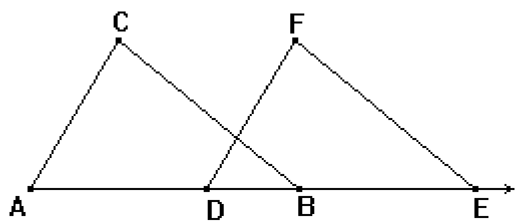
**1.**




HIPÓTESIS: $\overline{LM} \cong \overline{TN}; \overline{LT} \cong \overline{NM}$

TESIS: $\overline{TN} \parallel \overline{LM}$

**2.**

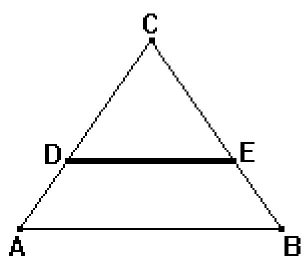



HIPÓTESIS: A – D – B – E

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ; $\overline{AD} \cong \overline{BE}$ ; $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

TESIS: $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$

**3.**

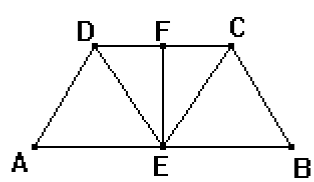



HIPÓTESIS: $\overline{CA} \cong \overline{CB}, \overline{CD} \cong \overline{CE}$

TESIS: $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

SUGERENCIA: Utilizar el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

**4.**

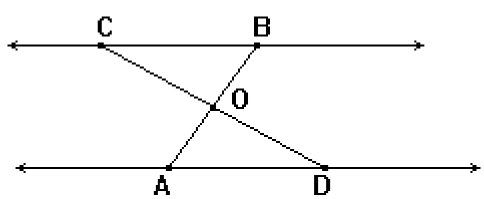



HIPÓTESIS: $\overline{EF}$ biseca a $\overline{DC}$ y $\overline{AB}$

$\measuredangle A \cong \measuredangle B; \overline{AD} \cong \overline{BC}$

TESIS: $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$

**5.** Demostrar que si dos ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos entonces los ángulos son congruentes.

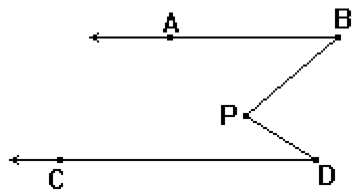



HIPÓTESIS: $\overleftrightarrow{CB} \parallel \overleftrightarrow{AD}$

O es el punto medio de $\overline{AB}$

TESIS: O es el punto medio de $\overline{CD}$

**6.**

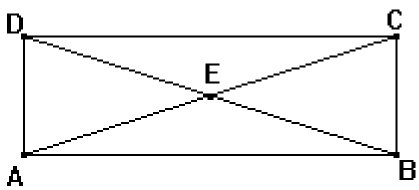



HIPÓTESIS: $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{DC}; m(\measuredangle B) = 40°; m(\measuredangle BPD) = 70°$

¿Cuánto mide el ángulo PDC?

**7.** Demostrar que una recta trazada paralela a la base de un triángulo isósceles y que pasa por su vértice, es bisectriz del ángulo externo en el vértice.

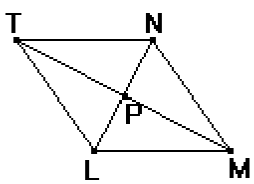
**8.**




HIPÓTESIS: $\overline{AD} \cong \overline{BC}; \overline{AD} \perp \overline{AB}; \overline{BC} \perp \overline{AB}$

TESIS: $1)\overline{DC} \cong \overline{AB}$
$2)\overline{DC} \parallel \overline{AB}$

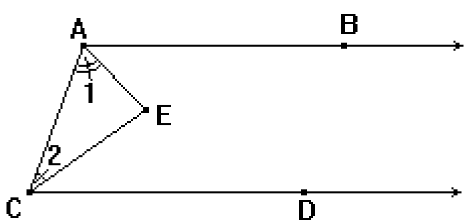
**9.**




HIPÓTESIS: $\overline{LM} \cong \overline{MN} \cong \overline{NT} \cong \overline{TL}$

TESIS: $\overline{LN} \perp \overline{TM}$

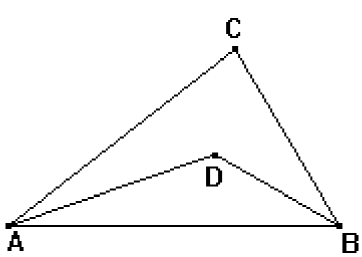
**10.**




HIPÓTESIS: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}; m(\measuredangle BAE) = 50º$
$m(\measuredangle DCE) = 40º$

HALLAR $m(\measuredangle 1) + m(\measuredangle 2)$

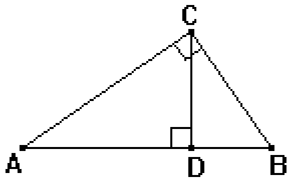
**11.**




HIPÓTESIS: $\overline{AD}$ es bisectriz de $\measuredangle CAB$ y $\overline{BD}$ es bisectriz de $\measuredangle CBA$¸ $m(\measuredangle D) = 130º$

HALLAR $m(\measuredangle C)$

**12.**



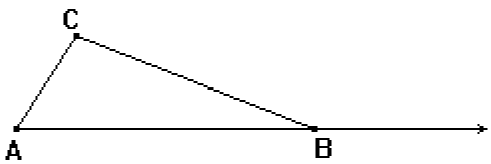

HIPÓTESIS: $\overline{AC} \perp \overline{CB}; \overline{CD} \perp \overline{AB}$

TESIS: $\measuredangle CAD \cong \measuredangle BCD$

**13.** Demostrar que si dos ángulos de un triángulo son congruentes, los lados opuestos a ellos son congruentes. (Sugerencia: trazar la altura sobre el lado desigual.)

**14.** Demostrar que si la bisectriz de uno de los ángulos exteriores de un triángulo es paralela al lado opuesto, el triángulo es isósceles.

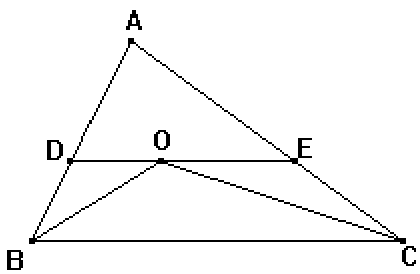
**15.**




HIPÓTESIS: $m(\measuredangle C) = 110º$
$m(\measuredangle CBD) = 155º$

HALLAR $m(\measuredangle A)$

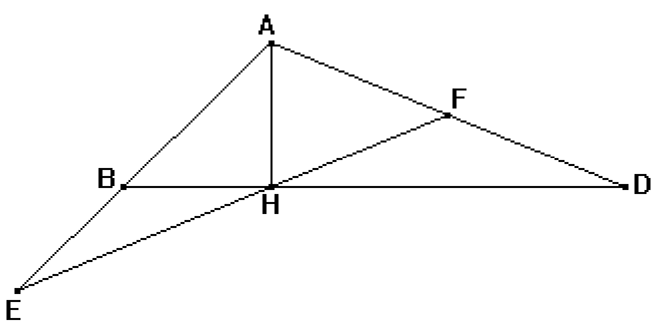
**16.**




Se da el triángulo ABC, $\overline{BO}$ y $\overline{CO}$ son bisectrices. Se traza por O, $\overleftrightarrow{DOE} \parallel \overline{BC}$. Demostrar que DE = BD + CE

**17.** Se da un punto P sobre la base $\overline{BC}$ de un triángulo isósceles ABC. De los puntos medios M y N de $\overline{BP}$ y $\overline{PC}$ se trazan perpendiculares a $\overline{BC}$, esas perpendiculares cortan a $\overline{AB}$ en E y $\overline{AC}$ en F. Demostrar que $\measuredangle EPF \cong \measuredangle A$

**18.**




HIPÓTESIS: $m(\measuredangle ABD) = 2m(\measuredangle D)$
$\overline{AH}$ es altura
$\overline{BE} \cong \overline{BH}$
A – F – D

TESIS: $\measuredangle FHD \cong \measuredangle FDH$

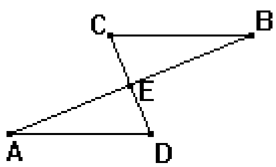
**19.** Demostrar que en un triángulo rectángulo que tiene un ángulo de 30º, la mediana y la altura relativas a la hipotenusa, dividen el ángulo recto en tres ángulos congruentes.

**20.** Sobre el lado OX de un ángulo XOY, se toma un punto A; de A se traza la perpendicular AH a OY, después se traza la bisectriz del ángulo HAO que corta a OY en C, por último se traza por C una perpendicular a OY que corta a OX en B. Demostrar que el triángulo ABC es isósceles.

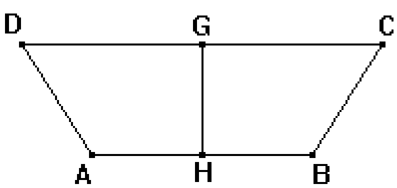
**21.** Se da un triángulo isósceles ABC con $\overline{BC}$ como base. Se prolonga la base $\overline{BC}$ una longitud CD = AB. Se traza el segmento $\overline{AD}$. $\overline{AB}$ se prolonga una longitud $BE = \frac{BC}{2}$. Se traza la recta EHF, siendo H el punto medio de $\overline{BC}$ y F situado sobre $\overline{AD}$. Demostrar: 1) $m(\sphericalangle D) = \frac{m(\sphericalangle ABC)}{2}$ 2) $\overline{EA} \cong \overline{HD}$. 3) $\overline{FD} \cong \overline{FH}$ 4) Calcular los valores de los ángulos AFH y ADB si m ($\measuredangle$ BAC) = 58º.

**22.** Sobre los lados $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OY}$ de un ángulo recto XOY, se toman dos puntos A y B. Se trazan por A y B dos rectas AM y BN que hacen con los lados del ángulo recto dos ángulos de 30º (M sobre $\overrightarrow{OY}$ y N sobre $\overrightarrow{OX}$), esas rectas se cortan en D. Demostrar que los triángulos AND y BMD son isósceles.

**23.** En la figura $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisecan en E. Demostrar que $\overline{AD}$ es paralelo a $\overline{CB}$.




**24.**




HIPOTESIS: H es el punto medio de $\overline{AB}$; G es el punto medio de $\overline{DC}$

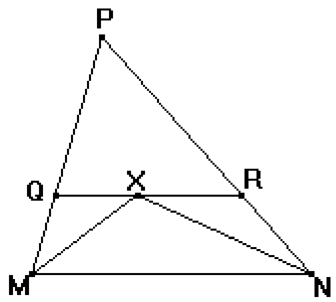
$\overline{AD} \cong \overline{BC}$

$\measuredangle A \cong \measuredangle B$

TESIS:
1) $\overline{GH} \perp \overline{DC}$
2) $\overline{GH} \perp \overline{AB}$
3) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

SUGERENCIA: Trazar $\overline{HD}$ y $\overline{HC}$

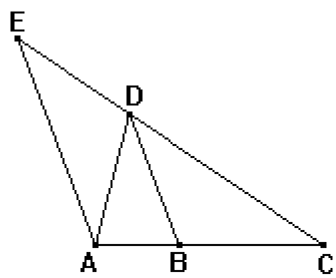
**25.**




HIPÓTESIS: $\overline{MX}$ es bisectriz de PMN
$\overline{NX}$ es bisectriz de PNM
$\overline{QR} \parallel \overline{MN}$
Q – X – R

TESIS: Los triángulos MQX y NRX son isósceles.

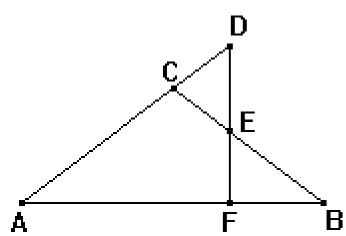
**26.**




HIPÓTESIS: $\overline{DB}$ es bisectriz de $\measuredangle ADC$
$\overline{DB} \parallel \overline{EA}$

TESIS: Triángulo ADE es isósceles.

