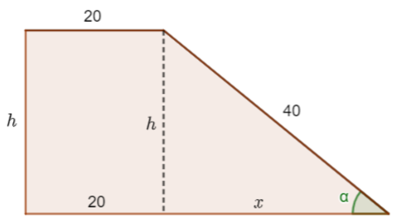
Una ventana tiene forma de trapecio rectangular. La base menor mide 20 cm y el lado oblicuo mide 40 cm. Halla el ángulo α que debe formar el lado oblicuo con la base mayor para que el área de la ventana sea máxima. Calcula dicha área máxima.

<u>*Solución*</u>:



La función área del trapecio es la que queremos maximizar:

$$A = \frac{B+b}{2} \cdot h$$

Base mayor: B=20+*x*,   Base menor: b=20

Relacionamos las variables $x,\ h\ y\ \alpha$, mediante las razones trigonométricas seno y coseno: $sen\,\alpha = \frac{h}{40}$, $h = 40 \cdot sen\,\alpha$, $\cos\alpha = \frac{x}{40}$, $x = 40 \cdot \cos\alpha$, y se sustituye en la función área:

$$\underline{\underline{A(\alpha)}} = \frac{20+x+20}{2} \cdot h = \frac{40+x}{2} \cdot h = \frac{40+40\cos\alpha}{2} \cdot 40 sen\,\alpha =$$
$$= 20(1+\cos\alpha) \cdot 40 sen\,\alpha = \underline{\underline{800(1+\cos\alpha)\,sen\,\alpha}}$$

Los extremos relativos de la función están entre los valores que anula la primera derivada:

$$A'(\alpha) = 800(-sen\,\alpha)\,sen\,\alpha + 800(1+\cos\alpha)\cos\alpha = -800 sen^2\alpha + 800\cos\alpha + 800\cos^2\alpha =$$
$$= -800(1-\cos^2\alpha) + 800\cos\alpha + 800\cos^2\alpha = -800 + 800\cos^2\alpha + 800\cos\alpha + 800\cos^2\alpha =$$
$$= \underline{1600\cos^2\alpha + 800\cos\alpha - 800}$$

$$1600\cos^2\alpha + 800\cos\alpha - 800 = 0 \xrightarrow{:800} 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0 \ \text{ llamando } \ z = \cos\alpha\ ,$$

$$2z^2 + z - 1 = 0\ ,\quad z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} z = -1\ , & \cos\alpha = -1\ ,\ \alpha = arc\cos(-1) = 180^\circ \\ z = \frac{1}{2}\ , & \cos\alpha = 1/2\ ,\ \alpha = arc\cos(1/2) = 60^\circ \end{cases}$$

No es posible la solución $\alpha = 180^\circ$, pues no se formaría el trapecio rectángulo.

Para determinar si la función tiene un máximo en $\alpha = 60^\circ$, utilizamos el criterio del signo del valor de la segunda derivada:

$$A''(\alpha) = 3200\cos\alpha(-sen\,\alpha) + 800(-sen\,\alpha) = -3200 sen\,\alpha\cos\alpha - 800 sen\,\alpha$$

$A''(60^\circ) = -3200 sen\,60^\circ \cos 60^\circ - 800 sen\,60^\circ < 0$ Máximo en $\alpha = 60^\circ$

Por tanto, el ángulo que debe formar el lado oblicuo con la base mayor, que hace el área del trapecio máxima, es: $\boxed{\alpha = 60^\circ}$. Y dicha área máxima es:

$$A(60^\circ) = 800(1+\cos 60^\circ)\,sen\,60^\circ = 800 \cdot \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{600\sqrt{3} = 1039'23\,cm^2}$$

----

* Este problema se podía haber resuelto tomando como variable independiente *h* o *x* y después determinar el ángulo α.

En tal caso, la relación entre las variables *h* y *x*, la obtenemos aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos *h* y *x*:

$$h^2 + x^2 = 40^2 \ , \ h = \sqrt{1600 - x^2}$$

Y sustituyendo en la fórmula del área, se obtiene la función a maximizar:

$$A = \frac{B+b}{2} \ , \ A = \frac{20 + x + 20}{2}\sqrt{1600 - x^2} \ , \ \underline{\underline{A(x) = \frac{1}{2}(40 + x)\sqrt{1600 - x^2}}}$$

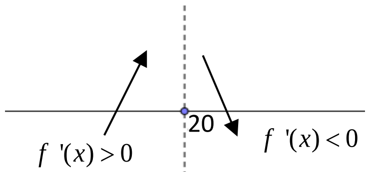
Los extremos relativos de la función están entre los valores que anula la primera derivada:

$$A'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1600 - x^2} + \frac{1}{2}(40 + x)\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1600 - x^2}}\left(-\cancel{2}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{1600 - x^2} - \frac{1}{2}\frac{40x + x^2}{\sqrt{1600 - x^2}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1600 - x^2}\right)^2 - 40x - x^2}{2\sqrt{1600 - x^2}} = \frac{1600 - x^2 - 40x - x^2}{2\sqrt{1600 - x^2}} = \frac{-2x^2 - 40x + 1600}{2\sqrt{1600 - x^2}} = \underline{\frac{-x^2 - 20x + 800}{\sqrt{1600 - x^2}}}$$

$$\frac{-x^2 - 20x + 800}{\sqrt{1600 - x^2}} = 0 \ , \ -x^2 - 20x + 800 = 0 \ , \ x = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 3200}}{-2} = \frac{20 \pm 60}{-2} = \left\langle \begin{array}{l} \cancel{x = -40} \\ \underline{x = 20} \end{array} \right.$$

Para decidir el tipo de extremo aplicamos el criterio de cambio de monotonía en un entorno de $x = 20$



$$[A'(10) = \frac{-10^2 - 20 \cdot 10 + 800}{\sqrt{1600 - 10^2}} = \frac{500}{\sqrt{1500}} > 0]$$

$$[A'(30) = \frac{-30^2 - 20 \cdot 30 + 800}{\sqrt{1600 - 30^2}} = \frac{-200}{\sqrt{700}} < 0]$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{La función } A \text{ es CRECIENTE en } (0, 20) \\ \text{La función } A \text{ es DECRECIENTE en } (20, 40) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Máximo en } x\text{=20}$$

Para $x = 20$, $h = \sqrt{1600 - 20^2} = \sqrt{1200} = \sqrt{400 \cdot 3} = \underline{20\sqrt{3}}$

Para determinar el ángulo α , aplicamos el seno o el coseno:

$$\cos\alpha = \frac{x}{40} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \ , \quad \alpha = \text{arc } \cos\left(\frac{1}{2}\right) , \ \boxed{\alpha = 60^{\circ}}$$

Por tanto, el ángulo que debe formar el lado oblicuo con la base mayor, que hace el área del trapecio máxima, es: $\boxed{\alpha = 60^{\circ}}$. Y dicha área máxima es:

$$A = \frac{B+b}{2}h = \frac{40 + 20}{2} \cdot 20\sqrt{3} = 30 \cdot 20\sqrt{3} = \boxed{600\sqrt{3}\ cm^2}$$