Εξισώσεις β’ βαθμού

- Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ ονομάζεται εξίσωση **2ου βαθμού.**

  Παράδειγμα:
  $2x^2-x-1=0$

- Αν $\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0$, τότε οι λύσεις ή ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0\,,\alpha\neq 0$ είναι:
-

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Δηλαδή, $$\boldsymbol{x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$$

Παράδειγμα:
$2x^2-x-1=0$ $\qquad$ $\alpha=2\ ,\ \beta=-1,\ \gamma=-1$

Η εξίσωση έχει λύσεις:
$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2}=\frac{+1\pm\sqrt{9}}{4}$$

$$x_1=\frac{+1+3}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$$x_2=\frac{+1-3}{4}=\frac{-2}{4}=\frac{1}{2}$$

Απόδειξη:

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \ \alpha \neq 0$ *Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης επί 4α.*

$\Rightarrow 4\alpha \cdot \alpha x^2 + 4\alpha \cdot \beta x + 4\alpha \cdot \gamma = 0$

$\Rightarrow\ \ 4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + 4\alpha\gamma = 0$

$\Rightarrow (4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2) - \beta^2 + 4\alpha\gamma = 0$ *Προσθέτουμε και αφαιρούμε το β^2, για να προκύψει τέλειο τετράγωνο.*

$\Rightarrow\ (2\alpha x + \beta)^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

Αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$ *τότε:*

$\Rightarrow 2\alpha x + \beta = \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$

$\Rightarrow 2\alpha x = -\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

$\Rightarrow 2\alpha x + \beta = -\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$

$\Rightarrow 2\alpha x = -\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$

$\Rightarrow x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

Επομένως, η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \ \alpha \neq 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$.

Παραδείγματα

Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $(2x - 5)^2 = 25$

(β) $4x^2 + 4x + 10 = 0$

(γ) $2x^2 - x - 6 = 0$

(δ) $-x^2 + 3x + 1 = 0$

Λύση:

(α) $(2x-5)^2 = 25$

$$(2x-5)^2 = (+5)^2 \quad ή \quad (2x-5)^2 = (-5)^2$$

Άρα, $2x-5=-5$ ή $2x-5=5$

$2x=-5+5$ ή $2x=5+5$

$2x=0$ $2x=10$

$x=0$ $x=5$

(β) $4x^2+4x+10=0$

<u>*Α΄ τρόπος:*</u>

$4x^2+4x+10=0$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$\alpha=4\ ,\quad \beta=4\ ,\quad \gamma=10$

Η εξίσωση έχει ρίζες:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot4\cdot10}}{2\cdot4}$$
$$=\frac{-4\pm\sqrt{-24}}{4}$$

Η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες, αφού η $\sqrt{-24}$ *δεν ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.*

<u>*Β΄ τρόπος:*</u>

$4x^2+4x+10=0$

Με τη μέθοδο συμπλήρωσης τέλειου τετραγώνου η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως:

$$4x^2+4x+10=0$$
$$4x^2+4x+1-1+10=0$$
$$4x^2+4x+1+9=0$$
$$(2x+1)^2+9=0$$
$$(2x+1)^2=-9$$

Για κάθε τιμή του x *ισχύει* $(2x+1)^2\geq 0$ *. Άρα, η εξίσωση είναι* ***αδύνατη*** *αφού δεν υπάρχει τιμή του* x *που να ισχύει:*
$(2x+1)^2=-9$

(γ) $2x^2 - x - 6 = 0,\ \alpha = 2\ ,\ \beta = -1\ ,\ \gamma = -6$

Η εξίσωση έχει ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4}$$

$x_1 = \frac{+1+7}{4} = \frac{8}{4} = 2$	$x_2 = \frac{+1-7}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$

(δ) $-x^2 + 3x + 1 = 0\ ,\ \alpha = -1\ ,\ \beta = 3\ ,\ \gamma = 1$

Η εξίσωση έχει λύσεις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{-2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{-2}$$

$x_1 = \frac{-3+\sqrt{13}}{-2} = \frac{+3-\sqrt{13}}{2}$	$x_2 = \frac{-3-\sqrt{13}}{-2} = \frac{+3+\sqrt{13}}{2}$