**27.**



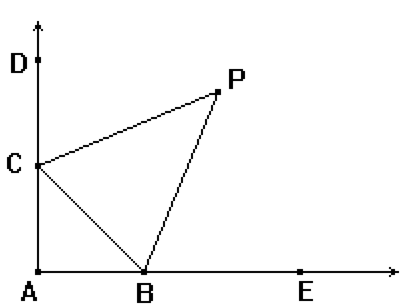

HIPÓTESIS: $\overline{CA} \cong \overline{CB}$
$\overline{CD} \cong \overline{CE}$
$A - F - B$

TESIS: $\overline{DF} \perp \overline{AB}$

**28.** Dado el triángulo rectángulo con $\measuredangle$ C recto y m ($\measuredangle$ CAB) = 60º. $\overline{CD}$ es la altura trazada sobre la hipotenusa. Demostrar que $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{3}$

**29.** Dado un triángulo equilátero ABC. En la semirrecta opuesta a $\overrightarrow{BA}$, tomar un punto D, tal que $\overline{BD} \cong \overline{AC}$. Demostrar que m($\measuredangle$ BCD ) = 30º

**30.**



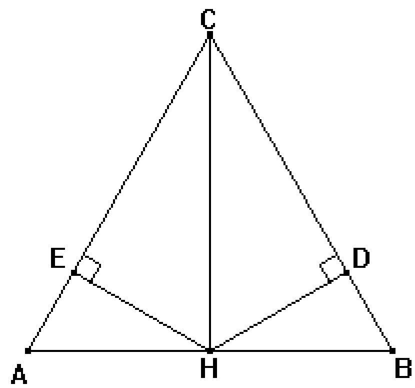

DATOS: $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AE}$. Las bisectrices de los ángulos DCB y CBE se cortan en P.

Hallar $m(\measuredangle P)$

**31.** Se da el triángulo isósceles ELN, con $\overline{EL} \cong \overline{EN}$. Por cualquier punto A entre N y E, se traza una perpendicular a $\overline{LN}$ y la corta en B y a $\overline{LE}$ en C. Demostrar que el triángulo CEA es isósceles.

**32.** En un triángulo cualquiera ABC, una recta que pasa por A es perpendicular a la bisectriz del ángulo B en K. Otra recta que pasa por K es paralela a $\overline{BC}$ y corta a $\overline{AB}$ en M. Demostrar que M es el punto medio de $\overline{AB}$.

**33.**




HIPÓTESIS: Triangulo ABC es equilátero.

$\overline{CH}$ es altura

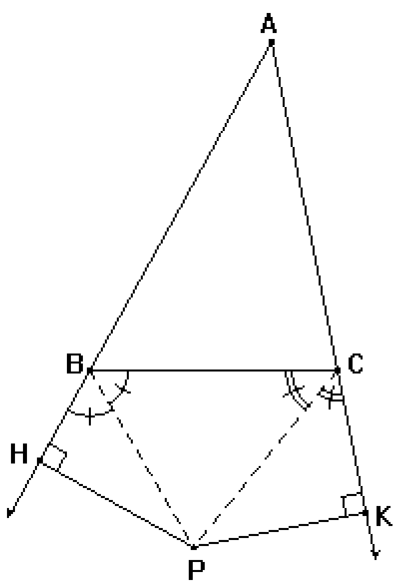
$\overline{HD} \perp \overline{CB}$

$\overline{HE} \perp \overline{CA}$

TESIS: $HD + HE = CH$

AYUDA: La altura en triángulo equilátero también es bisectriz, utilizar el teorema 30 – 60 – 90 en un triángulo rectángulo.

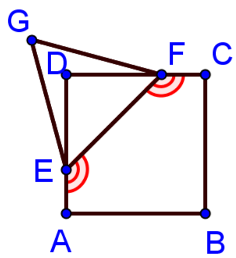
**34.**




Las bisectrices exteriores de los ángulos B y C del triángulo ABC se cortan en P. Desde P se trazan $\overline{PH}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{AB}$ y $\overline{PK}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{AC}$. Si $x$ es la medida del ángulo A, demostrar que:

1. La mitad del ángulo BPC es igual a $90° - \dfrac{x}{2}$
2. P pertenece a la bisectriz de BAC
3. $AB + BH = AC + CK$ (SUGERENCIA: Trazar $\overline{HK}$ y demostrar que el $\Delta AHK$ es isósceles.)

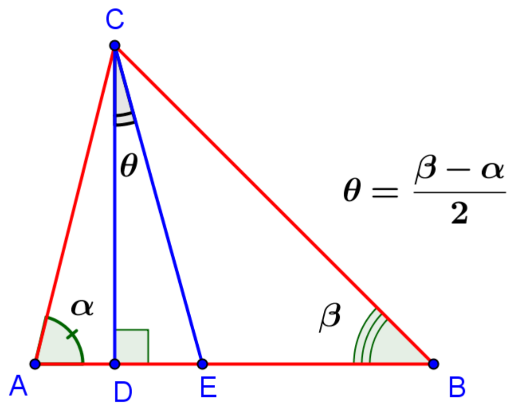
**35.** ABCD es un cuadrado y el triángulo EFG es equilátero, cual es el resultado de:



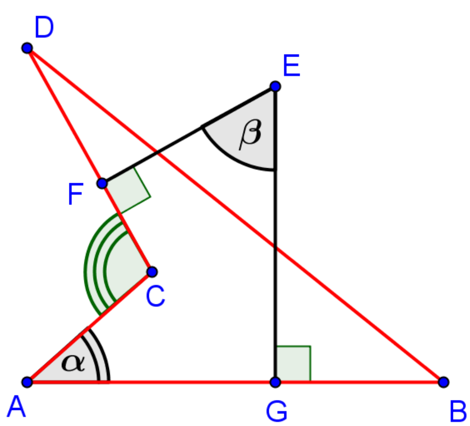

$m(\measuredangle G)+m(\measuredangle AEF)+m(\measuredangle CFE)$

¿Los ángulos AEF y CFE son ángulos exteriores del triángulo?

**36.** Demostrar que el ángulo formado por la altura y la bisectriz trazadas desde el mismo vértice de un triángulo es igual a la semidiferencia de los ángulos de otros dos vértices del triangulo




**37.** De acuerdo con la figura, demostrar que $m(\measuredangle ACD)=m(\measuredangle\alpha)+m(\measuredangle\beta)$




**Sugerencia:**

Por C trazar una paralela a $\overline{AB}$ y por F trazar otra paralela a $\overline{AB}$

**38.** Se da un triángulo isósceles con $\overline{AB}\cong\overline{AC}$ Se escoge un punto M sobre $\overline{AB}$ y un punto N sobre $\overline{AC}$ tal que $\overline{BM}\cong\overline{CN}$ Demostrar que $\overline{MN}\,||\,\overline{BC}$

**39.** Se da un triángulo isósceles con $\overline{AB}\cong\overline{AC}$ se prolonga la base $\overline{BC}$ una longitud $CD=AB$, se traza $\overline{AD}$ y se prolonga $\overline{AB}$ una longitud $BE=\dfrac{BC}{2}$ Si H es el punto medio de la base $\overline{BC}$ y se traza $\overline{EHF}$ con F sobre $\overline{AD}$

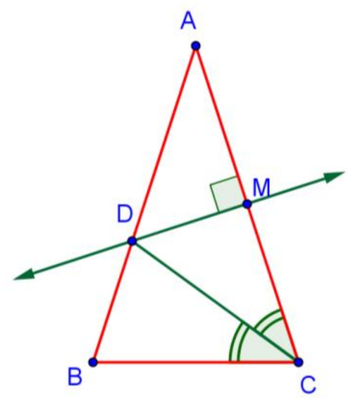
**1)** Demostrar que $m(\sphericalangle ADB)=\dfrac{m(\sphericalangle ABC)}{2}$

**2)** Demostrar que $\overline{EA}\cong\overline{HD}$

**3)** Demostrar que $\overline{FA}\cong\overline{FD}\cong\overline{FH}$

**40.** El triángulo ABC es rectángulo en A, se traza el segmento $\overline{AM}$, con M sobre $\overline{BC}$, que hace con el cateto $\overline{AB}$ un ángulo congruente con $\sphericalangle B$. Demostrar que $\overline{BM}\cong\overline{CM}\cong\overline{AM}$

**41.** Se da el triángulo isósceles ABC con $\overline{AB}\cong\overline{AC}$ .Si la mediatriz del lado $\overline{AC}$ y la bisectriz del ángulo ACB se cortan en el punto D de $\overline{AB}$ . ¿Cuánto tienen que medir los ángulos del triángulo para que esta condición se cumpla?



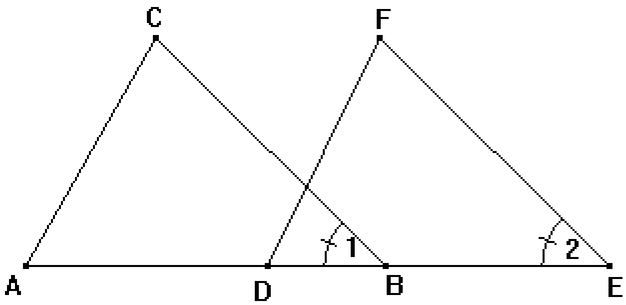

Algunos ejercicios tomados de los siguientes textos:

- Geometría Euclidiana de Nelson Londoño
- Geometría Euclidiana de Hemmerling
- Curso de Geometría. Reunión de profesores
- Geometría de Clemens y otros, de la serie Awli
- Geometría de Edwin E. Moise
- De internet de olimpiadas de matemáticas.

Recopilados por: José Manuel Montoya Misas.

SOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DE RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

❖




HIPOTESIS: A –D – B – E

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$

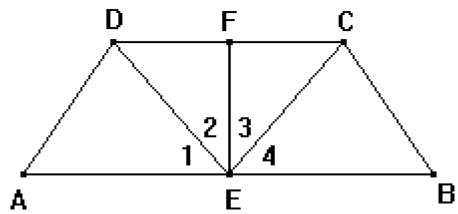
$\overline{AD} \cong \overline{BE}$

$\overline{AC} \cong \overline{DF}$

TESIS: $\overline{BC}$ // $\overline{EF}$

| | |
|---|---|
| 1. AB=AD+DB | 1. Suma de segmentos |
| 2. DE=DB+BE | 2. Adición de segmentos |
| 3. $\overline{AD} \cong \overline{BE}$ | 3. De hipótesis |
| 4. DE=DB+AD | 4. Sustitución de 3 en 2 |
| 5. AB = DE | 5. De 1 y 4. Propiedad transitiva |
| 6. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ | 6. De hipótesis. |
| 7. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ | 7. De 5 y 6. L – L – L |
| 8. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ | 8. De 7. Por ser ángulos correspondientes en triángulos congruentes. |
| 9. BC // EF | 9. De 8 por tener un par de ángulos correspondientes congruentes |

❖




HIPÓTESIS: $\overline{EF}$ biseca a $\overline{DC}$ y $\overline{AB}$

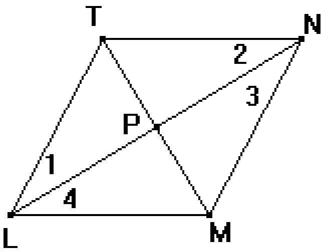
$\measuredangle A \cong \measuredangle B$

