

Groepentheorie&Vectorruimte

www.karelappeltans.be

December 11, 2025

Groepentheorie

1 Voorbeelden (eindige groepen)

1.1 Symmetrieën van een rechthoek

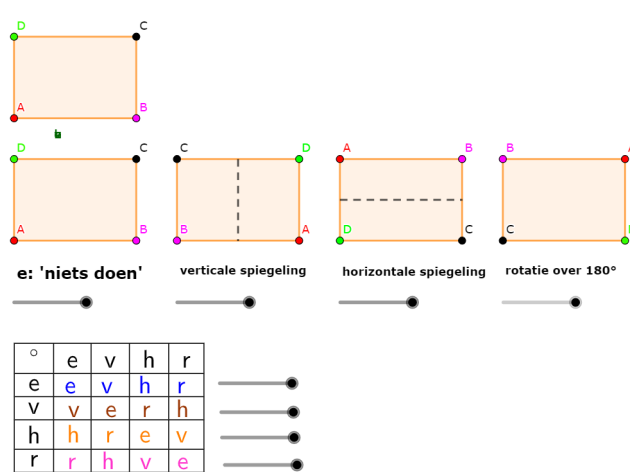


Figure 1: <https://www.geogebra.org/m/gkhrjwkh>

1.2 modularekenen

De bewerking $*$ is gedefinieerd als volgt: $a * b = a + b + 4 \text{ mod } 6$ Vul de Cayleytabel aan.

*	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

1.3 2x2-matrices

Zij $M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ Stel de Cayleytabel op voor $M, \cdot$

2 Definitie

2.1 definitie

Definitie van een groep
Een verzameling G voorzien van een bewerking $*$ noteren we als $(G, *)$ of $G, *$
(en soms ook gewoon als G , als de bewerking duidelijk is)
 $(G, *)$ is een groep wanneer voldaan is aan de groepsaxioma's

☒ Geslotenheid

$\forall a, b \in G : a * b \in G$

☒ Associativiteit

$\forall a, b, c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$

☒ Neutraal element

$\exists e \in G \text{ zodat } \forall a \in G : a * e = a = e * a$

☒ Invers element

$\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G : a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$

Figure 2: <https://www.geogebra.org/m/yct5hdkg>

2.2 Voorbeelden

Ga na dat de gegeven voorbeelden voorbeelden van een groep zijn.

3 Eigenschappen van een groep

3.1 uniciteit bewerking

In een rij of kolom in een caleytabel kan nooit tweemaal hetzelfde element staan.

Bewijs uit het ongerijmde:

Stel $G, *$ is een groep met $G = \{a, b, c, d\}$ en $a * b = d$ en $a * c = d$ dan $a * b = a * c$ en omdat a^{-1} bestaat geldt vervolgens $a^{-1} * a * b = a^{-1} * a * c \Rightarrow b = c$. En dit kan niet.

3.2 Orde

Het aantal elementen in een groep G noemen we de orde van de groep en we noteren dit met $\#G$ of $ord(G)$.

De orde van het element a in een groep met bewerking $*$ is het kleinste getal n zodat $a^n = \underbrace{a * a * a \cdots a}_{n \text{ keer}} = e$ en we noteren dit met $ord(a)$. De orde van het identiteitselement e is dus altijd gelijk aan 1.

3.3 Eigenschappen

Eigenschappen groepen

1) In een groep $(G, *)$ bestaat exact één neutraal element

2) Een element in een groep $(G, *)$ heeft exact één invers element

3) $\forall x, y \in G : (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

4) $\forall x \in G : (x^{-1})^{-1} = x$

5) Abelse groep

Figure 3: <https://www.geogebra.org/f/vrg2ppwqma>

3.4 Deelgroepen

3.4.1 Definitie

Stel dat $(G, *)$ een groep is. Als H een niet-lege deelverzameling is van de verzameling G en $(H, *)$ is een groep, dan noemen we $(H, *)$ een deelgroep van $(G, *)$.

