

## Problemas – Tema 9

### Problemas resueltos - 13 - posición relativa de dos rectas

1. a) Halla  $a \in \mathbb{R}$  para que las rectas  $r: \begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+y-3z=2 \end{cases}$  y  $s: \begin{cases} x+y=0 \\ 3x+2y+z=a \end{cases}$  se corten en un punto.

b) Para dicho valor de  $a$  obtener la ecuación implícita de un plano que contenga a ambas rectas.

a) Para estudiar la posición relativa de dos rectas podemos trabajar de dos formas.

La primera es con sus ecuaciones generales, formando un sistema 4x4 que debería tener solución única si queremos que ambas rectas se corten un punto.

La segunda es obtener los vectores directores de cada recta  $\vec{u}_r, \vec{u}_s$  y un punto de cada recta para formar el vector  $\vec{AB}$ . Estudiando el rango de la matriz formada por estos tres vectores podemos deducir la posición relativa de ambas rectas. Vamos a resolverlo de esta segunda forma.

$$r: \begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+y-3z=2 \end{cases} \rightarrow z=t \rightarrow r: \begin{cases} x+2y=1+t \\ -x+y=2+3t \end{cases} \rightarrow \text{Sumamos ambas ecuaciones}$$

$$3y=3+4t \rightarrow y=1+\frac{4}{3}t \rightarrow x=1+t-2\left(1+\frac{4}{3}t\right) \rightarrow x=-1-\frac{5}{3}t$$

$$r: \begin{pmatrix} x=-1-\frac{5}{3}t \\ y=1+\frac{4}{3}t \\ z=t \end{pmatrix} \rightarrow A \in r = (-1, 1, 0), \quad \vec{u}_r = \left(\frac{-5}{3}, \frac{4}{3}, 1\right) \rightarrow \vec{u}_r = (-5, 4, 3)$$

$$s: \begin{cases} x+y=0 \\ 3x+2y+z=a \end{cases} \rightarrow z=m \rightarrow s: \begin{cases} x+y=0 \\ 3x+2y=a-m \end{cases} \rightarrow s: \begin{cases} -2x-2y=0 \\ 3x+2y=a-m \end{cases} \rightarrow$$

Sumamos ambas ecuaciones  $\rightarrow x=a-m \rightarrow y=-a+m$

$$s: \begin{pmatrix} x=a-m \\ y=-a+m \\ z=m \end{pmatrix} \rightarrow B \in s = (a, -a, 0), \quad \vec{u}_s = (-1, 1, 1)$$

El vector  $\vec{AB}$  resulta  $\rightarrow A \in r = (-1, 1, 0), \quad B \in s = (a, -a, 0) \rightarrow \vec{AB} = (a+1, -a-1, 0)$

Formamos la matriz  $(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB})$ . Para que las rectas se corten en un punto el rango de esta matriz debe ser dos, ya que los vectores directores de ambas rectas son sistema generador del plano que contiene a ambas rectas. Además, estos dos vectores directores son linealmente independientes entre sí.

$$\vec{u}_r = (-5, 4, 3) \quad , \quad \vec{u}_s = (-1, 1, 1) \quad , \quad \vec{AB} = (a+1, -a-1, 0)$$

Los vectores directores de las dos rectas, en efecto, son linealmente independientes ya que no son proporcionales, como se comprueba al dividir sus componentes  $\rightarrow \frac{-5}{-1} \neq \frac{4}{1} \neq \frac{3}{1}$

Nos queda imponer la condición de rango dos para la matriz formada por los tres vectores. Para ello, forzamos que su determinante sea cero (ya que así el rango no será tres.)

$$\begin{vmatrix} -5 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ a+1 & -a-1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 0 + 4(a+1) - 3(-a-1) - (3(a+1) + 0 - 5(-a-1)) = 0$$

$$(a+1) + 2(-a-1) = 0 \rightarrow -a-1 = 0 \rightarrow a = -1$$

Este valor anula el determinante. Sabemos que el rango de la matriz es dos, al contener dos vectores linealmente independientes (los dos vectores directores). Por lo tanto, para  $a = -1$  las rectas se cortan en un solo punto.

b) Para  $a = -1$  debemos obtener la ecuación general o implícita del plano que contiene a ambas rectas. Sabemos que un plano queda determinado de manera única por dos vectores linealmente independientes paralelos al plano y un punto del plano.

Estos vectores son los directores de las rectas:  $\vec{u}_r = (-5, 4, 3)$  ,  $\vec{u}_s = (-1, 1, 1)$

Y el punto es uno de cualquiera de las dos rectas, por ejemplo:  $A \in r = (-1, 1, 0)$

Con la determinación lineal del plano podemos obtener su ecuación general anulando el siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} -5 & -1 & x+1 \\ 4 & 1 & y-1 \\ 3 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -5z - 3(y-1) + 4(x+1) - (3(x+1) - 5(y-1) - 4z) = 0$$

$$-z + 2(y-1) + (x+1) = 0 \rightarrow \Pi: x + 2y - z - 1 = 0$$

2. Sea la recta  $r: mx = y = z + 2$  con  $m \neq 0$ , y la recta  $s: \frac{x-4}{4} = y-1 = \frac{z}{2}$ .

a) Halla el valor de  $m$  para que las rectas sean perpendiculares.

b) ¿Existe algún valor de  $m$  para el que las rectas sean paralelas?

a) Ambas rectas serán perpendiculares si el producto escalar de sus vectores directores es nulo.

$$r: mx = y = z + 2 \rightarrow r: x = \frac{y}{m} = \frac{z+2}{m} \rightarrow \vec{u}_r = (1, m, m)$$

$$s: \frac{x-4}{4} = y-1 = \frac{z}{2} \rightarrow \vec{u}_s = (4, 1, 2)$$

$$\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = 0 \rightarrow 4 + m + 2m = 0 \rightarrow m = \frac{-4}{3}$$

b) Ambas rectas serán paralelas si sus vectores directores son proporcionales. Es decir:

$$\frac{1}{4} = \frac{m}{1} = \frac{m}{2}$$

Si igualamos la primera y la segunda fracción  $\rightarrow m = \frac{1}{4}$ . Pero con este valor no se cumple la igualdad entre la primera y la tercera fracción. Por lo tanto, no hay un valor de  $m$  que haga paralelas ambas rectas.