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$

TESIS: $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$

| | |
|---|---|
| 1. E es punto medio de $\overline{AB}$ | 1. De hipótesis. |
| 2. $\overline{AE} \cong \overline{EB}$ | 2. De 1. Definición de punto medio |
| 3. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ | 3. De hipótesis |
| 4. $\measuredangle A \cong \measuredangle B$ | 4. De hipótesis |
| 5. $\Delta ADE \cong \Delta BCE$ | 5. De 2, 3, 4. L – A – L |
| 6. $\overline{ED} \cong \overline{EC}$ | 6. De 5. Por ser lados correspondientes en triángulos congruentes. |
| 7. $\Delta$ DEC es isósceles | 7. De 6. Definición de triangulo isósceles. |
| 8. $\overline{EF}$ es mediana | 8. De hipótesis. |
| 9. $\overline{EF}$ es altura | 9. De 7 y 8. En un triángulo isósceles la mediana sobre la base también es altura. |
| 10. m($\measuredangle$ DFE) = 90º | 10. De 9. Definición de altura. |
| 11. $\overline{EF}$ es bisectriz | 11. De 7 y 8. En un triángulo isósceles la mediana sobre la base es también bisectriz. |
| 12. $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 3$ | 12. De 11. Definición de bisectriz. |
| 13. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 4$ | 13. De 5. Por ser ángulos correspondientes en triángulos congruentes. |
| 14. m($\measuredangle$ 1) + m($\measuredangle$ 2) + m($\measuredangle$ 3) + m($\measuredangle$ 4) = 180º | 14. Por formar un ángulo llano. |
| 15. 2m($\measuredangle$ 3) + 2m($\measuredangle$ 4) = 180º | 15. Sustitución de 12 y 13 en 14 |
| 16. m(3) + m(4) = 90º | 16. De 15. Algebra |
| 17. m($\measuredangle$ DEF) = 90º | 17. De 16. Suma de ángulos. |
| 18. $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ | 18. De 17 y 10. Por formar ángulos alternos internos congruentes. |

❖

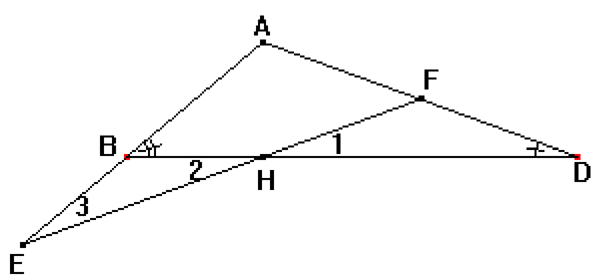



HIPÓTESIS: $\overline{LM} \cong \overline{MN} \cong \overline{NT} \cong \overline{TL}$
TESIS: $\overline{LN} \perp \overline{TM}$

| | |
|---|---|
| 1. $\Delta LTN$ es isósceles | 1. De hipótesis. Definición de triangulo isósceles |
| 2. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ | 2. De 1.Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes. |
| 3. $\Delta$ LMN es isósceles | 3. De hipótesis. Definición de triangulo isósceles |
| 4. $\measuredangle 4 \cong \measuredangle 3$ | 4. De 1.Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes. |
| 5. $\overline{LM} \cong \overline{MN} \cong \overline{NT} \cong \overline{TL}$ | 5. De hipótesis |
| 6. $\overline{LN} \cong \overline{LN}$ | 6. Propiedad reflexiva |
| 7. $\measuredangle LTN \cong \measuredangle LMN$ | 7. De 5 y 6. L – L – L |
| 8. $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 3$ | 8. De 7. Por ser ángulos correspondientes en triángulos congruentes |
| 9. $\Delta$ TNM es isósceles. | 9. De 5. Definición de triangulo isósceles |
| 10. $\overline{NP}$ es bisectriz | 10. De 8. Definición de bisectriz |
| 11. $\overline{NP}$ es altura | 11. De 9 y 10. En un triángulo isósceles la bisectriz del vértice también es altura |
| 12. $\overline{NP} \perp \overline{TM}$ | 12. De 11. Definición de altura |

---

❖



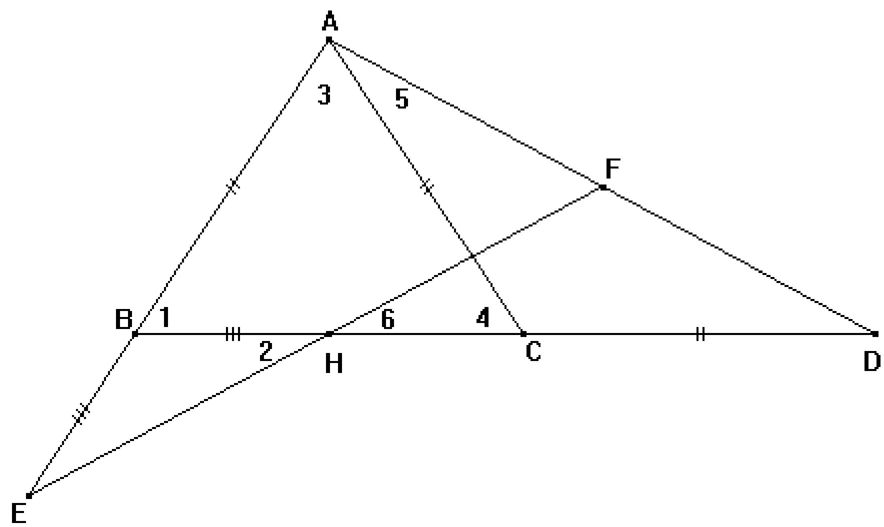

HIPOTESIS: m ($\measuredangle$ ABD) = 2 m($\measuredangle$ D)
$\overline{BE} \cong \overline{BH}$
A – F – D
TESIS: $\measuredangle 1 \cong \measuredangle D$

| | |
|---|---|
| 1. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ | 1. Por ser opuestos por el vértice |
| 2. $\Delta$ EBH es isósceles | 2. De hipótesis. Definición de triangulo isósceles |
| 3. $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 2$ | 3. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes |
| 4. $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 1$ | 4. Sustitución de 1 en 3. |
| 5. m($\measuredangle$ ABD) = m($\measuredangle$ 3) + m($\measuredangle$ 2) | 5. Por ser ABD un ángulo exterior del triángulo EBH |
| 6. m($\measuredangle$ ABD) = 2 m($\measuredangle$ 3) | 6. Sustitución de 3 en 5. |
| 7. m($\measuredangle$ ABD) = 2 m($\measuredangle$ 1) | 7. Sustitución de 4 en 6 |

| | |
|---|---|
| 8. m($\measuredangle$ABD) = 2 m($\measuredangle$D) | 8. De hipótesis |
| 9. 2 m($\measuredangle$1) = 2 m($\measuredangle$ D) | 9. De 7 y 8. Propiedad transitiva |
| 10. m($\measuredangle$1) = m($\measuredangle$D) | 10. De 9. Algebra. |

---

❖




**HIPOTESIS:**
ABC es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
$\overline{CD} \cong \overline{AB} \cong \overline{AC}$
H es el punto medio de $\overline{BC}$
$\overline{BE} \cong \overline{BH}$
m($\measuredangle$1) = 2 m($\measuredangle$D)
B – H – C – D

**TESIS:** 1. $m(D) = \dfrac{m(1)}{2}$

2. $\overline{EA} \cong \overline{HD}$

3. $\overline{FD} \cong \overline{FH}$

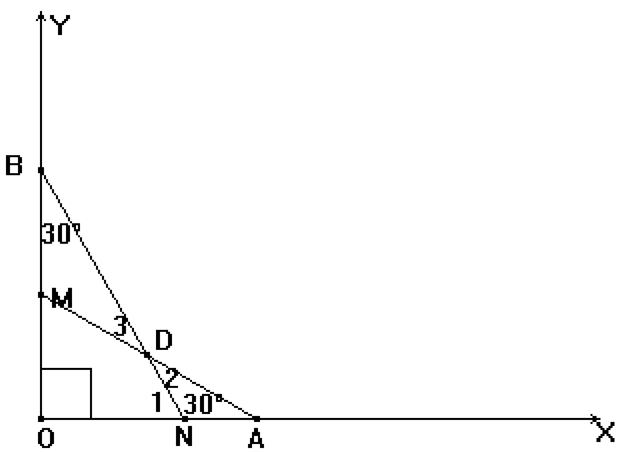
4. Si m($\measuredangle$3) = 58°, hallar la medida de $\measuredangle$2 y $\measuredangle$D

| | |
|---|---|
| 1. $\Delta$ABC es isósceles | 1. De hipótesis. Definición de triangulo isósceles |
| 2. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 4$ | 2. De 1. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes. |
| 3. $\Delta$ACD es isósceles | 3. De hipótesis. Definición de triangulo isósceles |
| 4. $\measuredangle D \cong \measuredangle 5$ | 4. De 3. Por ser ángulos de la base de un triángulo isósceles |
| 5. m($\measuredangle$4) = m($\measuredangle$D) + m($\measuredangle$5) | 5. Por ser 4 un ángulo exterior en ACD |
| 6. m($\measuredangle$4) = 2 m($\measuredangle$D) | 6. Sustitución de 4 en 5. |
| 7. m($\measuredangle$1) = 2 m($\measuredangle$D) | 7. Sustitución de 2 en 6. |
| 8. $\dfrac{m(\measuredangle 1)}{2} = m(\measuredangle D)$ | 8. De 7. Algebra. |
| 9. EA = BE + AB | 9. Adición de segmentos |
| 10.HD = HC + CD | 10. Adición de segmentos. |
| 11. HC = BH | 11. De hipótesis, H es punto medio. |
| 12. BH = BE | 12. De hipótesis. |
| 13. HC = BE | 14. Sustitución de 11 en 12. |
| 14. HD = BE + AB | 14. Sustitución de 13 y de hipótesis en 10. |
| 15. **EA = HD** | **15.** De 14 y 9. Propiedad transitiva |
| 16. $\Delta$EBH es isósceles | 16. De hipótesis. Definición de triangulo isósceles. |
| 17. m($\measuredangle$E) = m($\measuredangle$2) | 17. De 16. Por ser ángulos de la base de un triángulo isósceles. |
| 18. m($\measuredangle$1) = m($\measuredangle$E) + m($\measuredangle$2) | 18. Por ser 1 un ángulo exterior en el triángulo EBH |
| 19. m($\measuredangle$1) = 2 m($\measuredangle$2) | 19. Sustitución de 17 en 18. |
| 20. m($\measuredangle$1) = 2 m($\measuredangle$D) | 20. De hipótesis. |
| 21. 2 m($\measuredangle$2) = 2 m($\measuredangle$D) | 21. De 19 y 20. Propiedad transitiva. |

| | |
|---|---|
| 22. m(∡ 2) = m(∡ D) | 22. De 21. Algebra |
| 23. m(∡ 2) = m(∡ 6) | 23. Por ser opuestos por el vértice. |
| 24. m(∡ D) = m(∡ 6) | 24. de 22 y 23. Propiedad transitiva |
| 25. ∆ HFD es isósceles | 25. De 24. Por tener dos ángulos congruentes. |
| 26. $\overline{FH} \cong \overline{FD}$ | 26. De 25. Definición de triangulo isósceles. |
| 27. m(3) = 58° | 27. Dato que se da |
| 28. m(∡ 1) + m(∡ 4) + 58° = 180° | 28. La suma de los ángulos interiores de todo triangulo es 180° |
| 29. m(∡ 1) + m(∡ 4) = 122° | 29. De 28. Algebra |
| 30. 2 m(∡ 1) = 122° | 30. Sustitución de 2 en 29. |
| 31. m(∡ 1) = 61° | 31. De 30. Algebra. |
| 32. m(∡ D) = m(∡ 2) $= \frac{m(\measuredangle 1)}{2} = 30.5°$ | 32. De 8, 22, 31. |

---

❖ Sobre los lados OX y OY de un ángulo recto XOY, se toman dos puntos A y B. Se trazan por Q y B dos rectas AM y BN que hacen con los lados del ángulo recto dos ángulos de 30° (M sobre OY y N sobre OX) esas rectas se cortan en D. Demostrar que los triángulos AND y BMD son isósceles.