3.4.2 eigenschappen

1. Het neutraal element van $(G, *)$ is steeds ook het neutraal element van $(H, *)$
2. Het inverse element van $x \in G$ is ook het inverse element van $x \in H$
3. Iedere groep G heeft al zeker 2 deelgroepen, namelijk e en G zelf.
4. Voor iedere deelgroep H van een eindige groep G geldt: $\#H$ deelt $\#G$ (stelling van Lagrange)

Twee voorwaarden zijn voldoende opdat een $(H, *)$ een deelgroep is van $(G, *)$:

1. $a * b \in H$, voor alle $a, b \in H$
2. $a^{-1} \in H$, voor alle $a \in H$, (deelgroepcriterium)

3.4.3 Oefening

Bepaal al de deelgroepen van $(D_3, \circ)$

4 Oefeningen

1. Ga na dat de volgorde van de kwantoren in de definitie van de groepeigenschappen niet omgewisseld mogen worden.
2. Ga na dat $G = \{0, 2, 4\}$ met als bewerking "optelling modulo 6" een groep is.
3. Ga na dat $G = \{5, 15, 25, 35\}, \text{mod} 40$ een groep is
4. Ga na dat $V, +$, de verzameling van alle vectoren in het vlak voorzien van de optelling een groep is. Dit is een voorbeeld van een oneindige groep

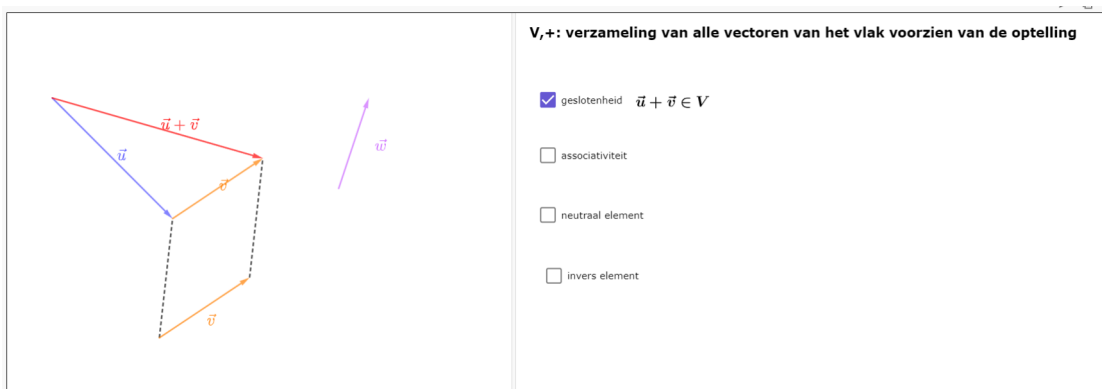


Figure 4: <https://www.geogebra.org/m/x5n9emc3>

5. Ga na dat $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid a \neq 0 \right\}, \cdot$ een groep is
6. symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek

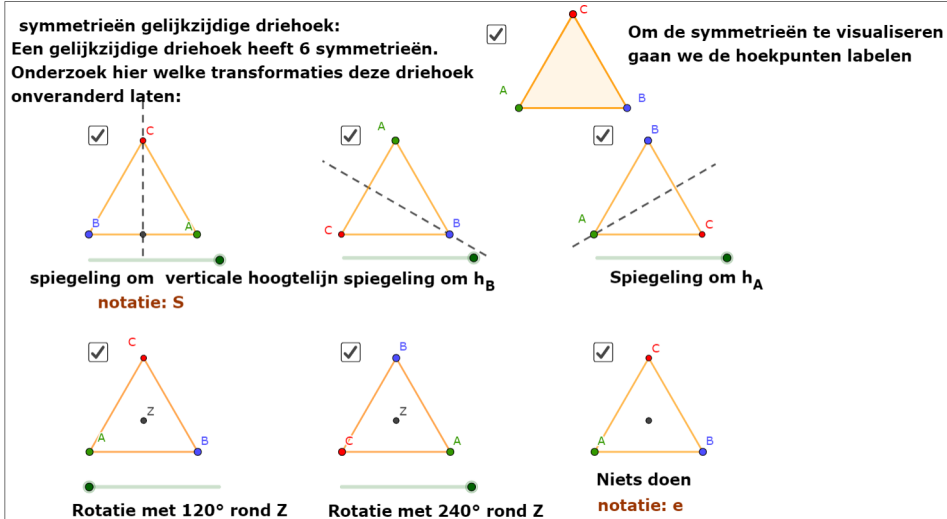


Figure 5: <https://www.geogebra.org/m/qy4jbdnk>

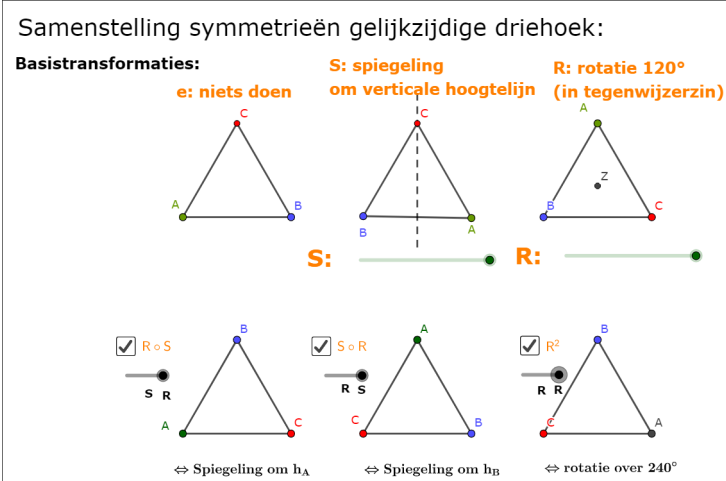


Figure 6: <https://www.geogebra.org/m/qy4jbdnk>

$\circ$	e	R	R^2	S	RS	SR
e	e	R	R^2	S	RS	SR
R	R	R^2	e	RS	SR	S
R^2	R^2	e	R	SR	S	RS
S	S	SR	RS	e	R^2	R
RS	RS	S	SR	R	e	R^2
SR	SR	RS	S	R^2	R	e

Figure 7: <https://www.geogebra.org/m/qy4jbdnk>

Ga na dat $D_{3,\circ}$ een groep is. Dit is de kleinste groep die niet commutatief is

Groepsaxioma's:

Voorbeeld; symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek

e	R	R ²	S	RS	SR
e	R	R ²	S	RS	SR
R	R	R ²	e	RS	SR
R ²	R ²	e	R	SR	S
S	S	SR	RS	e	R ²
RS	RS	S	SR	R	e
SR	SR	RS	S	R ²	R

- ☒ basisregel 1
☐ basisregel 2
☐ basisregel 3
☐ basisregel 4

Geslotenheid:

De combinatie van twee symmetrieën die een gelijkzijdige Δ op zichzelf afbeelden is opnieuw een symmetrie van die gelijkzijdige Δ

☒ voorbeeld

e	R	R ²	S	RS	SR
e	R	R ²	S	RS	SR
R	R	R ²	e	RS	SR
R ²	R ²	e	R	SR	S
S	S	SR	RS	e	R ²
RS	RS	S	SR	R	e
SR	SR	RS	S	R ²	R

$$(SR)R^2 = SR^3 = S$$

☒ algemeen

$G, \star$

G is gesloten voor de bewerking $\star$

voor alle elementen $a, b \in G$ geldt dat $a \star b \in G$

Figure 8: <https://www.geogebra.org/m/yct5hdkg>

7. Bepaal alle symmetrieën van een vierkant in functie van de 2 gegeven transformaties

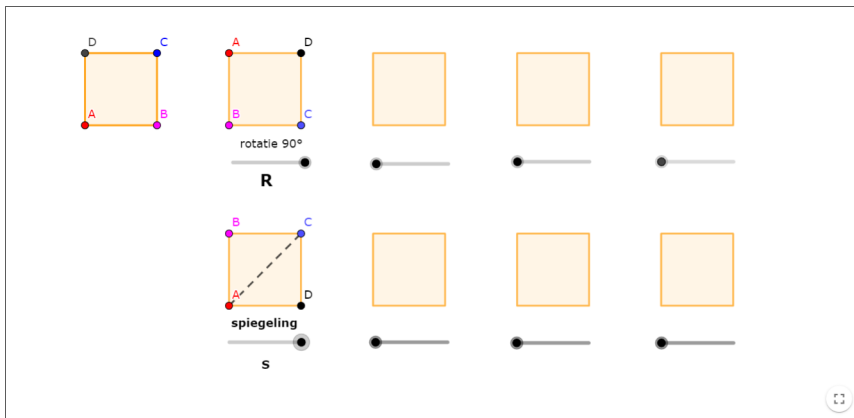


Figure 9: <https://www.geogebra.org/m/fthabgvp>

Toon aan, m.b.v. een Caleytabel dat $(D_4, \circ)$, de symmetrieën van een regelmatige vierhoek, een groep is.

