Problemas – Tema 8

Problemas resueltos - 3 - submatriz y menor - concepto de rango usando determinantes

1. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Estudia, según los valores de k , el rango de la matriz resultante de operar $AB^t + kI$, donde B^t es la matriz traspuesta de B e I es la matriz identidad de orden 3.

$$AB^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 1 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad kI = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

$$AB^t + kI = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k & 1 & 1 \\ -1 & -1+k & -1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Para estudiar el rango vamos a calcular el determinante $|AB^t + kI|$. Si el determinante fuese distinto de 0, su rango sería 3. Y para los valores de k donde se anule el determinante, estimaremos en cada caso el rango de la matriz.

$$|AB^t + kI| = \begin{vmatrix} 1+k & 1 & 1 \\ -1 & -1+k & -1 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} \rightarrow |AB^t + kI| = k(k^2 - 1) + k \rightarrow |AB^t + kI| = k^3$$

Si $k \neq 0 \rightarrow |AB^t + kI| \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 3$

Si $k = 0 \rightarrow |AB^t + kI| = 0 \rightarrow \text{Rango} \neq 3$

Estudiamos el rango para $k = 0 \rightarrow AB^t + 0 \cdot I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Las tres columnas de la matriz

son iguales, por lo que solo hay un vector columna linealmente independiente dentro de la matriz $\rightarrow \text{Rango} = 1$.

2. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$.

a) Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango.

b) Determina, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.

a) Debemos estudiar el rango de cada matriz, y comprobar si existen valores comunes del parámetro m en la discusión de casos en ambas matrices. Para estudiar el rango, comenzamos planteando el determinante de cada matriz cuadrada y comprobando donde se anula.

$$|A| = -m - 4, \quad |A| = 0 \rightarrow m = -4$$

Si $m \neq -4 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{rango}(A) = 2$, ya que tendremos dos vectores linealmente independientes formando la matriz.

Si $m = -4 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow \text{rango}(A) = 1$, ya que existe al menos un menor de orden uno no nulo. Por ejemplo $|\alpha_{22}| = -1 \neq 0$.

$$|B| = m^2 + 4m, \quad |B| = 0 \rightarrow m = 0, \quad m = -4$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq -4 \rightarrow |B| \neq 0 \rightarrow \text{rango}(B) = 3$, ya que tendremos tres vectores linealmente independientes formando la matriz.

Si $m = 0 \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rango}(B) = 2$, ya que existe al menos un menor de orden dos no nulo. Por ejemplo $|\alpha_{33}| = 4 \neq 0$.

Si $m = -4 \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rango}(B) = 2$, ya que existe al menos un menor de orden dos no nulo. Por ejemplo $|\alpha_{13}| = 8 \neq 0$.

Comparando sendas discusiones de casos, concluimos: Si $m = 0$ el rango de ambas matrices coincide y es igual a 2.

b) En este apartado debemos igualar sendos determinantes y obtener los valores de m solución.

$$|A| = |B|, \quad |A| = -m - 4, \quad |B| = m^2 + 4m \rightarrow -m - 4 = m^2 + 4m \rightarrow m^2 + 5m + 4 = 0$$

$$m = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \rightarrow m = -1, \quad m = -4$$

3. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$.

a) [1 punto] Obtener el rango de A en función del parámetro a .

b) [0,5 puntos] Si $a=1$, obtener el determinante de la matriz $2 \cdot A^{-1}$.

c) [1 punto] Si $a=-1$, calcular todas las soluciones del sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) El rango coincide con la dimensión del mayor menor no nulo. Si aplicamos Sarrus en A :

$$\det(A) = a(a+1) + 0 - 2a(a-1) - (-3a(a+1) + 0 + 2(a-1)) = 4a(a+1) - 4a(a-1)$$

$$\det(A) = 2a^2 + 4a + 2 \rightarrow \det(A) = 0 \rightarrow a = -1$$

Discusión de casos.

Si $a = -1 \rightarrow$ El determinante de A se anula $\rightarrow$ el rango no puede ser 3 $\rightarrow$ Encontramos un menor de orden 2 no nulo $\rightarrow |\alpha_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow$ Rango 2

Si $a \neq -1 \rightarrow$ El determinante de A no se anula $\rightarrow$ Rango 3

b) Si $a=1 \rightarrow \det(A) = 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 2 = 8 \rightarrow \det(2 \cdot A^{-1}) = 2^3 \cdot \det(A^{-1}) = \frac{8}{|A|} = \frac{8}{8} = 1$

c) Si $a = -1$, calcular todas las soluciones del sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

La notación matricial del sistema quedaría:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Por abreviar el documento, en el siguiente enlace puedes observar los pasos para resolver por Gauss:

<https://matrixcalc.org/es/slu.html#solve-using-Gaussian-elimination%28%7B%7B1.0,-1.0,-1%7D,%7B-2.0,2.0,2%7D,%7B-3,-2,-1,0,0%7D%7D%29>

El sistema resulta SCI con un parámetro libre. Las soluciones son:

$$z = \lambda \in \mathbb{R}, \quad x = -1 + \lambda, \quad y = \frac{3}{2} - 2\lambda$$

4. Determina el rango de $A = \begin{pmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{pmatrix}$ según el valor de a .