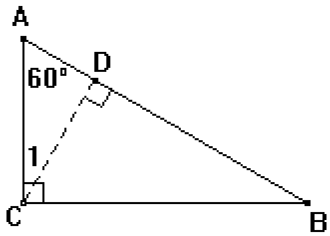



HIPÓTESIS: $\overrightarrow{OX} \perp \overrightarrow{OY}$, $m(\measuredangle OBN) = 30°$, $m(\measuredangle OAM) = 30°$

TESIS: $\Delta AND$ y ∆DMB son isosceles

| | |
|---|---|
| 1. ∆ BON es rectángulo | 1. De hipótesis. Definición de triangulo rectángulo |
| 2. m(∡ 1) = 60° | 2. De hipótesis y de 1. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios. |
| 3. m(∡ 1) = m(∡ 2) + 30° | 3. Por ser 1 un ángulo exterior en el triángulo NAD. |
| 4. 60° = m(∡ 2) + 30° | 4. Sustitución de 2 en 3 |
| 5. m(∡ 2) = 30° | 5. De 4. Algebra |
| 6. m(∡ OAM) = 30° | 6. De Hipótesis |
| 7. ∆ AND es isósceles | 7. De 6. Por tener dos ángulos congruentes. |
| 8. m(∡ 3) = m(∡ 2) = 30° | 8. Por ser opuestos por el vértice. |
| 9. m(∡ OBN) = 30° | 9. De hipótesis |
| 10. ∆ MDB es isósceles | 10. De 8 y 9. Por tener dos ángulos congruentes. |

❖ Dado el triángulo rectángulo con $\measuredangle$C recto y m($\measuredangle$CAB) = 60°. $\overline{CD}$ es la altura trazada sobre la hipotenusa. Demostrar que $\frac{AD}{DB}=\frac{1}{3}$

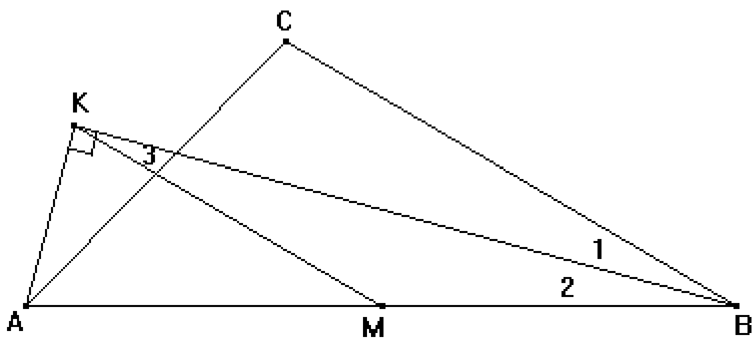



HIPÓTESIS: $\measuredangle$ACB es recto
m($\measuredangle$CAB) = 60°
$\overline{CD}$ es altura

TESIS: $\frac{AD}{DB}=\frac{1}{3}$

| | |
|---|---|
| 1. En $\Delta$ADC: m($\measuredangle$1) = 30° | 1. De hipótesis, en un triángulo rectángulo los ángulos agudos son complementarios. |
| 2. $AD=\frac{AC}{2}$ | 2. De hipótesis y de 1. En un triángulo rectángulo, el cateto opuesto al ángulo de 30° mide la mitad de la hipotenusa. |
| 3. En $\Delta$ABC: m($\measuredangle$B) = 30° | 3. De hipótesis, en un triángulo rectángulo los ángulos agudos son complementarios. |
| 4. En $\Delta$ABC: $AC=\frac{AB}{2}$ | 4. De hipótesis y de 3. En un triángulo rectángulo, el cateto opuesto al ángulo de 30° mide la mitad de la hipotenusa. |
| 5. $AB=2\cdot AC$ | 5. De 4. Algebra. |
| 6. $AD+DB=2\cdot AC\Rightarrow\frac{AD+DB}{2}=AC$ | 6. De 5. Suma de segmentos. |
| 7. AC = 2AD | 7. De 2 |
| 8. $2\cdot AD=\frac{AD+DB}{2}\Rightarrow 4\cdot AD=AD+DB$ $\Rightarrow 3\cdot AD=DB\Rightarrow\frac{AD}{DB}=\frac{1}{3}$ | 8. Sustitución de 7 en 6 y algebra. |

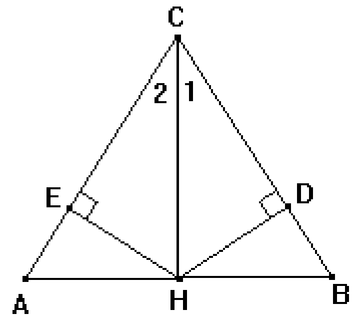
❖ En un triángulo cualquiera ABC, una recta que pasa por A es perpendicular a la bisectriz del ángulo B en K. otra recta que pasa por K es paralela a $\overline{BC}$ y corta a $\overline{AB}$ en M. Demostrar que M es el punto medio de $\overline{AB}$.




HIPÓTESIS:
$\Delta ABC$ cualquiera
$\overline{AK} \perp \overline{KB}$
$\overline{BK}$ es bisectriz de $\measuredangle CBA$
$\overline{KM} \parallel \overline{CB}$
$A-M-B$
TESIS: M es el punto medio de $\overline{AB}$

| | |
|---|---|
| 1. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ | 1. De hipótesis. Definición de bisectriz |
| 2. $\overline{KM} \parallel \overline{CB}$ | 2. De hipótesis |
| 3. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 3$ | 3. De 2. Por ser alternos internos entre paralelas |
| 4. $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 3$ | 4. De 1 y 3. Propiedad transitiva |
| 5. $\Delta$KMB es isósceles | 5. De 4. Por tener dos ángulos congruentes |
| 6. $\overline{KM} \cong \overline{MB}$ | 6. De 5. Definición de triangulo isósceles |
| 7. En $\Delta$BKA: m($\measuredangle$2) + m($\measuredangle$KAB) = 90° | 7. De hipótesis. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios. |
| 8. m($\measuredangle$3) + m($\measuredangle$AKM) = 90° | 8. De hipótesis: $\overline{AK} \perp \overline{KB}$ |
| 9. m($\measuredangle$2)+m($\measuredangle$AKM) = 90° | 9. Sustitución de 4 en 8 |
| 10. m($\measuredangle$2) + m($\measuredangle$KAB) = m($\measuredangle$2) + m($\measuredangle$AKM) | 10. De 7 y 9. Propiedad transitiva |
| 11. m($\measuredangle$KAB) = m($\measuredangle$AKM) | 11. De 10. Ley cancelativa. |
| 12. $\Delta$KAM es isosceles. | 12. De 11, por tener dos ángulos congruentes. |
| 13. $\overline{AM} \cong \overline{KM}$ | 13. De 12. Definición de triangulo isósceles. |
| 14. $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ | 14. Sustitución de 6 en 13. |
| 15. M es punto medio de $\overline{AB}$ | 15. De 14. Definición de punto medio. |

❖



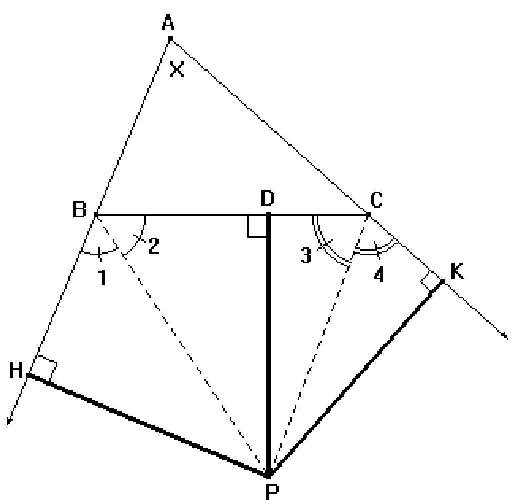

HIPÓTESIS: $\Delta ABC$ es equilatero
$\overline{CH}$ es altura
$\overline{HD} \perp \overline{CB}$
$\overline{HE} \perp \overline{CA}$

TESIS: HD + HE = CH

| | |
|---|---|
| 1. $\overline{CH}$ es altura | 1. De hipótesis. |
| 2. $\overline{CH}$ es bisectriz | 2. De hipótesis y 1. En un triángulo equilátero una altura es también bisectriz. |
| 3. m(∡ ACB) = 60° | 3. De hipótesis. Cada uno de los ángulos interiores de un triángulo equilátero mide 60° |
| 4. m(∡ 1) = m(∡ 2) = 30° | 4. De 2 y 3. Definición de bisectriz |
| 5. $HD = \frac{CH}{2}; HE = \frac{CH}{2}$ | 5. De 4. En un triángulo rectángulo el cateto opuesto a un ángulo de 30° mide la mitad de la hipotenusa. |
| 6. $HD + HE = \frac{CH}{2} + \frac{CH}{2}$ | 6. De 5. Suma de igualdades. |
| 7. $HD + HE = CH$ | 7. De 6. Aritmética. |

❖ Las bisectrices exteriores de los ángulos B y C de un triángulo ABC se cortan en P. Desde P se trazan PH perpendicular a la prolongación de AB y PK perpendicular a la prolongación de AC. Si x es la medida del ángulo A, demostrar que:

1. La mitad del ángulo BPC es igual a $90° - \frac{x}{2}$
2. P pertenece a la bisectriz del ángulo BAC
3. $AB + BH = AC + CK$




$$m(\measuredangle 1) = m(\measuredangle 2); m(\measuredangle 3) = m(\measuredangle 4)$$

$$m(\measuredangle ABC) = 180° - 2m(\measuredangle 2)$$

$$m(\measuredangle ACB) = 180° - 2m(\measuredangle 3)$$

$$m(\measuredangle ABC) + m(\measuredangle ACB) = 360° - 2\left(m(\measuredangle 2) + m(\measuredangle 3)\right)$$

Los ángulos interiores de un triángulo suman 180°, por lo tanto de la igualdad anterior se tiene:

$$180° - x = 360° - 2\left[180° - m(\measuredangle BPC)\right]$$

$$180° - x = 360° - 360° + 2m(\measuredangle BPC)$$

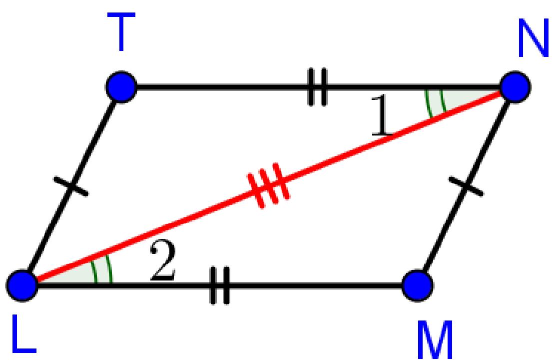
$$m(\measuredangle BPC) = 90° - \frac{x}{2}$$

2) P está en la bisectriz de $\measuredangle$HBC ( de hipótesis), por lo tanto equidista de los lados de ese ángulo: $\overline{PH} \cong \overline{PD}$. P pertenece a la bisectriz de $\measuredangle$KCB, por lo tanto equidista de los lados de ese ángulo: $\overline{PD} \cong \overline{PK}$ y se concluye que $\overline{PH} \cong \overline{PK}$ lo que significa que P equidista de $\overrightarrow{AH}$ y $\overrightarrow{AK}$ que son los lados del ángulo A, y por consiguiente P está en la bisectriz del ángulo A, porque equidista de sus lados.