8. Groep of niet?

- (a) $\mathbb{Z}, +$
 (b) $\mathbb{Z}_4, \cdot$
 (c) $\mathbb{N}, +$
 (d) $\mathbb{Q}, \cdot$
 (e) $\mathbb{R}^-, \cdot$

9. Vul onderstaande tabel in zodat de tabel een cayleytabel van een groep is.

*	a	b	c
a			
b			
c			a

10. Hieronder staat een caleytabel van een verzameling die bestaat uit 2 elementen namelijk de elementen EVEN (alle even getallen) en ONEVEN (alle oneven getallen). Is deze verzameling samen met de optelling een groep?

+	EVEN	ONEVEN
EVEN		
ONEVEN		

11. De bewerking $*$ is wordt gedefinieerd dootr $x * y = x + y - xy$ met $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
 - (a) Bepaal het neutraal (of eenheids)element
 - (b) Bepaal in termen van x het invers element van x , m.a.w. bepaal x^{-1}
12. $\forall m, n \in \mathbb{Z}_0^+$ wordt volgende bewerking gedefinieerd $m * n = |m - n|$. Ga na dat aan alle eigenschappen van een groep voldaan is, op associativiteit na.
13. $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ wordt volgende bewerking gedefinieerd $m * n = m - n$. Ga na dat aan alle eigenschappen van een groep voldaan is, op associativiteit na.
14. Stel de caleytabel op van volgende deelgroep van de complexe getallen $\{1, -1, i, -i\}$.
15. Toon aan m.b.v. een caleytabel dat de verzameling $G = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$, voorzien met volgende bewerkingen $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ een groep vormt, de zogenaamde quaterionengroep
16. Bewijs de eigenschappen van een groep

Vectorruimte

5 vectorruimte

Het begrip reële vectorruimte $\mathbb{R}, \mathbb{V}, +$			
$\mathbb{R}^{2 \times 2}$	$\mathbb{R}[x]$	π_0	Vectorruimte $\mathbb{V}$
$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$	$f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ $g(x) = -2x + 5$		u en v
$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$	$f(x) + g(x) = 2x^2 - 5x + 10 \in \mathbb{R}[x]$	$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \in \pi_0$	1) $\forall u, v \in \mathbb{V} : u + v \in \mathbb{V}$ (de optelling van vectoren is inwendig)
$A+B=B+A$	$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$	$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$	2) $\forall u, v \in \mathbb{V} : u + v = v + u$ De optelling van vectoren is commutatief
$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$	$2x^2 - 3x + 5 + 0 = 2x^2 - 3x + 5$	$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$	3) $\exists o \in \mathbb{V}, o + v = v = v + o$ er is een neutraal element voor de optelling van vectoren
			4) $\forall v \in \mathbb{V}, \exists -v \in \mathbb{V} : v + (-v) = (-v) + v = \mathbf{0}$ elke vector heeft een invers element
			5) $\forall u, v, w \in \mathbb{R} : (u + v) + w = u + (v + w)$ de optelling van vectoren is associatief
			6) $\forall v \in \mathbb{V}, \forall r \in \mathbb{R} : r \cdot v \in \mathbb{V}$ het scalair product van een vector met een reëel getal is een vector
			7) $\forall v \in \mathbb{V}, \forall r, s \in \mathbb{R} : r(s \cdot v) = (rs) \cdot v$ De scalaire vermenigvuldiging is gemengd associatief
			8) $\forall u, v \in \mathbb{V}, \forall r \in \mathbb{R} : r \cdot (u + v) = r \cdot u + r \cdot v$ De scalaire vermenigvuldiging is distributief t.o.v. zowel de optelling in $\mathbb{R}$ als in $\mathbb{V}$
			9) $\forall v \in \mathbb{V}, \forall r, s \in \mathbb{R} : (r + s) \cdot v = r \cdot v + s \cdot v$
			10) $\forall v \in \mathbb{V} : 1 \cdot v = v = v \cdot 1$ 1 is het neutraal element voor de scalaire vermenigvuldiging

Figure 10: <https://www.geogebra.org/m/fgsz7ma5>