La matriz A es de orden $n=3$. Por lo tanto su rango, como máximo, puede ser 3. Para que $\text{rango}(A)=3$ necesitamos que su determinante sea distinto de cero. Es decir:

$$\text{rango}(A)=3 \rightarrow \begin{vmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{vmatrix} \neq 0$$

Antes de resolver este determinante podemos intentar hacer el mayor número de ceros posible, para simplificar la suma de producto final de la regla de Sarrus.

$$\begin{vmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{vmatrix} \rightarrow C'_2 = C_2 + C_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} a & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ a+2 & a-3 & -10 \end{vmatrix} = 12(a-3) - 4a(a-3) = 4(a-3)(3-a) = -4(a-3)^2$$

Es decir, los valores de a que no anulen el determinante harán que el rango de A sea igual a 3.

$$-4(a-3)^2 \neq 0 \rightarrow a \neq 3$$

Nuestra discusión de casos es la siguiente:

- Si $a \neq 3 \rightarrow \text{rango}(A)=3$

- Si $a=3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow$ Buscamos algún menor de orden 2 no nulo $\rightarrow$

Por ejemplo $|\alpha_{11}| = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -5 & -10 \end{vmatrix} = 20 + 20 = 40 \neq 0 \rightarrow \text{rango}(A)=2$

5. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = (1 \quad -2)$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Obtenga la matriz $A \cdot B$ y calcule su rango.

b) Clasifique y resuelva el sistema de ecuaciones $A \cdot B \cdot X = O$

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad -2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ → Ambas filas son proporcionales, por lo que su determinante es nulo → El rango no es 2 → Buscamos un menor de orden uno no nulo → $|1| = 1 \neq 0$ → Rango es 1 (recordamos que el rango coincide con la dimensión del mayor menor no nulo).

b) $A \cdot B \cdot X = O \rightarrow A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$ → Ambas ecuaciones son proporcionales → podemos eliminar una ecuación → $\{x - 2y = 0\}$ → Una ecuación y dos incógnitas → SCI con infinitas soluciones y un parámetro libre → $y = \lambda \rightarrow x = 2\lambda \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ determine:

a) Según los valores de k , el rango de la matriz $A \cdot A^t - k \cdot I$, donde I es la matriz unidad de orden 2.

b) La matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que verifique la ecuación matricial $A \cdot A^t \cdot X = 6 \cdot X$

$$a) \quad A \cdot A^t - k \cdot I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-k & 3 \\ 3 & 3-k \end{pmatrix}$$

Si el determinante de la matriz es no nulo, el rango será 2.

$$|A \cdot A^t - k \cdot I| = (3-k)^2 - 9 = 9 + k^2 - 6k - 9 = k^2 - 6k$$

Igualamos el determinante a cero $\rightarrow k^2 - 6k = 0 \rightarrow k = 0, k = 6$

Discusión de casos:

- Si $k = 0 \rightarrow A \cdot A^t - 0 \cdot I = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$ Buscamos un menor de orden uno no nulo $\rightarrow |3| = 3 \neq 0 \rightarrow$ Rango 1
- Si $k = 6 \rightarrow A \cdot A^t - 6 \cdot I = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$ Buscamos un menor de orden uno no nulo $\rightarrow |3| = 3 \neq 0 \rightarrow$ Rango 1
- Si $k \neq 0, 6 \rightarrow |A \cdot A^t - k \cdot I| \neq 0 \rightarrow$ Rango 2

b) $A \cdot A^t \cdot X = 6 \cdot X \rightarrow$ Aprovechando los cálculos del apartado anterior, con $k = 6$:

$$A \cdot A^t \cdot X - 6 \cdot X = 0 \rightarrow (A \cdot A^t - 6I) \cdot X = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} \rightarrow$$

Las dos ecuaciones son proporcionales, por lo que podemos eliminar una de las ecuaciones $\rightarrow$

$$\begin{cases} -3x + 3y = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Una ecuación y dos incógnitas} \rightarrow \text{SCI con infinitas soluciones y un parámetro libre} \rightarrow x = \lambda \rightarrow y = x \rightarrow y = \lambda \rightarrow X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$