3) Se traza $\overline{HK}$. El triángulo HPK es isósceles porque $\overline{PH} \cong \overline{PK} \Rightarrow \measuredangle AHK \cong \measuredangle AKH$ por tener el mismo complemento lo que significa que el triángulo AHK es isósceles y por definición de triangulo isósceles AH = AK $\Rightarrow AB + BH = AC + CK$

**SOLUCIONARIO DE LOS EJERCICIOS IMPARES**

**1.**



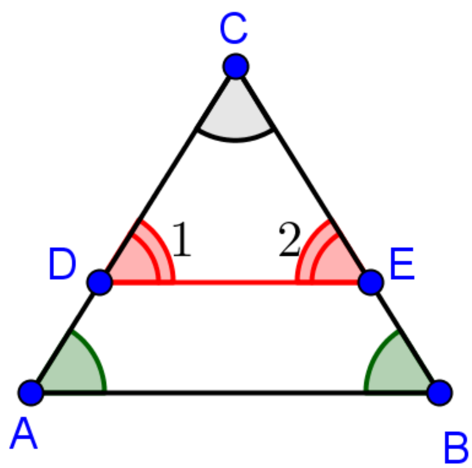

**HIPÓTESIS:** $\overline{LM} \cong \overline{TN}$

$\overline{LT} \cong \overline{MN}$

**TESIS:** $\overline{TN} \parallel \overline{LM}$

| | |
|---|---|
| 1. $\overline{LM} \cong \overline{TN}$ | 1. De hipótesis |
| 2. $\overline{LT} \cong \overline{MN}$ | 2. De hipótesis |
| 3. $\overline{LN} \cong \overline{LN}$ | 3. Propiedad reflexiva |
| 4. $\Delta LTN \cong \Delta MNL$ | 4. De 1, 2 y 3, teorema L – L – L |
| 5. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ | 5. De 4, por ser ángulos correspondientes en triángulos congruentes |
| 6. $\overline{TN} \parallel \overline{LM}$ | 6. De 5, por formar ángulos alternos internos congruentes |

**3.**



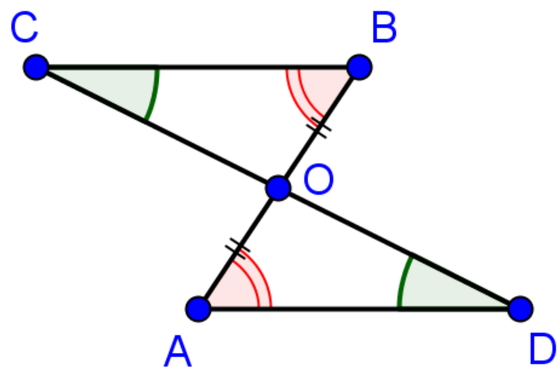

**HIPÓTESIS:** $\overline{CA} \cong \overline{CB}$

$\overline{CD} \cong \overline{CE}$

**TESIS:** $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

| | |
|---|---|
| 1. $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ | 1. De hipótesis |
| 2. $\Delta ABC$ es isósceles | 2. De 1, definición de triangulo isósceles |
| 3. $\measuredangle A \cong \measuredangle B$ | 3. De 2, por ser los ángulos de la base de un triangulo isósceles |
| 4. $\overline{CD} \cong \overline{CE}$ | 4. De hipótesis |
| 5. $\Delta CDE$ es isósceles | 5. De 4, definición de triangulo isósceles |
| 6. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ | 6. De 5, por ser los ángulos de la base de un triángulo isósceles |
| 7. $m(\measuredangle A) + m(\measuredangle B) + m(\measuredangle C) = 180°$ | 7. Suma de los ángulos interiores en el triangulo ABC |
| 8. $m(\measuredangle 1) + m(\measuredangle 2) + m(\measuredangle C) = 180°$ | 8. Suma de los ángulos interiores en el triángulo DEC |
| 9. $m(\measuredangle A) + m(\measuredangle B) + m(\measuredangle C) = m(\measuredangle 1) + m(\measuredangle 2) + m(\measuredangle C)$ | 9. De 7 y 8, propiedad transitiva |
| 10. $m(\measuredangle A) + m(\measuredangle B) = m(\measuredangle 1) + m(\measuredangle 2)$ | 10. De 9, propiedad cancelativa |
| 11. $2m(\measuredangle A) = 2m(\measuredangle 1) \Rightarrow m(\measuredangle A) = m(\measuredangle 1)$ | 11. Sustitución de 3 y 6 en 10 y algebra |
| 12. $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ | 12. De 11, por forman ángulos correspondientes congruentes |

**5.**



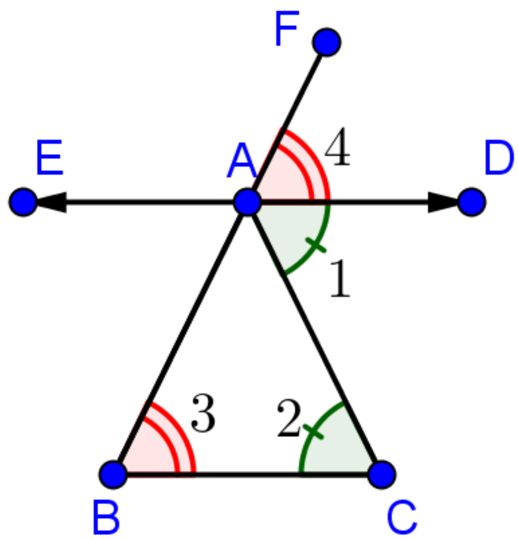

**HIPÓTESIS:** $\overline{CB} \parallel \overline{AD}$

O es punto medio de $\overline{AB}$

**TESIS:** O es punto medio de $\overline{CD}$

| | |
|---|---|
| 1. $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ | 1. De hipótesis, definición de punto medio |
| 2. $\overline{CB} \parallel \overline{AD}$ | 2. De hipótesis |
| 3. $\measuredangle A \cong \measuredangle B$ | 3. De 2, por ser ángulos alternos internos entre paralelas |
| 4. $\measuredangle C \cong \measuredangle D$ | 4. De 2, por ser ángulos alternos internos entre paralelas |
| 5. $\Delta OBC \cong \Delta OAD$ | 5. De 1, 3 y 5, por el teorema L – A – A |
| 6. $\overline{OC} \cong \overline{OD}$ | 6. De 5, por ser lados correspondientes en triángulos congruentes |
| 7. O es punto medio de $\overline{CD}$ | 8. De 6, definición de punto medio |

**7.** Demostrar que una recta trazada paralela a la base de un triángulo isósceles y que pasa por su vértice, es bisectriz del ángulo externo en el vértice.

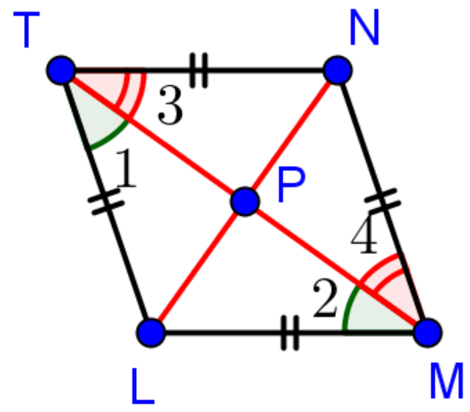



**HIPÓTESIS:** $\Delta ABC$ es isósceles con
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$
$\overleftrightarrow{EAD} \parallel \overline{AB}$

**TESIS:** $\overleftrightarrow{EAD}$ es bisectriz de $\measuredangle CAF$

| | |
|---|---|
| 1. $\Delta ABC$ es isósceles | 1. De hipótesis |
| 2. $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 2$ | 2. De 1, por ser ángulos de la base de un triangulo isósceles |
| 3. $\overleftrightarrow{EAD} \parallel \overline{AB}$ | 3. De hipótesis |
| 4. $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 1$ | 4. De 3, por ser ángulos alternos internos entre paralelas |
| 5. $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 1$ | 5. De 2 y 4, propiedad transitiva |
| 6. $\measuredangle 4 \cong \measuredangle 3$ | 6. De 3, por ser ángulos correspondientes entre paralelas |
| 7. $\measuredangle 4 \cong \measuredangle 1$ | 7. De 5 y 6, propiedad transitiva |
| 8. $\overleftrightarrow{EAD}$ es bisectriz de $\measuredangle CAF$ | 8. De 7, definición de bisectriz de un ángulo |

**9.**

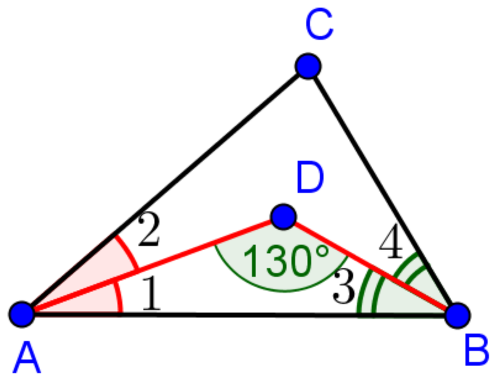



**HIPÓTESIS:** $\overline{LM} \cong \overline{MN} \cong \overline{NT} \cong \overline{TL}$

**TESIS:** $\overline{LN} \perp \overline{TM}$

| | |
|---|---|
| 1. $\overline{TL} \cong \overline{LM}$ | 1. De hipótesis |
| 2. $\Delta TLM$ es isósceles | 2. De 1, definición de triangulo isósceles |
| 3. $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 1$ | 3. De 2, por ser los ángulos de la base de un triángulo isósceles |
| 4. $\overline{TN} \cong \overline{NM}$ | 4. De hipótesis |
| 5. $\Delta TNM$ es isósceles | 5. De 4, definición de triangulo isósceles |
| 6. $\measuredangle 4 \cong \measuredangle 3$ | 6. De 5, por ser los ángulos de la base de un triángulo isósceles |
| 7. $\overline{TM} \cong \overline{TM}$ | 7. Propiedad reflexiva |
| 8. $\Delta TML \cong \Delta TMN$ | 8. De 7, 4 y 1, por teorema L – L – L |
| 9. $\measuredangle 4 \cong \measuredangle 1$ | 9. De 8, por ser ángulos correspondientes en triángulos congruentes |
| 10. $\measuredangle 4 \cong \measuredangle 1 \cong \measuredangle 2 \cong \measuredangle 3$ | 10. De 9, 6 y 3, propiedad transitiva |
| 11. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 3$ | 11. De 10 |
| 12. $\overline{TP}$ es bisectriz de $\measuredangle LTN$ | 12. De 11, definición de bisectriz |
| 13. $\overline{TL} \cong \overline{TN}$ | 13. De hipótesis |
| 14. $\Delta LTN$ es isósceles | 14. De 13, definición de bisectriz de un ángulo |
| 15. $\overline{TP}$ es altura de $\Delta LTN$ | 15. De 14 y 12, en un triángulo isósceles la bisectriz del ángulo opuesto a la base es también altura |
| 16. $\overline{TP} \perp \overline{LN}$ | 16. De 15, definición de altura de un triangulo |

11.

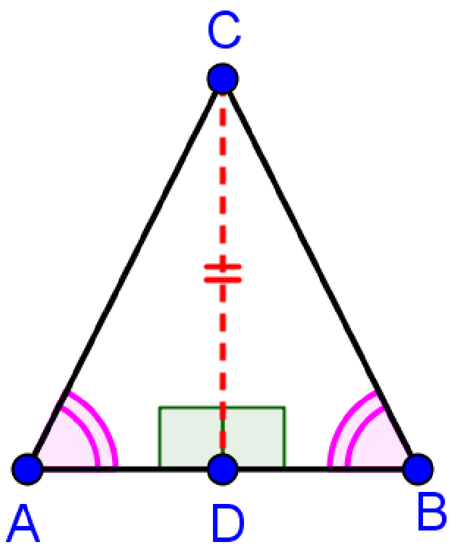



**HIPÓTESIS:** $\overline{AD}$ es bisectriz de $\measuredangle CAB$ y $\overline{BD}$ es bisectriz de $\measuredangle CBA$¸ $m(\measuredangle D) = 130º$

**HALLAR** $m(\measuredangle C)$

| | |
|---|---|
| 1. $m(\measuredangle 1) = m(\measuredangle 2)$ | 1. De hipótesis, definición de bisectriz de un ángulo |
| 2. $m(\measuredangle 3) = m(\measuredangle 4)$ | 2. De hipótesis, definición de bisectriz de un ángulo |
| 3. $m(\measuredangle 1) + m(\measuredangle 2) + m(\measuredangle 3) + m(\measuredangle 4) + m(\measuredangle C) = 180°$ | 3. Suma de los ángulos interiores del triangulo ABC |
| 4. $2m(\measuredangle 1) + 2m(\measuredangle 3) + m(\measuredangle C) = 180°$ $\Rightarrow 2[m(\measuredangle 1) + m(\measuredangle 3)] + m(\measuredangle C) = 180°$ | 4. Sustitución de 1 y 2 en 3 |
| 5. $m(\measuredangle 1) + m(\measuredangle 3) + 130° = 180°$ $\Rightarrow m(\measuredangle 1) + m(\measuredangle 3) = 50°$ | 5. Suma de los ángulos interiores del triángulo ADB |
| 6. $2(50°) + m(\measuredangle C) = 180°$ $\Rightarrow m(\measuredangle C) = 180° - 100°$ $\Rightarrow m(\measuredangle C) = 80°$ | 6. Sustitución de 5 en 4 |

**13.** Demostrar que si dos ángulos de un triángulo son congruentes, los lados opuestos a ellos son congruentes.

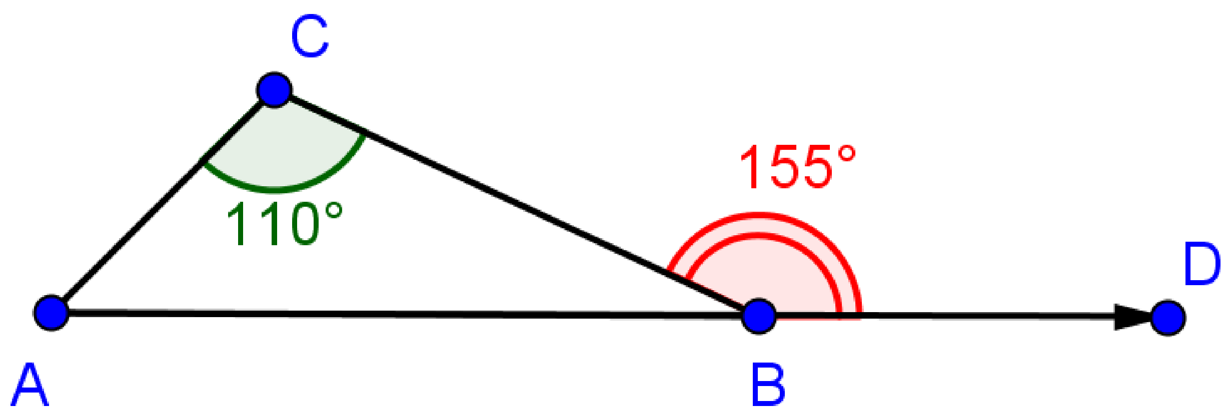



**HIPÓTESIS:** $\measuredangle A \cong \measuredangle B$

**TESIS:** $\overline{CA} \cong \overline{CB}$

| | |
|---|---|
| 1 Se traza la altura $\overline{CD}$ sobre $\overline{AB}$ | 1. Construcción auxiliar |
| 2. $\Delta CDA$ y $\Delta CDB$ son rectángulos | 2. De 1, definición de altura de un triangulo |
| 3. $\measuredangle A \cong \measuredangle B$ | 3. De hipótesis |
| 4. $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ | 4. Propiedad reflexiva |
| 5. $\Delta CDA \cong \Delta CDB$ | 5. De 2, 3 y 4, cateto – ángulo agudo |
| 6. $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ | 6. De 5, por ser lados correspondientes en triángulos congruentes |

**15.**




$m(CBA) = 25°$ Por ser el suplemento de $\measuredangle CBD$

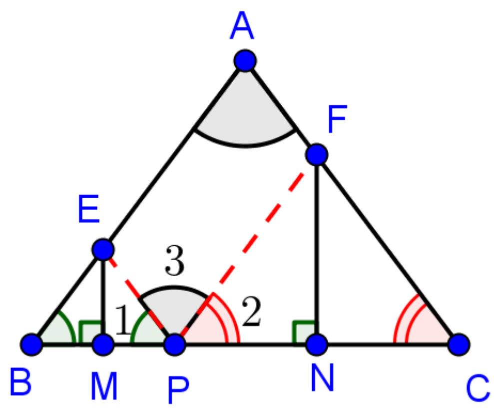
$110° + 25° + m(\measuredangle A) = 180°$ Suma de los ángulos interiores del triángulo ABC

$m(\measuredangle A) = 45°$

**Otra manera de resolver el problema:**

$155° = 110° + m(\measuredangle A)$ Porque un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores que no sean adyacentes a él. Se despeja y se llega al resultado $m(\measuredangle A) = 45°$

**17.** Se da un punto P sobre la base $\overline{BC}$ de un triángulo isósceles ABC. De los puntos medios M y N de $\overline{BP}$ y $\overline{PC}$ se trazan perpendiculares a $\overline{BC}$, esas perpendiculares cortan a $\overline{AB}$ en E y $\overline{AC}$ en F. Demostrar que $\measuredangle EPF \cong \measuredangle A$




**HIPÓTESIS:** M es punto medio de $\overline{BP}$

N es punto medio de $\overline{CP}$

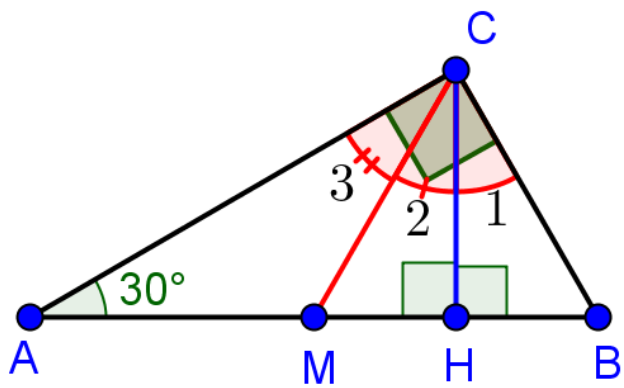
$\overline{EM} \perp \overline{BP}$

$\overline{FN} \perp \overline{PC}$

**TESIS:** $\measuredangle EPF \cong \measuredangle A$

| | |
|---|---|
| 1. M es punto medio de $\overline{BP}$ | 1. De hipótesis |
| 2. $\overline{EM}$ es una mediana del $\Delta$BEP | 2. De 1, definición de mediana de un triangulo |
| 3. $\overline{EM} \perp \overline{BP}$ | 3. De hipótesis |
| 4. $\overline{EM}$ es una altura del $\Delta$BEP | 4. De 3, por definición de altura de un triangulo |
| 5. $\Delta BEP$ es isósceles | 5. De 2 y 4, por ser una mediana también altura |
| 6. $\measuredangle B \cong \measuredangle 1$ | 6. De 5, por ser los ángulos de la base de un triangulo isósceles |
| 7. N es punto medio de $\overline{CP}$ | 7. De hipótesis |
| 8. $\overline{EM}$ es una mediana del $\Delta PFC$ | 8. De 7, definición de mediana de un triangulo |
| 9. $\overline{FN} \perp \overline{PC}$ | 9. De hipótesis |
| 10. $\overline{EM}$ es una altura del $\Delta PFC$ | 10. De 9, por definición de altura de un triangulo |
| 11. $\Delta PFC$ es isósceles | 11. De 8 y 10, por ser una mediana también altura |
| 12. $\measuredangle C \cong \measuredangle 2$ | 12. De 11, por ser los ángulos de la base de un triángulo isósceles |
| 13. $m(\measuredangle 1) + m(\measuredangle 3) + m(\measuredangle 2) = 180°$ | 13. Por formar un ángulo llano |
| 14. $m(\measuredangle B) + m(\measuredangle 3) + m(\measuredangle C) = 180°$ | 14. Sustitución de 12 y 6 en 13 |
| 15. $m(\measuredangle B) + m(\measuredangle C) + m(\measuredangle A) = 180°$ | 15. Suma de los ángulos interiores del $\Delta ABC$ |
| 16. $m(\measuredangle B) + m(\measuredangle 3) + m(\measuredangle C) = m(\measuredangle B) + m(\measuredangle C) + m(\measuredangle A)$ | 16. De 14 y 15, propiedad transitiva |
| 17. $m(\measuredangle 3) = m(\measuredangle A)$ | 17. De 16, por la propiedad cancelativa de las igualdades |

**19.** Demostrar que en un triángulo rectángulo que tiene un ángulo de 30º, la mediana y la altura relativas a la hipotenusa, dividen el ángulo recto en tres ángulos congruentes.

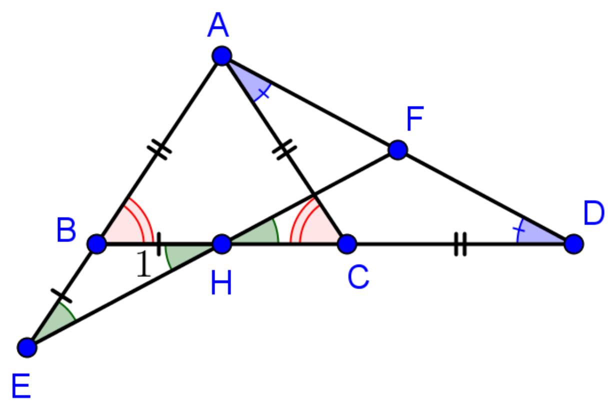



**HIPÓTESIS:** $\Delta ACB$ es un triángulo rectángulo con $\sphericalangle ACB$ recto
$m(\measuredangle A) = 30°$
$\overline{CM}$ es mediana
$\overline{CH}$ es altura

**TESIS:** $m(\sphericalangle 1) = m(\sphericalangle 2) = m(\sphericalangle 3) = 30°$

| | |
|---|---|
| 1. $m(\sphericalangle B) = 60°$ | 1. En el triángulo rectángulo ACB los ángulos agudos son complementarios |
| 2. $m(\sphericalangle 1) = 30°$ | 2. De 1. En el triángulo rectángulo CHB los ángulos agudos son complementarios |
| 3. $m(\sphericalangle ACH) = 60°$ | 3. En el triángulo rectángulo CHA los ángulos agudos son complementarios |
| 4. $BC = \frac{AB}{2}$ | 4. De hipótesis, en el triángulo rectángulo ACB el cateto opuesto al ángulo de 30° mide la mitad de la hipotenusa |
| 5. M es el punto medio de $\overline{AB}$ | 5. De hipótesis, definición de mediana |
| 6. $BM = \frac{AB}{2}$ | 6. De 5, definición de punto medio |
| 7. $\overline{BC} \cong \overline{BM}$ | 7. De 4 y 6, por medir lo mismo |
| 8. $\Delta MBC$ es isósceles | 8. De 7, definición de triangulo isósceles |
| 9. $\sphericalangle CMB \cong \sphericalangle BCM$ | 9. De 8, por ser ángulos de la base de un triangulo isósceles |
| 10. $m(\measuredangle CMB) + m(\measuredangle BCM) + 60° = 180°$ | 10. Suma de los ángulos interiores del $\Delta MBC$ |
| 11. $2m(\measuredangle BCM) + 60° = 180°$ $\Rightarrow 2m(\measuredangle BCM) = 120°$ $\Rightarrow m(\measuredangle BCM) = 60°$ | 11. Sustitución de 9 en 10 |
| 12. $m(\sphericalangle 1) + m(\sphericalangle 2) = 60°$ | 12. De 11, suma de ángulos |
| 13. $30° + m(\sphericalangle 2) = 60°$ | 13. Sustitución de 2 en 12 |
| 14. $m(\sphericalangle 1) + m(\sphericalangle 2) + m(\sphericalangle 3) = 90°$ $\Rightarrow 30° + 30° + m(\sphericalangle 3) = 90°$ $\Rightarrow m(\sphericalangle 3) = 30°$ | 14. De hipótesis |

**21**. Se da un triángulo isósceles ABC con $\overline{BC}$ como base. Se prolonga la base $\overline{BC}$ una longitud CD = AB. Se traza el segmento $\overline{AD}$. $\overline{AB}$ se prolonga una longitud $BE = \frac{BC}{2}$. Se traza la recta EHF, siendo H el punto medio de $\overline{BC}$ y F situado sobre $\overline{AD}$. Demostrar: 1) $m(\sphericalangle D) = \frac{m(\sphericalangle ABC)}{2}$ 2) $\overline{EA} \cong \overline{HD}$. 3) $\overline{FD} \cong \overline{FH}$ 4) Calcular los valores de los ángulos AFH y ADB si m ($\measuredangle$ BAC) = 58º.




**HIPÓTESIS:** $\Delta ABC$ es isósceles

$\overline{AC} \cong \overline{AB}$

$\overline{CD} \cong \overline{AB}$

$BE = \frac{BC}{2}$

H es punto medio de $\overline{BC}$

**TESIS:** $m(\sphericalangle D) = \frac{m(\sphericalangle ABC)}{2}$

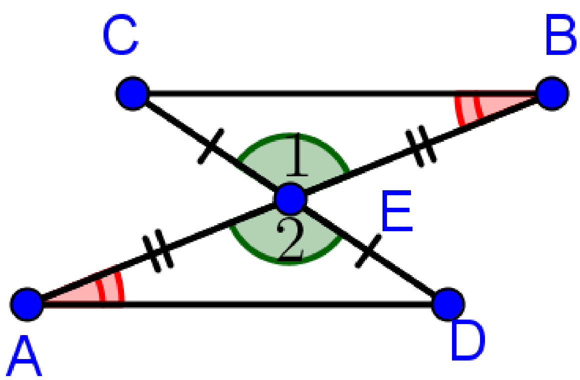
$\overline{EA} \cong \overline{HD}$

$\overline{FD} \cong \overline{FH}$

| | |
|---|---|
| 1. $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle ACB$ | 1. De hipótesis, por ser los ángulos de la base de un triángulo isósceles |
| 2. $\overline{AC} \cong \overline{AB} \cong \overline{CD}$ | 2. De hipótesis |
| 3. $\Delta ACD$ es isósceles | 3. De 2, definición de triangulo isósceles |
| 4. $\sphericalangle D \cong \sphericalangle CAD$ | 4. De 3, por ser ángulos de la base de un triángulo isósceles |
| 5. $m(\measuredangle ACB) = m(\measuredangle D) + m(\measuredangle CAD)$ | 5. Por ser $\measuredangle ACB$ un ángulo exterior del $\Delta ACD$ |
| 6. $m(\measuredangle ACB) = 2m(\measuredangle D)$ | 6. Sustitución de 4 en 5 |
| 7. $\frac{m(\measuredangle ACB)}{2} = m(\measuredangle D)$ | 7. De 6, algebra |
| 8. $BE = \frac{BC}{2}$ | 8. De hipótesis |
| 9. $BH = HC = \frac{BC}{2}$ | 9. De hipótesis, definición de punto medio |
| 10. $BE = HC$ | 10. De 8 y 9, propiedad transitiva |
| 11. $EA = BE + AB$ | 11. Suma de segmentos |
| 12. $HD = HC + CD$ | 12. Suma de segmentos |
| 13. $HD = BE + AB$ | 13. Sustitución de 10 y 2 en 12 |
| 14. $EA = HD$ | 14. De 11 y 13, propiedad transitiva |
| 15. $m(\measuredangle ABC) = m(\measuredangle E) + m(\measuredangle 1)$ | 15. Por ser $\measuredangle ABC$ un ángulo exterior en $\Delta EBH$ |
| 16. $BE = BH$ | 16. De 8 y 9, propiedad transitiva |
| 17. $\Delta EBH$ es isósceles | 17. De 16, definición de triangulo isósceles |

| | |
|---|---|
| 18. $\sphericalangle E \cong \sphericalangle 1$ | 18. De 17, por ser los ángulos de la base de un triangulo isósceles |
| 19. $m(\measuredangle ABC) = 2m(\measuredangle 1)$ $\Rightarrow \dfrac{m(\measuredangle ABC)}{2} = m(\measuredangle 1)$ | 19. Sustitución de 18 en 15 |
| 20. $m(\measuredangle 1) = m(\measuredangle D)$ | 20. De 19 y 7, propiedad transitiva |
| 21. $\sphericalangle FHD \cong \sphericalangle 1$ | 21. Por ser ángulos opuestos por el vértice |
| 22. $m(\measuredangle FHD) = m(\measuredangle D)$ | 22. Sustitución de 20 en 21 |
| 23. $\Delta FHD$ es isósceles | 23. De 22, por tener dos ángulos congruentes. |
| 24. $\overline{FD} \cong \overline{FH}$ | 24. De 25, definición de triangulo isósceles |

**23.** En la figura $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisecan en E. Demostrar que $\overline{AD}$ es paralelo a $\overline{CB}$.

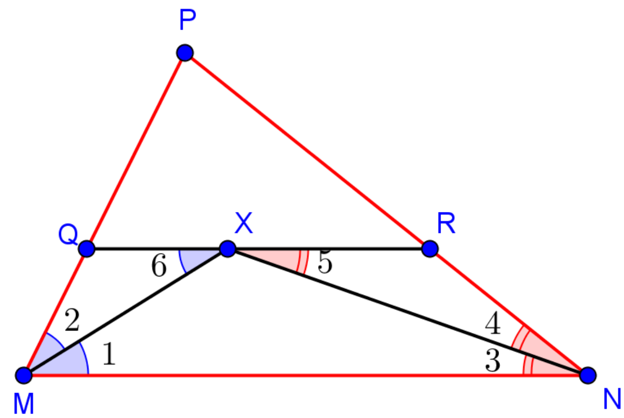



**HIPÓTESIS:** E es punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

**TESIS:** $\overline{AD} \parallel \overline{CB}$

| | |
|---|---|
| 1. $\overline{AE} \cong \overline{EB}$ | 1. De hipótesis, definición de punto medio de un segmento |
| 2. $\overline{CE} \cong \overline{ED}$ | 2. De hipótesis, definición de punto medio de un segmento |
| 3. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ | 3. Por ser ángulos opuestos por el vértice |
| 4. $\Delta CEB \cong \Delta EDA$ | 4. De 1, 2 y 3 por L – A – L |
| 5. $\measuredangle B \cong \measuredangle A$ | 5. De 4, por ser ángulos correspondientes en triángulos congruentes |
| 6. $\overline{AD} \parallel \overline{CB}$ | 6. De 5, por formar ángulos alternos internos congruentes |

**25.**

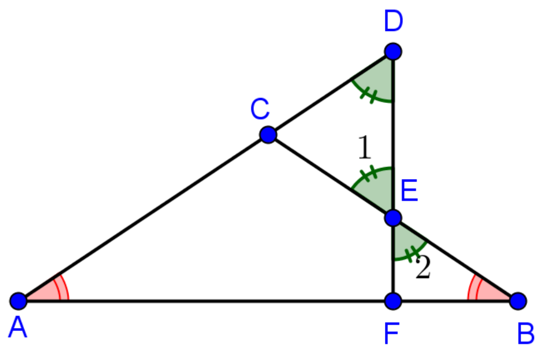



**HIPÓTESIS**: $\overline{MX}$ es bisectriz de PMN
$\overline{NX}$ es bisectriz de PNM
$\overline{QR} \parallel \overline{MN}$
Q – X – R

**TESIS:** Los triángulos MQX y NRX son isósceles.

| | |
|---|---|
| 1. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ | 1. De hipótesis, definición de bisectriz de un ángulo |
| 2. $\overline{QR} \parallel \overline{MN}$ | 2. De hipótesis |
| 3. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 6$ | 3. De 2, por ser ángulos alternos internos entre paralelas |
| 4. $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 6$ | 4. De 1 y 3, propiedad transitiva |
| 5. $\Delta MQX$ es isósceles | 5. De 4, por tener dos ángulos congruentes |
| 6. $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 4$ | 6. De hipótesis, definición de bisectriz de un ángulo |
| 7. $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 5$ | 7. De 2, por ser ángulos alternos internos entre paralelas |
| 8. $\measuredangle 4 \cong \measuredangle 5$ | 8. De 6 y 7, propiedad transitiva |
| 9. $\Delta NRX$ es isósceles | 9. De 8, por tener dos ángulos congruentes |

**27.**

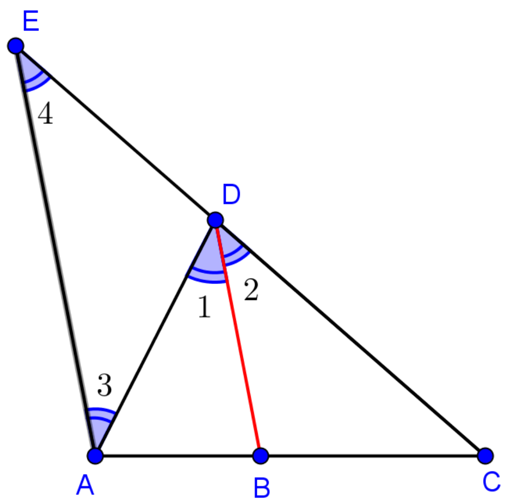



**HIPÓTESIS:** $\overline{CA} \cong \overline{CB}$
$\overline{CD} \cong \overline{CE}$
$A - F - B$

**TESIS:** $\overline{DF} \perp \overline{AB}$

| | |
|---|---|
| 1. $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ | 1. De hipótesis |
| 2. $\Delta ABC$ es isósceles | 2. De 1, definición de triangulo isósceles |
| 3. $\measuredangle A \cong \measuredangle B$ | 3. De 2, por ser los ángulos de la base de un triangulo isósceles |
| 4. $\overline{CD} \cong \overline{CE}$ | 4. De hipótesis |
| 5. $\Delta ABC$ es isósceles | 5. De 4, definición de triangulo isósceles |
| 6. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle D$ | 6. De 5, por ser los ángulos de la base de un triángulo isósceles |
| 7. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ | 7. Por ser ángulos opuestos por el vértice |
| 8. $\measuredangle 2 \cong \measuredangle D$ | 8. De 6 y 7, propiedad transitiva |
| 9. $m(\measuredangle A) + m(\measuredangle D) + m(\measuredangle DFA) = 180°$ | 9. Suma de los ángulos interiores del $\Delta DFA$ |
| 10. $m(\measuredangle B) + m(\measuredangle 2) + m(\measuredangle EFB) = 180°$ | 10. Suma de los ángulos interiores del $\Delta EFB$ |
| 11. $m(\measuredangle A) + m(\measuredangle D) + m(\measuredangle EFB) = 180°$ | 11. Sustitución de 3 y 8 en 10 |
| 12. $m(\measuredangle A) + m(\measuredangle D) + m(\measuredangle DFA) = m(\measuredangle A) + m(\measuredangle D) + m(\measuredangle EFB)$ | 12. De 9 y 11, propiedad transitiva |
| 13. $m(\measuredangle DFA) = m(\measuredangle EFB)$ | 13. De 12, propiedad cancelativa |
| 14. $m(\measuredangle DFA) + m(\measuredangle EFB) = 180°$ | 14. De hipótesis, $A - F - B$, por formar un par lineal |
| 15. $2m(\measuredangle DFA) = 180° \Rightarrow m(\measuredangle DFA) = 90°$ | 15. Sustitución de 13 en 14 |
| 16. $\overline{DF} \perp \overline{AB}$ | 16. De 15, definición de perpendicularidad |

**29.**



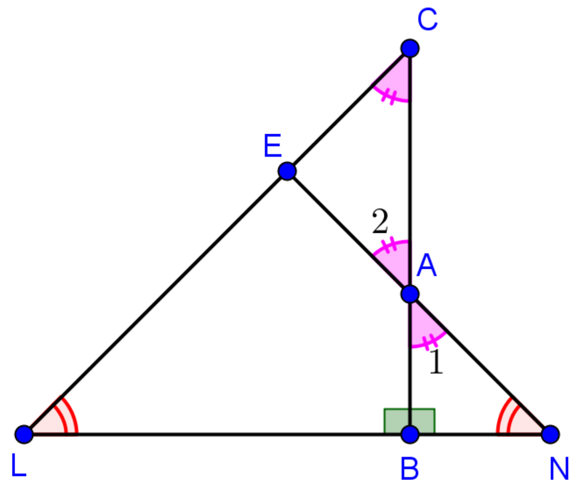

**HIPÓTESIS:** $\overline{DB}$ es bisectriz de $\measuredangle ADC$

$\overline{DB} \parallel \overline{EA}$

**TESIS:** $\Delta AED$ es isósceles.

| | |
|---|---|
| 1. $\overline{DB}$ es bisectriz de $\measuredangle ADC$ | 1. De hipótesis |
| 2. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ | 2. De 1, definición de bisectriz de un ángulo |
| 3. $\overline{DB} \parallel \overline{EA}$ | 3. De hipótesis |
| 4. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 3$ | 4. De 3, por ser ángulos alternos internos entre paralelas |
| 5. $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 3$ | 5. De 2 y 4, propiedad transitiva |
| 6. $\measuredangle 4 \cong \measuredangle 2$ | 6. De 3, por ser ángulos correspondientes entre paralelas |
| 7. $\measuredangle 4 \cong \measuredangle 3$ | 7. De 5 y 6, propiedad transitiva |
| 8. $\Delta AED$ es isósceles. | 8. De 7, por tener dos ángulos congruentes |

**31.** Se da el triángulo isósceles ELN, con $\overline{EL} \cong \overline{EN}$. Por cualquier punto A entre N y E, se traza una perpendicular a $\overline{LN}$ y la corta en B y a $\overline{LE}$ en C. Demostrar que el triángulo CEA es isósceles.

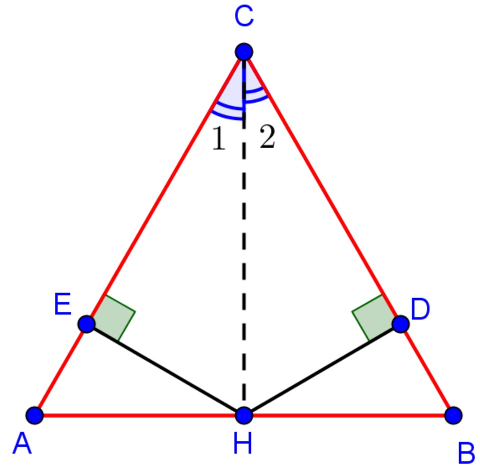



**HIPÓTESIS:** $\Delta ELN$ es isósceles
$\overline{EL} \cong \overline{EN}$
$\overline{CAB} \perp \overline{LN}$

**TESIS:** $\Delta CEA$ es isósceles

| | |
|---|---|
| 1. $\measuredangle L \cong \measuredangle N$ | 1. De hipótesis, por ser los ángulos de la base de un triángulo isósceles |
| 2. $\Delta ABN$ es rectángulo | 2. De hipótesis, definición de triangulo rectángulo |
| 3. El complemento de $\measuredangle 1$ es $\measuredangle N$ | 3. De 2, los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios |
| 4. $\Delta CBL$ es rectángulo | 4. De hipótesis, definición de triangulo rectángulo |
| 5. El complemento de $\measuredangle C$ es $\measuredangle L$ | 5. De 4, los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios |
| 6. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle C$ | 6. De 5, 3 y 1, por tener el mismo complemento |
| 7. $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 1$ | 7. Por ser ángulos opuestos por el vértice |
| 8. $\measuredangle 2 \cong \measuredangle C$ | 8. De 6 y 7, propiedad transitiva |
| 9. $\Delta CEA$ es isósceles | 9. De 8, por tener dos ángulos congruentes |

**33.**




**HIPÓTESIS:** Triangulo ABC es equilátero.

$\overline{CH}$ es altura

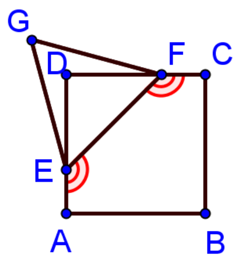
$\overline{HD} \perp \overline{CB}$

$\overline{HE} \perp \overline{CA}$

**TESIS:** $HD + HE = CH$

| | |
|---|---|
| 1. $\overline{CH}$ es altura | 1. De hipótesis |
| 2. $\overline{CH}$ es bisectriz de $\measuredangle ACB$ | 2. De 1 y de hipótesis, en un triángulo equilátero una altura es también bisectriz |
| 3. $m(\measuredangle ACB) = 60°$ | 3. De hipótesis, cada uno de los ángulos de un triángulo equilátero mide 60° |
| 4. $m(\measuredangle 1) = m(\measuredangle 2) = 30°$ | 4. De 3 y 2, definición de bisectriz de un ángulo |
| 5. $\Delta CEH$ es rectángulo | 5. De hipótesis, definición de triangulo rectángulo |
| 6. $HE = \dfrac{CH}{2}$ | 6. De 5 y 4, en un triángulo rectángulo el cateto opuesto a un ángulo de 30° mide la mitad de la hipotenusa. |
| 7. $\Delta CDH$ es rectángulo | 7. De hipótesis, definición de triangulo rectángulo |
| 8. $HD = \dfrac{CH}{2}$ | 8. De 7 y 4, en un triángulo rectángulo el cateto opuesto a un ángulo de 30° mide la mitad de la hipotenusa. |
| 9. $HE + HD = \dfrac{CH}{2} + \dfrac{CH}{2} = CH$ | 9. Suma de 8 y 6. |

**35.** ABCD es un cuadrado y el triángulo EFG es equilátero, cual es el resultado de:




$m(\measuredangle G)+m(\measuredangle AEF)+m(\measuredangle CFE)$

¿Los ángulos AEF y CFE son ángulos exteriores del triángulo?

Estos ángulos no son exteriores del triángulo, puesto que no cumplen la definición de ángulo exterior de un triángulo.

$m(\measuredangle G)=60°$ , por ser un ángulo interior de un triángulo equilátero

$m(\measuredangle AEF)+m(\measuredangle DEF)=180°(1)$

$m(\measuredangle CFE)+m(\measuredangle DFE)=180°(2)$

Sumando (1) y (2), tenemos que:

$m(\measuredangle AEF)+m(\measuredangle CFE)+m(\measuredangle DEF)+m(\measuredangle DFE)=360°(3)$

El $\Delta EDF$ es rectángulo (¿Por qué?)

En un triángulo rectángulo los ángulos agudos son complementarios, entonces tenemos que

$m(\measuredangle DEF)+m(\measuredangle DFE)=90°(4)$

Reemplazando (4) en (3), se tiene:

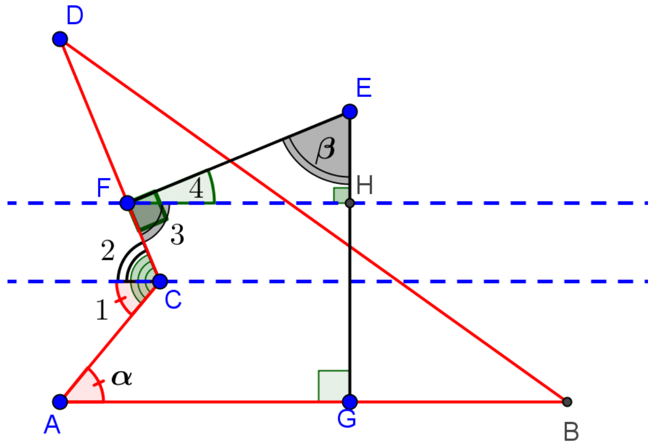
$m(\measuredangle AEF)+m(\measuredangle CFE)+90°=360° \Rightarrow m(\measuredangle AEF)+m(\measuredangle CFE)=270°$

Entonces la suma es:

$m(\measuredangle G)+m(\measuredangle AEF)+m(\measuredangle CFE)=60°+270°=330°$

**37.**

De acuerdo con la figura, demostrar que $m(\sphericalangle ACD) = m(\sphericalangle \alpha) + m(\sphericalangle \beta)$




Por C se traza una paralela a $\overline{AB}$ y por F se traza otra paralela a $\overline{AB}$

$\measuredangle \alpha \cong \measuredangle 1 (1)$ ¿Por qué?

$\measuredangle 2 \cong \measuredangle 3 (2)$ ¿Por qué?

$\Delta FHE$ es rectángulo ¿Por qué?

$m(\measuredangle 3) + m(\measuredangle 4) = 90° (3)$

Sustituimos (2) en (3) y queda:

$m(\measuredangle 2) + m(\measuredangle 4) = 90° (4)$

$m(\measuredangle 4) + m(\measuredangle \beta) = 90° (5)$, por ser los ángulos agudos de un triángulo rectángulo

$m(\measuredangle 2) + m(\measuredangle 4) = m(\measuredangle 4) + m(\measuredangle \beta)$ de (4) y (5) ¿Por qué?

Aplicando la ley cancelativa, nos queda:

$m(\measuredangle 2) = m(\measuredangle \beta) (6)$

$m(\measuredangle ACD) = m(\measuredangle 1) + m(\measuredangle 2) (7)$

Sustituimos (6) y (1) en (7), nos resulta:

$m(\measuredangle ACD) = m(\measuredangle \alpha) + m(\measuredangle \beta)$

**39.** Se da un triángulo isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ se prolonga la base $\overline{BC}$ una longitud $CD = AB$ , se traza $\overline{AD}$ y se prolonga $\overline{AB}$ una longitud $BE = \frac{BC}{2}$ Si H es el punto medio de la base $\overline{BC}$ y se traza $\overline{EHF}$ con F sobre $\overline{AD}$

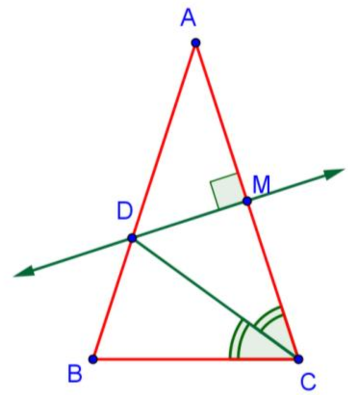
Demostrar que $m(\sphericalangle ADB) = \frac{m(\sphericalangle ABC)}{2}$

Demostrar que $\overline{EA} \cong \overline{HD}$

Demostrar que $\overline{FA} \cong \overline{FD} \cong \overline{FH}$

**NOTA: Regresar al ejercicio 21**

**41.** Se da el triángulo isósceles ABC con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ .Si la mediatriz del lado $\overline{AC}$ y la bisectriz del ángulo ACB se cortan en el punto D de $\overline{AB}$ . ¿Cuánto tienen que medir los ángulos del triángulo para que esta condición se cumpla?




$m(\measuredangle B) + m(\measuredangle BCD) + m(\measuredangle DCA) + m(\measuredangle A) = 180°(1)$ Por suma de los ángulos interiores del triángulo ABC

$m(\measuredangle B) + 2m(\measuredangle DCA) + m(\measuredangle A) = 180°(2)$

$\Delta ADC$ ,es isósceles, puesto que una altura es mediana, por definición de mediatriz de un segmento, por consiguiente $m(\measuredangle DCA) = m(\measuredangle A)(3)$

Sustituimos (3) en (2):

$m(\measuredangle B) + 2m(\measuredangle A) + m(\measuredangle A) = 180° \Rightarrow m(\measuredangle B) + 3m(\measuredangle A) = 180°(4)$

Pero $m(\measuredangle B) = 2m(DCA) = 2m(\measuredangle A)(5)$

Reemplazamos (5) en (4)

$2m(\measuredangle A) + 3m(\measuredangle A) = 180°$

$\Rightarrow m(\measuredangle A) = 36°$

Reemplazo este valor en (4) y queda:

$m(\measuredangle B) + 3(36°) = 180°$

$\Rightarrow m(\measuredangle B) + 108° = 180°$

$\Rightarrow m(\measuredangle B) = 72°$

Pero $m(\measuredangle B) = m(\measuredangle BCA) = 72°$ por ser los ángulos de la base de un triángulo isósceles.

*Profesor: José Manuel Montoya Misas.*